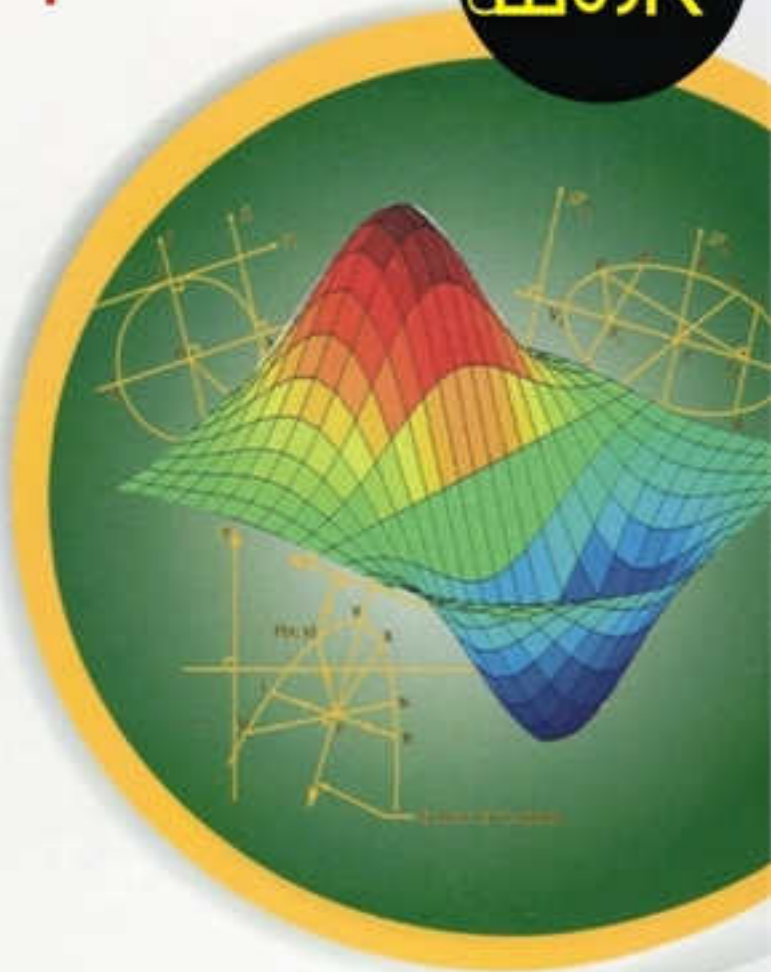
# TRIGONOMETRÍA

TEÓRICO - PRÁCTICO

twitter.com/calapenshko

CALAPENSHKO



**CONTENIDO:**

- Trigonometría Plana
- Geometría Analítica

FONDO EDITORIAL RODO
Siempre Competitivo

**A todo el público en general:**

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

**Este libro no debe ser prostituito monetariamente**, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

**28 de agosto del 2020**

team CALAPENSHKO

**Libro: Trigonometría**

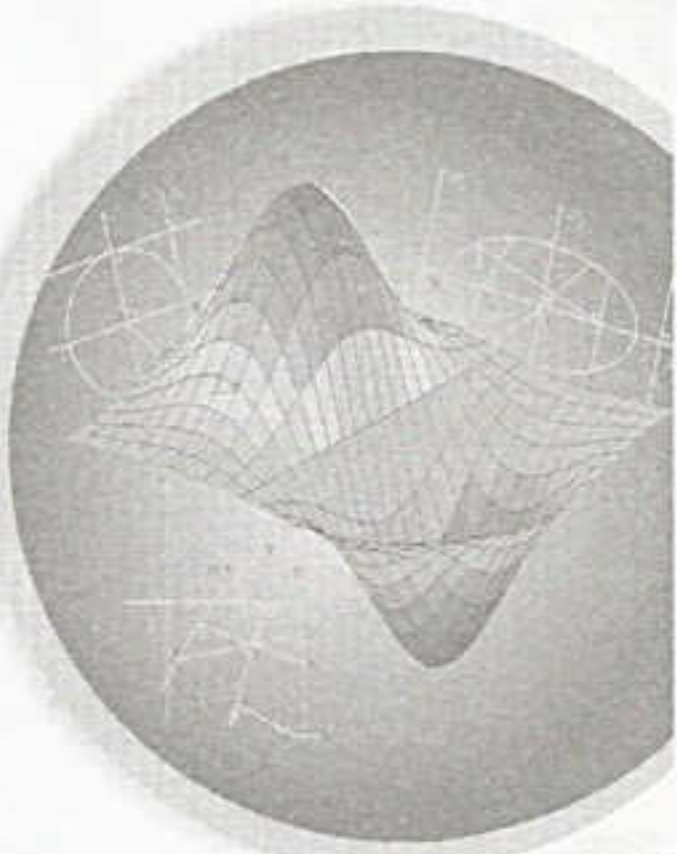
Páginas anexadas: 861
Páginas en bruto: 826
Peso bruto aproximado: 367 megas
Replica: No
Calificación: 9/10
Autor: Editorial Rodo
ISBN: 2017-15158
Tiempo SCAN: **5 horas 23 minutos**
Edición SCAN: **2 horas 11 minutos**
Tiempo Total SCAN: **7 horas 34 minutos**

team CALAPENSHKO

twitter.com/calapenshko

# TRIGONOMETRÍA

TEÓRICO - PRÁCTICO



CONTENIDO:

- Trigonometría Plana
- Geometría Analítica

FONDO EDITORIAL RODO
Siempre Competitivo

CALAPENSHKO

team CALAPENSHKO

# PRESENTACIÓN

Creemos que la educación atraviesa por múltiples dificultades, vemos como en el transcurrir de los procesos de Admisión, grupos de especialistas discuten y dictaminan cambios en los modelos de prueba que son tomados en los llamados Concursos de Admisión. Es por ello que tenemos que ser consecuentes del rol protagónico que tenemos todos aquellos quienes nos encontramos inmersos en la labor educativa.

El **Fondo Editorial RODO** es un grupo educativo conformado por profesionales de experiencia que por muchos años vienen participando en el análisis y resolución de Exámenes de Admisión tomados en las diferentes universidades de nuestro país, tales como la UNI, UNMSM, UNAC, UNA y UNFV.

Conocedores de la realidad de nuestro educando que día a día nos muestra la interacción con ellos en las aulas de clase y poniendo en manifiesto nuestro compromiso como educadores hemos asumido el reto de contribuir a elevar el nivel académico de manera integral, dándole prioridad a los cursos de matemática y ciencias.

Continuando con la elaboración de nuestra colección, en esta oportunidad presentamos el texto teórico – práctico denominado **LIBRO DE TRIGONOMETRÍA y GEOMETRÍA ANALÍTICA**, concentrando todo el esfuerzo y la experiencia del grupo humano que la conforman. Caracterizándolo así por el rigor y la exigencia académica, ya que abarca los temas solicitados por el prospecto de Admisión.

Esta obra es la continuación de una serie de publicaciones que permitirán al estudiante acceder a un material novedoso el cual sabemos generará diversos comentarios y sugerencias, los cuales sabremos aceptar.

*Fondo Editorial RODO*
*De: Walter Z. Benitez Nuñez*

team CALAPENSHKO

# LIBRO DE TRIGONOMETRÍA

**MATEMÁTICA II - TRIGONOMETRÍA**

**ESTA ES UNA OBRA COLECTIVA - EQUIPO PEDAGÓGICO**
Walter Antonio Mori Valverde

twitter.com/calapenshko

**EDITADO por**
FONDO EDITORIAL RODO
de Walter Z. Benitez Nuñez
Av. Venezuela 979 Of. 205 - Breña
LIMA 05, PERÚ ☎ 424-6350 992-796104

**5a. Edición - Octubre 2017**

**Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú**
**N°: 2017 - 15158**

**DIAGRAMACIÓN, DIGITACIÓN Y GRÁFICOS**
José Miguel Gallo Ballena

Se término de imprimir en Noviembre del 2017 en:
**GRAFIC PLUS S. A. C.**
**Jr. Chincha N° 434 A. H. VI ZONA LIMA - Lima 11**

Prohibida la reproducción total o parcial de este boletín, por cualquier medio, sin permiso escrito de la Editorial

team CALAPENSHKO

# ÍNDICE

TRIGONOMETRÍA


| | | |
|---|---|---|
| CAPÍTULO 1. | Ángulo Trigonométrico y Sistemas de Medida Angular | 7 |
| CAPÍTULO 2. | Longitud de Arco | 37 |
| CAPÍTULO 3. | Razones Trigonométricas de Ángulos Agudos | 73 |
| CAPÍTULO 4. | Ángulos Verticales y Horizontales | 113 |
| CAPÍTULO 5. | Razones Trigonométricas de Ángulos en Posición Estándar | 147 |
| CAPÍTULO 6. | Reducción al Primer Cuadrante | 183 |
| CAPÍTULO 7. | Circunferencia Trigonométrica | 213 |
| CAPÍTULO 8. | Identidades Trigonométricas | 255 |
| CAPÍTULO 9. | Identidades de Arcos Compuestos | 285 |
| CAPÍTULO 10. | Identidades de Arcos Múltiples | 327 |
| CAPÍTULO 11. | Identidades Para Transformaciones Trigonométricas | 371 |
| CAPÍTULO 12. | Funciones Trigonométricas | 403 |
| CAPÍTULO 13. | Funciones Trigonométricas Inversas | 455 |
| CAPÍTULO 14. | Ecuaciones e Inecuaciones Trigonométricas | 487 |
| CAPÍTULO 15. | Resolución de Figuras Geométricas | 521 |
| CAPÍTULO 16. | Geometría Analítica | 565 |
| CAPÍTULO 17. | La Recta | 599 |
| CAPÍTULO 18. | Circunferencia y Parábola | 631 |
| CAPÍTULO 19. | Elipse e Hipérbola | 667 |
| CAPÍTULO 20. | Números Complejos Aplicados a la Trigonometría | 711 |
| CAPÍTULO 21. | Límites y Derivadas | 751 |
| CAPÍTULO 22. | Traslación y Rotación de Ejes Coordenadas Polares | 781 |

team CALAPENSHKO

## SIMBOLOGÍA

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | : Conj. de los números naturales |
| $\mathbb{Z}$ | : Conj. de los números enteros |
| $\mathbb{Q}$ | : Conj. de los números racionales |
| $\mathbb{Q}'$ | : Conj. de los números irracionales |
| $\mathbb{R}$ | : Conj. de los números reales |
| $\mathbb{C}$ | : Conj. de los números complejos |
| $\{\}$ o $\varnothing$ | : Conj. nulo o vacío |
| $\in$ | : Pertenece a ... |
| $\notin$ | : No pertenece a ... |
| $A \subset B$ | : A es subconjunto de B |
| $A \cap B$ | : a intersección B |
| $A \cup B$ | : A unión B |
| $A'$ o $A^c$ | : Complemento del conjunto A |
| $\exists$ | : Existe |
| $\nexists$ | : No existe |
| $\exists!$ | : Existe un único |
| $\nexists!$ | : No existe un único |
| $\forall$ | : Para todo |
| $\not\forall$ | : No para todo |
| $\Sigma$ | : Suma o sumatoria |
| $\rightarrow$ o $\therefore$ | : Implica, luego, por lo tanto |
| $\leftrightarrow$ | : Es equivalente a, implica en ambos sentidos |
| $\Rightarrow$ | : Entonces |
| $\Leftrightarrow$ | : Si y solo si |
| / | : Tal que |
| // | : Paralelo a |
| $\angle$ | : Ángulo |
| $\equiv$ | : Idéntico |
| $\approx$ | : Aproximadamente |
| $2n$ | : Número par ($n \neq 0$) |
| $2n + 1$ | : Número impar ($n \in \mathbb{Z}$) |
| $2n - 1$ | : Número impar ($n \in \mathbb{N}$) |
| $\lvert a \rvert$ | : Valor absoluto de a |

| | |
|---|---|
| $a > b$ | : a es mayor que b |
| $a < b$ | : a es menor que b |
| $a \geq b$ | : a es mayor o igual que b |
| $a \leq b$ | : a es menor o igual que b |
| $a < c < b$ | : c es mayor que a y menor que b |
| $\sim$ | : Semejante |
| $\cong$ | : Congruente |
| $\wedge$ | : y |
| $\vee$ | : o |
| $f(x)$ | : Función de x |
| $f^*(x)$ | : Función inversa de x |
| $n!$ | : Factorial de n |
| $\alpha$ | : Alfa |
| $\beta$ | : Beta |
| $\gamma$ | : Gamma |
| $\delta$ | : Delta |
| $\varepsilon$ | : Épsilon |
| $\eta$ | : Eta |
| $\theta$ | : Teta |
| $\lambda$ | : Lambda |
| $\pi$ | : Pi |
| $\sigma$ | : Sigma |
| $\phi$ | : Phi |
| $\omega$ | : Omega |
| sen x | : Seno del número x |
| cos x | : Coseno del número x |
| tan x | : Tangente del número x |
| cot x | : Cotangente del número x |
| sec x | : Secante del número x |
| csc x | : Cosecante del número x |
| arc sen x | : Arco seno del número de x |
| arc cos x | : Arco coseno del número x |
| arc tan x | : Arco tangente del número de x |
| Lim | : Límite |
| $\frac{dx}{dt}$ | : La derivada de x respecto a t |

twitter.com/calapenshko

**A todo el público en general:**

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

**Este libro no debe ser prostituito monetariamente**, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

**28 de agosto del 2020**

team CALAPENSHKO

Capítulo 1

# Ángulo Trigonométrico y Sistemas de Medida Angular

**CAPACIDADES**

- Reconocer ángulos trigonométricos.
- Transformar la medida de un ángulo trigonométrico en los diversos sistemas de medida angular.
- Determinar la relación entre la medida del ángulo en los diversos sistemas.

## EL ORIGEN DEL SISTEMA MÉTRICO DECIMAL

Los romanos se habían esforzado en imponer un sistema único de medidas válido en todo su inmenso imperio, pero luego, durante la Edad Media, volvió a reinar un increíble desorden. Proliferaron las unidades y, pese a que todas conservaban el mismo nombre, cada una de ellas tenía valores tan diferentes que a veces casi llegaban a duplicarse, a unos kilómetros de distancia, al pasar de una provincia a otra.

Los edictos promulgados para poner remedio a esta situación fueron papel mojado, pero ya apuntaban en ellos los esbozos de un sistema de unidades coherente.

COLISEO ROMANO
JOYA ARQUITECTÓNICA CIRCULAR

El primer paso en este sentido lo dio el sacerdote francés Gabriel Mouton, quien, en 1670, propuso un sistema decimal cuya unidad era la longitud del arco de meridiano equivalente a un minuto de arco.

Serán los ideólogos de la Revolución Francesa quienes, para responder a los deseos expresados en los "memoriales de agravios" de 1789, pero también en los de los Estados Generales de 1576, para que en toda Francia sólo existiera un peso y una medida, tras suprimir los derechos feudales referentes a los pesos y medidas (15 de marzo de 1790), decidieron uniformarlo todo. Se propuso instaurar un sistema de medidas único y uniforme, basado en el uso exclusivo de la escala decimal, asegurando así la facilidad en los intercambios y la integridad en las operaciones comerciales. La Academia de las Ciencias trató de excluir todos los elementos arbitrarios, todo lo que pudiera despertar sospechas sobre el interés particular de Francia y, finalmente, se volcó hacia la Naturaleza. Así, en Marzo de 1791, decidió que el cuarto de meridiano terrestre se convirtiera en la unidad real de medida, y la diezmillonésima parte de esa longitud (la cuarenta millonésima parte de un meridiano terrestre) fuera la unidad usual. La unidad en cuestión recibió el nombre de "metro" (del griego metron, "medida"), sus divisiones se denominarían con prefijos latinos (decímetro, centímetro, milímetro) y sus múltiplos, con griegos (decámetro, hectómetro, kilómetro).

El arco de meridiano elegido fue el que va desde Dunkerque hasta Barcelona y la medición fue encomendada a dos astrónomos: Jean-Baptiste Delambre, que comenzaría en Dunkerque, y Pierre Mechain, que lo haría en Barcelona, ambos deberían encontrarse en Rodez. Parten en junio de 1792.

team CALAPENSHKO



## INTRODUCCIÓN

A través de la historia, los avances que se producen en todos los campos de la ciencia, son el producto de satisfacer las necesidades. La trigonometría no es ajena a este proceso, al determinar una definición de ángulo diferente a la definición clásica planteada en geometría: "Intersección de dos rayos con un vértice común"

Con el objeto de introducir en nuestro campo de estudio a los ángulos mayores a una vuelta, así como también, luego de establecer alguna conversión de las medidas de los ángulos en el plano, generadas en un sentido u otro (diferencias en el signo)

En el presente capítulo además de reconocer el ángulo trigonométrico, se revisará de manera muy concreta los sistemas de medición angular más conocido, así como las relaciones que se establecen entre estas.

# ÁNGULO TRIGONOMÉTRICO

## DEFINICIÓN

El ángulo trigonométrico es aquel que se genera por la rotación de un rayo (en un mismo plano) alrededor de un punto fijo llamado vértice, desde una posición inicial hasta una posición final.

La gráfica adjunta muestra un ángulo trigonométrico generado en sentido antihorario y sus elementos.

$\overrightarrow{OA}$ : Posición inicial [lado inicial]

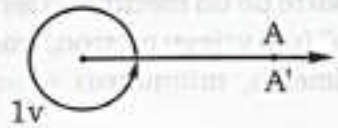
$\overrightarrow{OA'}$ : Posición final [lado final]

O : Vértice del ángulo generado

θ : Ángulo trigonométrico

### OBSERVACIÓN

- Si el giro del rayo es en sentido antihorario, el ángulo se considera positivo. Así el ángulo anterior es positivo.
- Si el giro del rayo es en sentido horario, el ángulo se considera negativo.
- Si el lado final coincide con el lado inicial por primera vez luego de un giro, entonces el ángulo es de una vuelta (ángulo de revolución).




Asimismo, tenemos que:

- Si a un ángulo se le invierte, entonces su sentido de giro cambiará su signo.
- Para sumar ángulos trigonométricos gráficamente, estos deben tener el mismo sentido.

team CALAPENSHKO

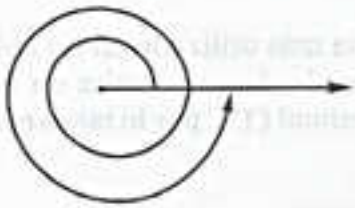

a)

Ángulo de 1 vuelta.

b)

Ángulo nulo (0).

c)



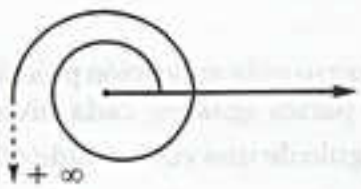
Ángulo de 2 vueltas.

d)

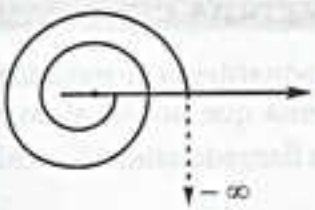
Ángulo recto: $\frac{1}{4}$ vuelta.

En general:

e)

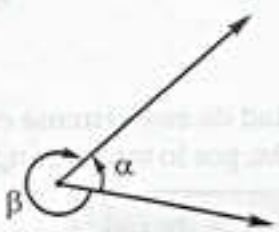



f)

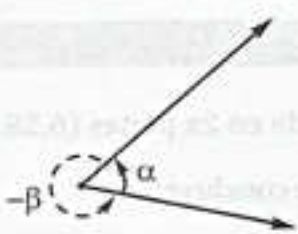



$-\infty < m\angle \text{ trigonométrico} < +\infty$

**Ejemplo:** De la figura mostrada, determinar $\alpha - \beta$:




**Resolución:** En la figura adjunta, se observa el cambio de sentido del ángulo β para poder sumar gráficamente.




Luego: $\alpha + (-\beta) = 1$ vuelta

$\boldsymbol{\alpha - \beta = 1v}$

team CALAPENSHKO


# SISTEMAS DE MEDIDAS ANGULARES

## DEFINICIÓN

Expresar la medida de los ángulos en términos del ángulo de una vuelta, no es muy común y poco práctico, para ello utilizamos los sistemas de medidas adecuados.

## SISTEMA DE MEDIDA SEXAGESIMAL

También conocido como sistema de medida inglés, es el sistema más utilizado en las aplicaciones de ingeniería, navegación, etc. Es aquel sistema que divide al ángulo de una vuelta en 360 partes iguales; cada división es la unidad del sistema llamado grado sexagesimal (1°), por lo tanto el ángulo de una vuelta mide 360°.

$$\angle 1v <> 360^\circ$$

Subunidades: 1' : minuto sexagesimal 1" : segundo sexagesimal

Donde: $1^\circ <> 60' \wedge 1' <> 60'' \Rightarrow 1^\circ <> 3600''$

## SISTEMA DE MEDIDA CENTESIMAL

También llamado sistema de medida francés, este sistema es de poco o nula aplicación práctica.

Es aquel sistema que divide al ángulo de una vuelta en 400 partes iguales; cada división es la unidad del sistema llamado grado centesimal ($1^g$), por lo tanto el ángulo de una vuelta mide $400^g$.

$$\angle 1v <> 400^g$$

Subunidades $1^m$ : minuto centesimal $1^s$ : segundo centesimal

Donde: $1^g <> 100^m \wedge 1^m <> 100^s \Rightarrow 1^g <> 10000^s$

## SISTEMA DE MEDIDA RADIAL

Llamado también sistema circular, la unidad de este sistema es el radian (1 rad) y se define como aquel que divide al ángulo de una vuelta entre $2\pi$, por lo tanto el ángulo de una mide $2\pi$rad.

$$\angle 1v <> 2\pi \text{ rad}$$

Valores aproximados de $\pi$: $\pi = 3,1416$; $\pi = \frac{22}{7}$; $\pi = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

## OBSERVACIÓN

Debido a que 1 rad es una vuelta dividida en $2\pi$ partes (6,28...), 1° es una vuelta dividida en 360 y $1^g$ es una vuelta dividida en 400, se concluye:

$$1 \text{ rad} > 1^\circ > 1^g$$

team CALAPENSHKO


## CONCLUSIÓN

Para el ángulo de una vuelta tenemos: $\angle 1v <> 360^\circ <> 400^g <> 2\pi$ rad

Luego:

$$180^\circ <> 200^g <> \pi \text{ rad}$$
$$9^\circ <> 10^g <> \frac{\pi}{20} \text{ rad}$$

Este último, se usa para convertir de un sistema a otro (factor de conversión)

Ejemplo:

- $45^\circ = 45^\circ \times \left(\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}\right)$ $\quad \therefore \quad 45^\circ <> \frac{\pi}{4}$ rad
- $\frac{2\pi}{5}$ rad $= \frac{2\pi}{5}$ rad $\times \left(\frac{200^g}{\pi \text{ rad}}\right)$ $\quad \therefore \quad \frac{2\pi}{5}$ rad $<> 80^\circ$

## OBSERVACIONES

**1)** Partiendo de: $9^\circ <> 10^g$

$$* \quad 9^\circ \times \left(\frac{60'}{1^\circ}\right) <> 10^g \times \left(\frac{100^m}{1^g}\right)$$

$$\Rightarrow 27' <> 50^m$$

$$* \quad 9^\circ \times \left(\frac{60'}{1^\circ}\right) \times \left(\frac{60''}{1'}\right) <> 10^g \times \left(\frac{100^m}{1^g}\right) \times \left(\frac{100^s}{1^m}\right)$$

$$\Rightarrow 81'' <> 250^s$$

$$\therefore \boxed{27' <> 50^m \text{ y } 81'' <> 250^s}$$

**2)** $1 \text{ rad} = 1 \text{ rad}\left(\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}}\right) = \frac{180^\circ}{\pi}$

Considerando: $\pi = 3{,}1416$

Se obtiene: $1 \text{ rad} = 57{,}296^\circ$

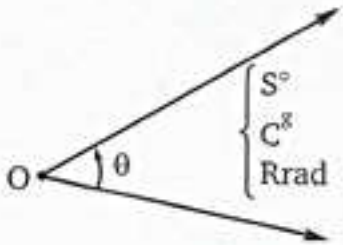
Transformando a grados, minutos y segundos sexagesimales.

$$\therefore \ 1 \text{ rad} = 57^\circ 17' 44{,}8''$$

team CALAPENSHKO


## RELACIÓN NUMÉRICA ENTRE LOS TRES SISTEMAS

Consideramos un ángulo positivo como el de la figura.




Siendo:
- S : Número de grados sexagesimales del ángulo θ.
- C : Número de grados centesimales del ángulo θ.
- R : Número de radianes del ángulo θ.

Luego se cumple:

$$\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}$$

Simplificando, tenemos:

$$\frac{S}{9} = \frac{C}{10} = \frac{20R}{\pi} = k$$

Para el ángulo positivo como en nuestro caso se cumple: $C > S > R$

También: $\left\{ S = 9k \;;\; C = 10k \;;\; R = \frac{\pi k}{20} \right.$

| Sistema | Sexagesimal | Centesimal | Radial |
|---|---|---|---|
| #de grados | S | C | R |
| #de minutos | 60S | 100C | |
| #de segundos | 3600S | 10000C | |

**DEMOSTRACIÓN:**

Como : $S^\circ <> C^g <> R\,\text{rad}$

Dividiendo por la $m\angle 1\,v$

$$\Rightarrow \frac{S^\circ}{m\angle 1v} <> \frac{C^g}{m\angle 1v} <> \frac{R\,\text{rad}}{m\angle 1v}$$

Simplificando: $m\angle 1v <> 360^\circ <> 400^g <> 2\pi\,\text{rad}$

Luego:

$$\frac{S^\circ}{360^\circ} = \frac{C^g}{400^g} = \frac{R\,\text{rad}}{2\pi\,\text{rad}}$$

$$\therefore \frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}$$

team CALAPENSHKO



**NOTA**

En los ejemplos desarrollados o propuestos que siguen, se considera que S, C y R son los números convencionales para un mismo ángulo (número de grados sexagesimales, número de grados centesimales y número de radianes de un mismo ángulo). Vale aclarar también que las fórmulas vistas en el teorema anterior son validas tanto para ángulos positivos como negativos.

**Notación:**

$$a^\circ\, b'\, c'' = a^\circ + b' + c''$$
$$a^g\, b^m\, c^s = a^g + b^m + c^s$$

**Ejemplo 1:** $4°20'15'' = 4° + 20' + 15''$ $\qquad 12^g35^m80^s = 12^g + 35^m + 80^s$

**OBSERVACIÓN**

$$\bullet\ \frac{\text{Suplemento }(\alpha)}{(S^\circ, C^g, R\,\text{rad})} = \begin{cases}(180 - S)^\circ \\ (200 - C)^g \\ (\pi - R)\,\text{rad}\end{cases} \qquad \bullet\ \frac{\text{Complemento }(\alpha)}{(S^\circ, C^g, R\,\text{rad})} = \begin{cases}(90 - S)^\circ \\ (100 - C)^g \\ \left(\frac{\pi}{2} - R\right)\text{rad}\end{cases}$$

**Ejemplo 2:** Si para cierto ángulo positivo se cumple: $\dfrac{C^2 - S^2}{C + S} = \dfrac{\pi}{5R}$

donde S, C y R son el número de grados sexagesimales, número de grados centesimales y número de radianes del mismo ángulo. Halle su medida en el sistema circular.

**Resolución:** Del dato: aplicamos diferencia de cuadrados

Simplificamos: $\dfrac{(C+S)(C-S)}{(C+S)} = \dfrac{\pi}{5R}$

Luego: $C - S = \dfrac{\pi}{5R}$ .....(i)

De: $\boxed{\dfrac{S}{180} = \dfrac{C}{200} = \dfrac{R}{\pi}}$ $\Rightarrow$ $S = \dfrac{180R}{\pi}$ ; $C = \dfrac{200R}{\pi}$

Reemplazamos en (i):

$$\frac{200R}{\pi} - \frac{180R}{\pi} = \frac{\pi}{5R} \Rightarrow \frac{20R}{\pi} = \frac{\pi}{5R} \Rightarrow R^2 = \frac{\pi^2}{100}$$

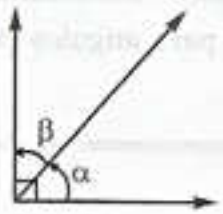
$$\therefore R = \frac{\pi}{10}$$

**$\therefore$ El ángulo mide $\dfrac{\pi}{10}$ rad**

## EJERCICIOS DE APLICACIÓN

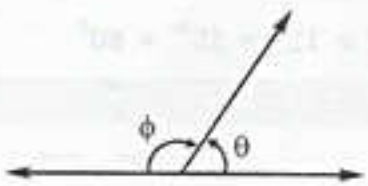
**1.** De los gráficos, indicar verdadero (V) o falso (F)

a)



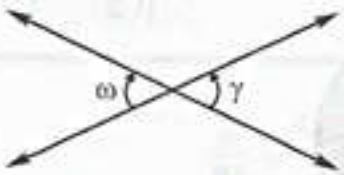

$\alpha + \beta = 90^\circ$ ..... ( )

b)



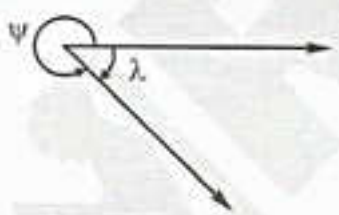

$\theta + \phi = 200^g$ ..... ( )

c)




$\omega = \gamma$ ..... ( )

d)




$\psi - \lambda = 2\pi$ rad ..... ( )

**2.** Transformar al sistema radial.

a) $30^\circ$ b) $45^\circ$ c) $10^\circ$ d) $22^\circ 30'$

e) $100^g$ f) $60^g$ g) $-1^g$ h) $12^g 50^m$

**3.** Transformar al sistema sexagesimal

a) $10^g$ b) $50^g$ c) $15^g$ d) $1^g$

e) $\frac{\pi}{2}$ rad f) $\frac{\pi}{6}$ rad g) $\frac{4\pi}{3}$ rad h) $\frac{7\pi}{40}$ rad

**4.** Transformar al sistema centesimal

a) $60^\circ$ b) $-81^\circ$ c) $13^\circ 30'$

d) $1^\circ$ e) $5\pi$ rad f) $\frac{19\pi}{4}$ rad

g) $\frac{\pi}{8}$ rad h) $\frac{\pi}{3}$ rad

**5.** Colocar el signo de relación (>, <, =) correspondiente en cada cuadro.

a) $10^\circ$ ☐ $10^g$

b) $\frac{\pi}{4}$ rad ☐ $50^g$

c) $30^g$ ☐ $28^\circ$

d) $18^\circ$ ☐ $\frac{\pi}{11}$ rad

f) $1^g 1^m 1^s$ ☐ $10101^s$

e) $3^\circ 30'$ ☐ $200'$

g) $45^\circ 20' + 4^\circ 40'$ ☐ $50^\circ$

h) $\frac{\pi}{6}$ rad $+ \frac{\pi}{5}$ rad ☐ $\frac{\pi}{4}$ rad

**6.** Siendo S, C y R los números de grados sexagesimales, grados centesimales y número de radianes respectivamente, calcular el valor de cada expresión.

a) $\frac{C+S}{C-S}$ b) $\frac{C^2-S^2}{C.S}$

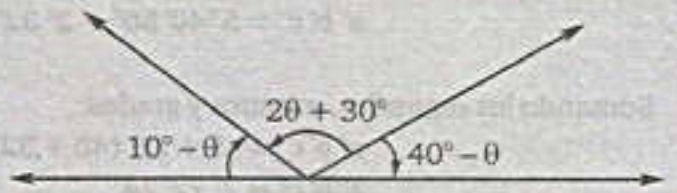
c) $\frac{C^2+CS+S^2}{C^2+S^2}$ d) $\sqrt{\frac{2C+S}{C-S}-2}$

e) $\frac{\pi S+\pi C-3R}{R}$ f) $90R\left(\frac{1}{S}+\frac{1}{C}\right)$

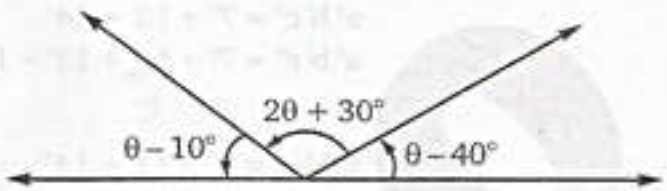
team CALAPENSHKO


## PROBLEMAS RESUELTOS

**PROBLEMA 1** Del gráfico, determine la medida del ángulo "θ"




**Resolución:** Del gráfico cambiamos al sentido antihorario



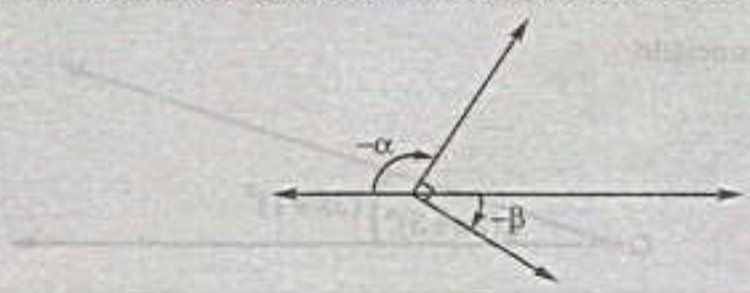

La suma de las medidas de los tres ángulos es igual a 180°

Entonces: $\theta - 40° + 2\theta + 30° + \theta - 10° = 180°$

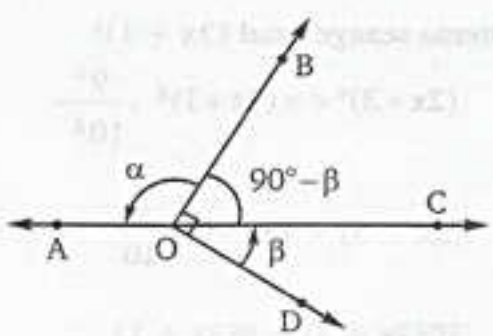
$4\theta = 200°$

$\therefore \quad \boldsymbol{\theta = 50°}$

**PROBLEMA 2** En la figura mostrada, determine la relación entre α y β




**Resolución:** Del gráfico cambiamos al sentido antihorario obtendremos:




i) $m\angle COB = 90° - \beta$

ii) $m\angle COB + m\angle BOA = 180°$

$90° - \beta + \alpha = 180°$

Finalmente despejando se obtiene:

$\therefore \quad \boldsymbol{\alpha - \beta = 90°}$

**PROBLEMA 3** Calcule "a + b + c", si:

$$a^\circ\, b'\, c'' = 5^\circ 40' 50'' + 2^\circ 32' 24''$$

**Resolución:**

$$a^\circ\, b'\, c'' = 5^\circ 40' 50'' + 2^\circ 32' 24''$$

Sumando los segundos, minutos y grados:

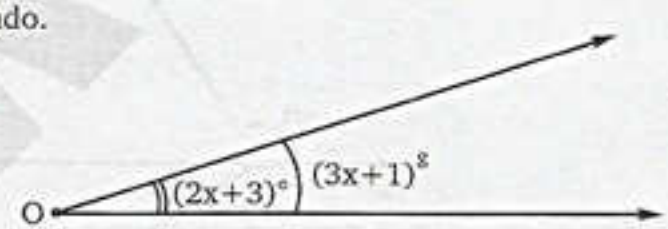
$$a^\circ\, b'\, c'' = (5+2)^\circ\, (40+32)'\, (50+24)''$$
$$a^\circ\, b'\, c'' = 7^\circ\, 72'\, 74''$$
$$a^\circ\, b'\, c'' = 7^\circ + 72' + \underbrace{60''}_{1'} + 14''$$
$$a^\circ\, b'\, c'' = 7^\circ + 73' + 14''$$
$$a^\circ\, b'\, c'' = 7^\circ + \underbrace{60'}_{1^\circ} + 13' + 14''$$
$$a^\circ\, b'\, c'' = 8^\circ + 13' + 14''$$
$$a^\circ\, b'\, c'' = 8^\circ\, 13'\, 14''$$

Luego: $a = 8$ , $b = 13$ y $c = 14$

$$\therefore \quad \mathbf{a + b + c = 35}$$

**PROBLEMA 4** Si un mismo ángulo se mide en el sistema sexagesimal y centesimal, se obtiene $(2x + 3)^\circ$ y $(3x + 1)^g$ respectivamente, determine el valor de "x"

**Resolución:** Del enunciado.




Dichas medidas, son equivalentes:

$$(2x + 3)^\circ <> (3x + 1)^g$$

Convirtiendo al sistema sexagesimal $(3x + 1)^g$

$$(2x+3)^\circ <> (3x+1)^g \cdot \frac{9^\circ}{10^g}$$

Tendremos: $$(2x + 3) = (3x + 1)\frac{9}{10}$$

Efectuamos:
$$10(2x + 3) = 9(3x + 1)$$
$$20x + 30 = 27x + 9$$
$$7x = 21$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 3}$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 5** Determine la medida del ángulo en radianes si se cumple:

$$\frac{S}{10} - 2 = \frac{C}{20}$$

(S y C lo convencional)

**Resolución:** Sabemos : $S = 9k \;;\; C = 10k$ y $R = \frac{\pi k}{20}$

Reemplazamos en : $\frac{S}{10} - 2 = \frac{C}{20}$

$$\frac{9k}{10} - 2 = \frac{10k}{20}$$

$$\frac{9k}{10} - \frac{k}{2} = 2$$

Simplificando : $k = 5$

Luego : $R = \frac{\pi(5)}{20} \Rightarrow R = \frac{\pi}{4}$

Finalmente la medida del ángulo es:

$$\therefore \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

**PROBLEMA 6** Se crea un nuevo sistema de medición angular cuya unidad de medida es el grado M($1^M$); sabiendo que $3^M$ equivale a la doceava parte de un ángulo recto, expresar $1^M$ en minutos sexagesimales.

**Resolución:** El nuevo sistema de medición angular es el grado "M". Cuya unidad de medida es $1^M$.

También: $3^M <> \frac{1}{12} \times 90°$

$$3^M <> \frac{15°}{2}$$

$$1^M <> \frac{5°}{2}$$

Convirtiendo los grados sexagesimales $\frac{5°}{2}$ a minutos sexagesimales.

$$1^M <> \frac{5°}{2} \times \frac{60'}{1°}$$

Finalmente:

$$\therefore 1^M <> 150'$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 7** Calcule el valor de:

$$E = \frac{10^m}{9'} + \frac{27''}{50^s}$$

**Resolución:**

**Recordar:**

$27' <> 50^m$ $\quad$ $81'' <> 250^s$

Así tenemos:

$$* \quad \frac{10^m}{9'} = \frac{10^m}{9'} \times \frac{27'}{50^m} = \frac{3}{5}$$

$$* \quad \frac{27''}{50^s} = \frac{27''}{50^s} \times \frac{250^s}{81''} = \frac{5}{3}$$

Luego :

$$E = \frac{3}{5} + \frac{5}{3}$$

$$\therefore \quad \mathbf{E = \frac{34}{15}}$$

**PROBLEMA 8** Si $\theta = a^\circ\, b'\, c''$ es el suplemento del complemento de 25,3925°, entonces el valor de "a – b – c" es:

**Resolución:**

Sea : $\alpha = 25{,}3925^\circ$

Convertimos a grados, minutos y segundos

$$\alpha = 25^\circ + 0{,}3925^\circ \times \frac{60'}{1^\circ}$$

$$\alpha = 25^\circ + 23{,}55'$$

$$\alpha = 25^\circ + 23' + 0{,}55' \times \frac{60''}{1'}$$

$$\alpha = 25^\circ + 23' + 33'' \quad \Rightarrow \quad \alpha = 25^\circ 23' 33''$$

**Recordar:**

$1^\circ <> 60'$

$1' <> 60''$

Condición del problema:

$$\theta = 180^\circ - (90^\circ - \alpha)$$

$$\theta = 90^\circ + \alpha$$

**Recordar:**

Complemento de $x = 90^\circ - x$

Suplemento de $x = 180^\circ - x$

Así tenemos :

$$\theta = 90^\circ + 25^\circ 23' 33''$$

$$\Rightarrow \quad \theta = 115^\circ 23' 33'' = a^\circ b' c''$$

Luego

$$a = 115, \quad b = 23, \quad c = 33$$

$$\therefore \quad \mathbf{a - b - c = 59}$$

team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 9** La diferencia de los recíprocos de los números de grados sexagesimales y centesimales de un mismo ángulo, es igual a su número de radianes dividido por $9\pi$. Calcule aproximadamente el valor de dicho ángulo en radianes.

Usar: $\sqrt{2} = 1{,}414$

**Resolución:**

Del enunciado : $\dfrac{1}{S} - \dfrac{1}{C} = \dfrac{R}{9\pi}$ .....(*)

Sabemos : $S = 9k\,;\quad C = 10k\,;\quad R = \dfrac{\pi k}{20}$

En(*),tenemos: $\dfrac{1}{9k} - \dfrac{1}{10k} = \dfrac{\pi\, k}{9\pi 20} \Rightarrow k = \sqrt{2}$

Luego : $R = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{20} = \dfrac{\pi(1{,}414)}{20}$

$\therefore \quad \mathbf{R = 0{,}0707\pi}$

**PROBLEMA 10** Si S y C representan las medidas de un mismo ángulo en los sistemas conocidos y además se cumple:

$$3C^\circ - 2S^g = \pi\,\text{rad}$$

Determine la medida de dicho ángulo en radianes.

**Resolución:**

**Recordar:**

$9^\circ = 10^g \quad ; \quad 180^\circ = \pi\,\text{rad}$

En la condición : $3C^\circ - 2S^g \times \left(\dfrac{9^\circ}{10^g}\right) = 180^\circ \Rightarrow 3C^\circ - \dfrac{9S^\circ}{5} = 180^\circ$

$$3C - \frac{9S}{5} = 180 \text{ .....(*)}$$

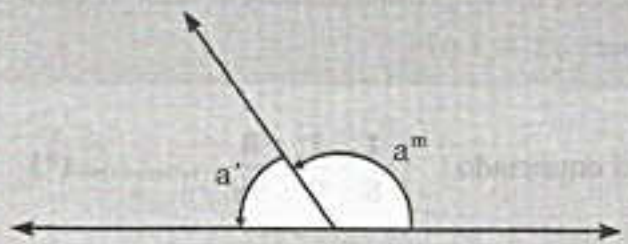
Sabemos : $S = 9k\,;\quad C = 10k\,;\quad R = \dfrac{\pi k}{20}$

En (*) : $3(10k) - \dfrac{9}{5}(9k) = 180 \Rightarrow k = \dfrac{300}{23}$

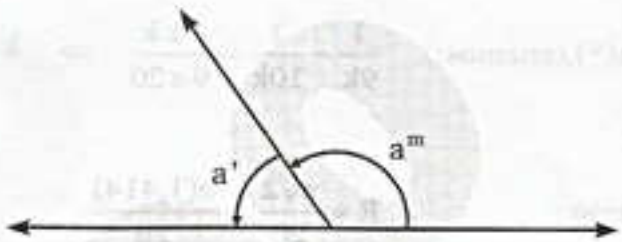
Luego : $R = \dfrac{\pi\, k}{20} = \dfrac{\pi \,.\, 300}{20\,.\,23}$

$$\therefore \quad \mathbf{R = \frac{15\,\pi}{23}}$$

**PROBLEMA 11** De la figura mostrada, calcule el valor aproximado de "a".




**Resolución:**




Del gráfico : $a^m + a' = 180^\circ$

$$a^m \times \frac{27'}{50^m} + a' = 180^\circ \times \frac{60'}{1^\circ}$$

$$\frac{27a'}{50} + a' = 180 \times 60'$$

$$\therefore \quad \mathbf{a = 7013}$$

**Recordar:**
$27' = 50^m$
$1^\circ = 60'$

**PROBLEMA 12** Determine el número de radianes de un ángulo que cumpla la siguiente condición:

$$S + 2C + R \cdot \sqrt{\frac{C+S}{C-S}} + 6 = 119{,}1416$$

(S, C y R lo convencional)

**Resolución:** Sabemos : $S = 9k \;;\; C = 10k \;\text{ y }\; R = \frac{\pi k}{20}$

Reemplazamos en : $S + 2C + R \cdot \sqrt{\frac{C+S}{C-S}} + 6 = 119{,}1416$

$$9k + 2(10k) + \frac{\pi k}{20}\sqrt{\frac{19k}{k}} + 6 = 116 + 3{,}1416$$

$$29k + \frac{\pi k}{20} \times \sqrt{25} = 116 + \pi$$

$$\therefore \quad \mathbf{k = 4}$$

Luego el número de radianes es:

team CALAPENSHKO


$$R = \frac{\pi k}{20} = \frac{\pi(4)}{20}$$

$$\therefore \quad \mathbf{R = \frac{\pi}{5}}$$

**PROBLEMA 13** Sabiendo que: $\frac{\pi}{72}\text{rad} <> x°y'$

Calcule el valor de:

$$E = \sqrt{\frac{x+y}{x}}$$

**Resolución:** Dado la equivalencia

twitter.com/calapenshko

$$\frac{\pi}{72}\text{rad} <> x°y'$$

Convertimos $\frac{\pi}{72}$rad a grados sexagesimales

$$\frac{\pi \text{ rad}}{72}.\frac{180°}{\pi \text{ rad}} <> x°y' \Rightarrow \frac{180°}{72} = x°y'$$

Simplificamos: $\frac{5°}{2} = x°y' \Rightarrow (2,5)° = x°y'$

$$\Rightarrow 2° + (0,5)°.\frac{60'}{1°} = x°y' \Rightarrow 2° + 30' = x°y'$$

$$\therefore \quad 2°\,30' = x°\,y'$$

Luego: $x = 2 \wedge y = 30$

Lo pedido: $E = \sqrt{\frac{x+y}{x}}$

Reemplazando: $E = \sqrt{\frac{32}{2}} = \sqrt{16}$

$$\therefore \quad \mathbf{E = 4}$$

**PROBLEMA 14** Se crean dos nuevos sistemas de medida angular que tiene como unidad de medida al grado x $(1^x)$ y al grado y$(1^y)$, sabiendo que $2^x$ equivale a $\frac{3\pi}{10}$ rad, además 6° equivale a $1^y$, transforme $40^x$ a grados y.

**Resolución:** Sea creado dos nuevos sistemas de medida angulares:

- El grado x$(1^x)$
- El grado y$(1^y)$

Luego, por condición: $2^x <> \frac{3\pi}{10}\text{rad}$ .....(1)

$6° <> 1^y$ ..... (2)

De (1): $2^x <> \frac{3\pi}{10}\text{rad} \times \frac{180°}{\pi\text{rad}}$

$2^x <> 54° \Rightarrow 1^x <> 27°$

De (2): $6° <> 1^y \Rightarrow 6°.\frac{1^x}{27°} <> 1^y \Rightarrow 1^x <> \frac{9^y}{2}$

Finalmente nos pide $40^x$ al sistema y

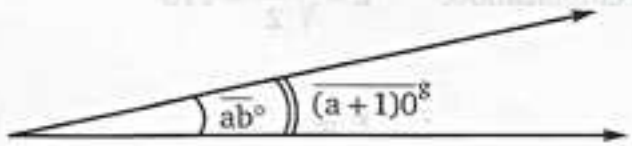
Sea: $\alpha = 40^x$

$\alpha = 40^x.\frac{(9/2)^y}{1^x} \Rightarrow \alpha = 180^y$

$\therefore$ $\mathbf{40^x <> 180^y}$

**PROBLEMA 15** Si la medida de un ángulo se expresa como $\overline{ab}°$ y también $\overline{(a+1)0}^g$, determine el mayor valor que toma su medida circular.

**Resolución:** Del enunciado:



team CALAPENSHKO



$$\overline{ab}^{\circ} <> \overline{(a+1)0}^{g}$$

$$\overline{ab}^{\circ} <> \overline{(a+1)0}^{g} \times \frac{9^{\circ}}{10^{g}}$$

$$\overline{ab} = 9(a+1)$$

$$(10a + b) = 9a + 9$$

$$a + b = 9$$

**Recordar:**
$\overline{xy} = 10x + y$

| | |
|---|---|
| Para : | 1 8 |
| Para : | 2 7 |
| ⋮ | 3 4 |
| ⋮ | ⋮ ⋮ |
| Para : | 7 2 |
| Para : | 8 1 |

Entonces para $a = 8$ y $b = 1$ la medida del ángulo es el mayor

$$m\angle = \overline{ab}^{\circ}$$

$$m\angle = 81^{\circ}$$

Convirtiendo al sistema radial se obtiene:

$$\therefore \quad 81^{\circ} <> \frac{9\pi}{20}\text{rad}$$

**PROBLEMA 16** Determine el menor valor entero de "n" si se cumple:

$$n^{g} = 3' + 6' + 9' + 12' + 15' + ....$$

**Resolución:**

$$n^{g} = 3' + 6' + 9' + 12' + 15' + ....$$

Factorizando (3') : $n^{g} = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ....)\, 3'$

Sea "m" nº de términos

$$n^{g} = \frac{m(m+1)}{2} \times 3'\left(\frac{1^{\circ}}{60'}\right)\left(\frac{10^{g}}{9^{\circ}}\right)$$

Simplificando : $n^{g} = \frac{m(m+1)}{2} \times \frac{1^{g}}{18}$

$$n = \frac{m(m+1)}{36}$$

**A todo el público en general:**

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

**Este libro no debe ser prostituito monetariamente**, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

**28 de agosto del 2020**

team CALAPENSHKO



Luego para que "n" tome el menor valor entero m (m + 1) tendría que ser el menor múltiplo de 36

$$\begin{array}{lll} m \times (m+1) & & \\ 1 \times 2 & = 2 & \\ 2 \times 3 & = 6 & \\ 3 \times 4 & = 12 & \\ \vdots \quad & \vdots \quad & \vdots \\ 8 \times 9 & = 72 & \Rightarrow \quad m = 8 \end{array}$$

Finalmente : $n = \dfrac{8 \times 9}{36}$

$\therefore \quad \mathbf{n = 2}$

**PROBLEMA 17** Siendo x e y números enteros, determine el mínimo valor de x + y, sabiendo que:

$$\frac{x^g y^m}{y^m} - \frac{x^\circ y'}{y'} = \frac{3^\circ}{2^g}$$

**Resolución:** Condición: x e y son números enteros

**Recordar:**
$a^\circ b' c'' = a^\circ + b' + c''$

Desdoblando: $\dfrac{x^g y^m}{y^m} - \dfrac{x^\circ y'}{y'} = \dfrac{3^\circ}{2^g}$

$$\frac{x^g}{y^m} + \frac{y^m}{y^m} - \left(\frac{x^\circ}{y'} + \frac{y'}{y'}\right) = \frac{3^\circ}{2^g} \times \frac{10^g}{9^\circ}$$

$$\frac{x^g}{y^m} \cdot \frac{100^m}{1^g} + 1 - \left(\frac{x^\circ}{y'} \cdot \frac{60'}{1^\circ} + 1\right) = \frac{5}{3}$$

$$100\frac{x}{y} + 1 - 60\frac{x}{y} - 1 = \frac{5}{3}$$

Reduciendo: $40\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{24}$

Como: x e y son enteros y lo menor posible

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 24 \end{cases}$$

$\therefore \quad \mathbf{(x + y)_{Min.} = 25}$

team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 18** Las letras S, C y R denotan la medida de un mismo ángulo en los sistemas sexagesimal, centesimal y radial, respectivamente.

Dadas las siguientes proposiciones:

I. Existe un ángulo no nulo tal que: $S + R = C$

II. Existe un ángulo no nulo tal que: $S = CR$

III. Existe un ángulo tal que $S > C$.

Son correctas: **ADMISIÓN UNI 2016-I**

**Resolución:** Se cumple: $S = 180k,\ C=200k,\ R=\pi k;\ k \in \mathbb{Z}$

I. $S+R=C \Rightarrow \pi k = 20k \rightarrow k = 0$

$\therefore$ ángulo nulo (Falso)

II. $180k = 200k.\pi k \Rightarrow k = 0 \rightarrow k = \dfrac{9}{10\pi}$

$\therefore$ ángulo nulo o no nulo (Verdadero)

III. $S > C \Rightarrow 9k > 10k \rightarrow k < 0$

$\therefore$ ángulo negativo (Verdadero)

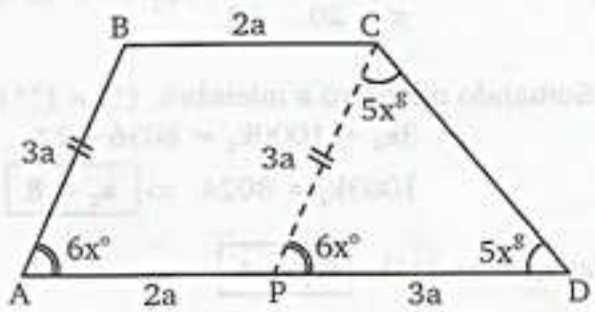
**PROBLEMA 19** Se tiene un trapecio ABCD tal que AD // BC; si $m\angle A = 6x^\circ$ y $m\angle D = 5x^g$. Determine el valor de "x" sabiendo además que:

$$\frac{AB}{3} = \frac{BC}{2} = \frac{AD}{5}$$

**Resolución:** Graficando el trapecio ABCD tal que: AD // BC

Además: $m\angle A = 6x^\circ \wedge m\angle D = 5x^g$

$$\frac{AB}{3} = \frac{BC}{2} = \frac{AD}{5} = a \Rightarrow \begin{cases} AB = 3a \\ BC = 2a \\ AD = 5a \end{cases}$$



Trazamos: $CP \,//\, AB \Rightarrow m\angle A = m\angle P$

Por lo tanto se obtiene un triángulo isósceles donde $PC = PD$, entonces la medida del $\angle PCD = 5x^g$

Luego, en el $\Delta PCD$: $6x° + 10x^g = 180° \Rightarrow 6x° + 10x.\frac{9°}{10^g} = 180°$

$$6x° + 9x° = 180° \Rightarrow 15x° = 180°$$

$$\therefore \; \mathbf{x = 12}$$

**PROBLEMA 20** Se tiene dos ángulos cuya suma de números de grados sexagesimales de uno de ellos con el número de minutos centesimales del otro es 8036 y la diferencia entre $5/\pi$ veces el número de radianes del segundo y 1/12 del número de grados sexagesimales del primero es igual a – 1. Luego el mayor ángulo mide:

**Resolución:** Dados los dos ángulos:

**Recordar:**

| | Sexagesimal | Centesimal | Radial |
|---|---|---|---|
| m∠ | $S°$ | $C^g$ | Rrad |
| # de grados | S | C | R |
| # de minutos | 60S | 100C | |
| #de segundos | 3600S | 10000C | |

Del enunciado: se plantea

$$S_1 + 100C_2 = 8036 \;\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{5}{\pi}R_2 - \frac{1}{12}S_1 = -1 \;\ldots\ldots\ldots (2)$$

De (1): $9k_1 + 100 \times 10k_2 = 8036 \Rightarrow 9k_1 + 1000k_2 = 8036$ .....(*)

De (2): $\frac{5}{\pi} \cdot \frac{\pi k_2}{20} - \frac{1}{12} \cdot 9k_1 = -1 \Rightarrow 3k_2 - 9k_1 = -12$ .....(**)

Luego: Sumando miembro a miembro; (*) ∧ (**)

$$3k_2 + 1000k_2 = 8036 - 12$$

$$1003k_2 = 8024 \Rightarrow \boxed{k_2 = 8}$$

Reemplazando en (**): $\boxed{k_1 = 4}$.

team CALAPENSHKO


Finalmente: $R_1 = \frac{\pi k_1}{20} \Rightarrow R_1 = \frac{\pi}{5}$

$R_2 = \frac{\pi k_2}{20} \Rightarrow R_2 = \frac{2\pi}{5}$

$\therefore$ **El mayor ángulo es $\frac{2\pi}{5}$ rad**

**PROBLEMA 21** Si: $n$ y $m \in \mathbb{R}^+$ y

$$\frac{(n+m)^2}{mn} = \frac{C+S-152}{19}$$

S: Número de grado sexagesimales de $\theta$
C: Número de grados centesimales de $\theta$
Determine el menor valor posible de la medida de $\theta$ expresado en radianes.

**Resolución:** Condición: $m$ y $n \in \mathbb{R}^+$

Además: $\frac{(n+m)^2}{mn} = \frac{C+S-152}{19}$

Sabemos: $S = 9k \ ; \ C = 10k$ y $R = \frac{\pi k}{20}$

Desarrollando: $\frac{n^2+2nm+m^2}{mn} = \frac{10k+9k-152}{19}$

$$\frac{n^2}{mn} + \frac{2mn}{mn} + \frac{m^2}{mn} = \frac{19k-152}{19}$$

$$\frac{n}{m} + 2 + \frac{m}{n} = k - 8$$

$$\frac{n}{m} + \frac{m}{n} = k - 10 \ \ldots\ldots (*)$$

**Teorema:** Si: $a > 0$

$$a + \frac{1}{a} \geq 2$$

Como: $m$ y $n$ son positivos

$$\frac{n}{m} + \frac{m}{n} \geq 2 \ \ldots\ldots (**)$$

Reemplazando: (*) en (**)

$$k - 10 \geq 2$$

$$k \geq 12 \Rightarrow k_{Min.} = 12$$

Luego lo pedido:

$\theta$: Mínimo expresado en radianes.

Ósea: $R_{(mínimo)}$ $\quad R = \dfrac{\pi k}{20} \quad \Rightarrow \quad R_{Mín.} = \dfrac{\pi . k_{Mín.}}{20}$

Reemplazando: $\quad R_{Mín.} = \dfrac{\pi(12)}{20}$

$$\therefore \ R_{Mín.} = \frac{3\pi}{5}$$

**PROBLEMA 22** Sabiendo que:

$$\alpha^\circ = 1' + 2' + 3' + .....$$

Transformar $(\alpha^\alpha)^\circ$ a radianes, cuando $\alpha$ toma su mínimo valor entero.

**Resolución:**

**Recordar:**

Para "n" términos:

$$1+2+3+4+....+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Entonces: $\quad \alpha^\circ = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]'$

Pasando los minutos a grados sexagesimales:

$$\alpha^\circ = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]' \times \frac{1^\circ}{60'} \ \Rightarrow \ \alpha = \frac{n(n+1)}{120}$$

Para que "$\alpha$" sea lo menor posible y entero,entonces "n (n + 1)" tiene que ser múltiplo de 120 entonces n = 15.

Luego: $\quad \alpha = \dfrac{15(16)}{120} \Rightarrow \alpha = 2$

Piden : $\quad \theta = (\alpha^\alpha)^\circ \ \Rightarrow \ \theta = 4^\circ$

Pasando a rad: $\quad \theta = 4^{\not\circ}\left(\dfrac{\pi rad}{180^{\not\circ}}\right)$

$$\therefore \ \theta = \frac{\pi}{45} rad$$

team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 23** Sean S, C y R las medidas en grados sexagesimales, centesimales y radianes de un mismo ángulo, respectivamente.

Se cumple: $\left(\frac{S}{3}-\frac{C}{5}\right)^2-\frac{20R}{\pi}>0$

Calcule el menor valor posible (en radianes) para dicho ángulo positivo, sabiendo que S y C son números enteros. **ADMISIÓN UNI 2017 - II**

**Resolución:**

$$\left(\frac{S}{3}-\frac{C}{5}\right)^2-\frac{20R}{\pi}>0;\ S>0\ \wedge\ C>0$$

$$\left(\frac{9k}{3}-\frac{10k}{5}\right)^2-\frac{20}{\pi}\left(\frac{\pi k}{20}\right)>0;\ k>0$$

$$k^2-k>0 \rightarrow k(k-1)>0$$

$$k<0\ \vee\ k>1$$

Nos piden el menor valor entero positivo.

$$\rightarrow k=2$$

Reemplazando: $R=\frac{\pi}{20}k=\frac{\pi}{20}(2)$

$$\therefore\ R=\frac{\pi}{10}$$

**PROBLEMA 24** Determine el menor valor de un ángulo en radianes, que verifica:

$$3S-2C=\frac{a^2+b^2+5ab}{ab};\quad ab>0$$

**Resolución:**

**Sabemos:** $S=\frac{180R}{\pi}$ ; $C=\frac{200R}{\pi}$

Del dato; reemplazando y dividiendo parcialmente:

$$3\left(\frac{180R}{\pi}\right)-2\left(\frac{200R}{\pi}\right)=\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{ab}+\frac{5ab}{ab}$$

Simplificando: $\frac{140R}{\pi}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+5$ .....(*)

**Recordar:**

Por número reales

Si: $a \wedge b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$

Entonces para que: $R_{Mín.} \Rightarrow \underbrace{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}_{} = 2$

Reemplazando en (*): $\frac{140R}{\pi} = 2+5$

$$\therefore \ R = \frac{\pi}{20}$$

**PROBLEMA 25** Determine el valor de "n" en:

$$\frac{1'}{2}+\frac{1'}{6}+\frac{1'}{12}+\frac{1'}{20}+.....+\frac{1'}{n(n+1)} = \frac{\pi rad}{11340}$$

**Resolución:** Observa:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1'}{2} = 1' - \frac{1'}{2} \\ \frac{1'}{6} = \frac{1'}{2} - \frac{1'}{3} \\ \frac{1'}{12} = \frac{1'}{3} - \frac{1'}{4} \\ \frac{1'}{20} = \frac{1'}{4} - \frac{1'}{5} \\ \\ \frac{1'}{n(n+1)} = \frac{1'}{n} - \frac{1'}{n+1} \end{array}\right\} (+)$$

Sumando m.a.m.: $\frac{\pi rad}{11340} = 1' - \frac{1'}{n+1}$

$$\frac{\pi rad}{11340} = \frac{n'}{n+1}$$

Pasando los minutos a rad:

$$\frac{\pi \text{ rad}}{11340} = \left(\frac{n}{n+1}\right)' \left(\frac{1°}{60'}\right)\left(\frac{\pi \text{ rad}}{180°}\right)$$

Cancelando y simplificando:

$$\frac{1}{11340} = \left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{1}{10800}\right)$$

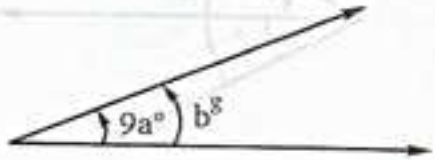
$$\frac{n}{n+1} = \frac{20}{21}$$

$$\therefore \ n = 20$$

team CALAPENSHKO


# PROBLEMAS PROPUESTOS

**1.** Del gráfico, calcule $\frac{b}{a}$



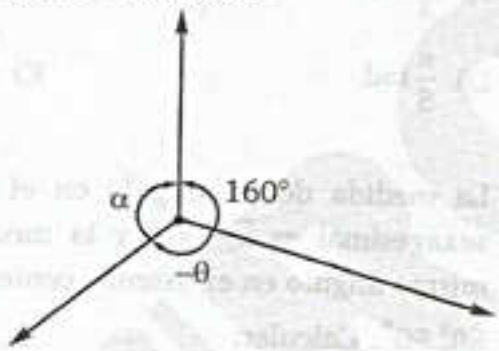

A) 1 B) 1/10 C) 2
D) 10 E) 20

**2.** Calcule:

$$\frac{2°30'}{50'}+\frac{3^g50^m}{70^m}$$

A) 2 B) 8 C) 4
D) 5 E) 6

**3.** Del gráfico mostrado




Indique verdadero (V) o (F) a cada proposición:

I. $\alpha$ es negativo y $\theta$ es positivo.
II. $\theta-\alpha$ es 200°
III. $\alpha$ es mayor que $\theta$

A) VVV B) VVF C) VFF
D) FFV E) FFF

**4.** Siendo S y C los conocidos para un mismo ángulo, halle su número de radianes si se sabe:

$$C°-S^g=19°$$

A) $\frac{7\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{R}$
D) $\frac{\pi}{2}$ E) $\frac{\pi}{6}$

**5.** De la siguiente igualdad

$$2{,}79°\langle\rangle\ a^gb^m$$

Calcule: a + b

A) 9 B) 12 C) 10
D) 13 E) 11

**6.** Si para un ángulo se cumple que el número de grados sexagesimales mas 3 es al número de grados centesimales como 3 es a 2.
Halle dicho ángulo en el sistema centesimal.

A) $20^g$ B) $1^g$ C) $10^g$
D) $5^g$ E) $4^g$

**7** Sabiendo que:

$\phi = 2° + 4° + 6° + 8° + ... + 20°$

$$\theta=\left(\frac{10}{9}\right)^g+\left(\frac{20}{9}\right)^g+\left(\frac{30}{9}\right)^g+...+\left(\frac{200}{9}\right)^g$$

Calcule $(\phi - \theta)$ en el sistema radial

A) $-\frac{\pi}{9}$ rad B) $-\frac{5\pi}{9}$ rad C) $\frac{\pi}{3}$ rad
D) $\frac{\pi}{9}$ rad E) $-\frac{7\pi}{9}$ rad

**8.** Si $23^g < > a°\,b'$, calcule: b − 2a.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

**9.** Simplifique:

$$V=\left(\frac{a°a'}{a^ga^m}\right)\left(\frac{a^g}{a°}\right)$$

A) 61/101 B) 21/50 C) 50/27
D) 305/303 E) 1

**10.** Calcule: b − a − c, a partir de:

$x°y'z'' + a°b'c'' = (x+5)°(y-15)'(z-25)''$

A) 1 B) 3 C) 5
D) 7 E) 9

**11.** Si: $5x^m <> 3y^1$

Calcule:

$$\frac{x+y}{x-y}$$

A) 13 B) 17 C) 15
D) 19 E) 11

**12.** Si "L" representa las 300ava parte de un radian y "Z" la 250ava parte de 1°, determine a cuánto es igual:

$$P = \frac{\pi L + 10Z}{\pi L - 70Z}$$

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 2
D) $\frac{1}{4}$ E) 4

**13.** El suplemento de un ángulo θ es 134,874°, si dicho ángulo θ es representado en el sistema centesimal como $A^8B^m$.

Determine: A + B

A) 58 B) 64 C) 78
D) 49 E) 82

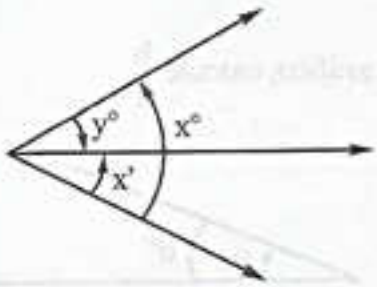
**14.** Se define $\langle M \rangle = (M + \pi)(M - \pi)$, siendo S, C, y R lo convencional para un mismo ángulo que cumple:

$$\langle C \rangle - \langle S \rangle = 1\,900\,\frac{R}{\pi}$$

Determine la medida de dicho ángulo.

A) $\frac{\pi}{2}$ rad B) $\frac{\pi}{3}$ rad C) $\frac{\pi}{4}$ rad
D) $\frac{\pi}{5}$ rad E) $\frac{\pi}{6}$ rad

**15.** Del gráfico, calcular el valor de (x / y)




A) $-\frac{60}{59}$ B) $\frac{6}{59}$ C) $-\frac{54}{59}$
D) $\frac{54}{59}$ E) $-\frac{59}{54}$

**16.** Si un ángulo se puede expresar por $\overline{abb}^\circ <> \overline{ac0}^g$. Calcule su suplemento en el sistema radial.

A) $\frac{\pi}{3}$ rad B) $\frac{2\pi}{7}$ rad C) $\frac{\pi}{6}$ rad
D) $\frac{\pi}{5}$ rad E) $\frac{2\pi}{5}$ rad

**17.** La medida de un ángulo en el sistema sexagesimal es $\overline{xy}^\circ\ \overline{zw}'$ y la medida del mismo ángulo en el sistema centesimal es $50^g\,50^m$. Calcular:

$$\alpha = \frac{x+y}{z+w}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

**18.** Siendo S, C, R los números convencionales para un mismo ángulo, calcule la medida de dicho ángulo en radianes.

$$\frac{S^8}{9} + \frac{C^8}{10} + \frac{20R^8}{\pi} = 4(S^7 + C^7 + R^7)$$

A) $\frac{\pi}{4}$ rad B) $\frac{\pi}{2}$ rad C) $\frac{\pi}{5}$ rad
D) $\frac{3\pi}{4}$ rad E) $\frac{2\pi}{5}$ rad

team CALAPENSHKO



**19.** Calcule el valor de:

$$A = \sqrt{\frac{\pi(35m - n)}{52p}}$$

Sabiendo que:
m = número de minutos centesimales
n = número de segundos sexagesimales
p = número de radianes
Para un mismo ángulo

A) $20\sqrt{10}$ B) $30\sqrt{10}$ C) $10\sqrt{3}$
D) $50\sqrt{2}$ E) $10\sqrt{10}$

**20.** La diferencia de las inversas de los números de grados sexagesimales y centesimales de un ángulo es igual al número de radianes de este ángulo dividido por $2\pi$. Determine el ángulo que cumple dicha condición en radianes.

A) $-\frac{\pi}{20}$ rad B) $-\frac{\pi}{30}$ rad C) $-\frac{\pi}{40}$ rad
D) $-\frac{\pi}{50}$ rad E) $-\frac{\pi}{60}$ rad

**21.** Siendo S, C y R lo conocido para el ángulo trigonométrico que cumple:

$$\left(\frac{C+S}{C-S}\right)^{8} = R^{c}$$

Calcule $R^{10}$

A) 19 B) $19^9$ C) $19^{10}$
D) $19^{-1}$ E) $19^0$

**22.** Se tiene un sistema de medida llamado asterisco donde su unidad es 1*. Al medir los ángulos de un triángulo ABC se obtienen A = 75°; B = $\frac{\pi}{3}$ rad; C = 12*. Entonces, ¿cuánto es la suma de la medida de los ángulos internos de un cuadrilátero?

A) 96* B) 92* C) 88*
D) 86* E) 78*

**23.** Si: $50^{s}25^{m} < > \overline{ab}^{\circ}\,\overline{cd}'\,\overline{ef}''$, calcular:

$$\sqrt{\frac{b-c}{a-d}}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

**24.** El producto de la media aritmética y el cuadrado de la media geométrica de los números que representan la medida de un ángulo en grados centesimales y sexagesimales es igual a quince veces la diferencia de cuadrados de los mismos. Determine la medida de dicho ángulo en radianes.

A) $\frac{\pi}{15}$ rad B) $\frac{\pi}{30}$ rad C) $\frac{\pi}{45}$ rad
D) $\frac{\pi}{60}$ rad E) $\frac{\pi}{90}$ rad

**25.** Determine la medida circular de un ángulo tal que si a la décima parte de su número de segundos sexagesimales le sumamos la mitad de su número de minutos centesimales resulta 18 700.

A) $\frac{\pi}{8}$ rad B) $\frac{\pi}{4}$ rad C) $\frac{\pi}{16}$ rad
D) $\frac{2\pi}{9}$ rad E) $\frac{5\pi}{18}$ rad

**26.** Determine la medida de un ángulo en radianes sabiendo que el doble del número de segundos sexagesimales menos seis veces el número de minutos centesimales de la medida de dicho ángulo es igual 29400.

A) $\frac{\pi}{50}$ rad B) $\frac{\pi}{40}$ rad C) $\frac{\pi}{30}$ rad
D) $\frac{\pi}{20}$ rad E) $\frac{\pi}{10}$ rad

**27.** La diferencia de los números que representa el suplemento en grados sexagesimales con el complemento en grados centesimales de la medida de un mismo ángulo es igual a 85. Determine la medida de este ángulo en radianes.

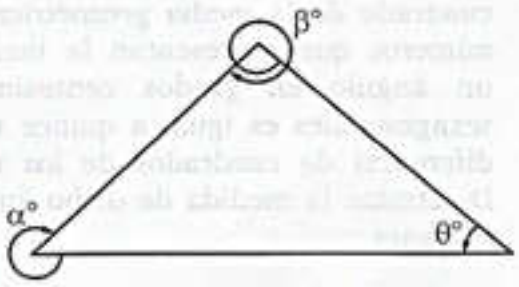
team CALAPENSHKO



A) $\frac{\pi}{2}$ rad B) $\frac{\pi}{3}$ rad C) $\frac{\pi}{4}$ rad

D) $\frac{\pi}{5}$ rad E) $\frac{\pi}{6}$ rad

**28.** Según el gráfico, reconocer la ecuación con respecto a $\alpha$, $\beta$, $\theta$




A) $\alpha - \beta + \theta = 180$
B) $\alpha + \beta - \theta = 180$
C) $\theta - \beta - \alpha = 120$
D) $\alpha + \beta + \theta = 180$
E) $\beta + \theta - \alpha = 360$

**29.** La media aritmética de los números de grados sexagesimales y radianes es igual al número de grados centesimales aumentado en 1. Determine la medida del ángulo en radianes.

A) $\frac{2\pi}{\pi - 220}$ rad B) $\frac{2\pi}{\pi + 220}$ rad

C) $\frac{\pi}{\pi - 220}$ rad

D) $\frac{2\pi}{\pi + 220}$ rad E) $\frac{\pi}{\pi + 220}$ rad

**30.** La unidad $L^x$ de medida de un nuevo ángulo en nuevo sistema es la media aritmética de las unidades de medidas de los sistemas sexagesimales y centesimales, cuántas unidades de este número sistema equivalen una vuelta.

A) $\frac{720^x}{19}$ B) $\frac{7200^x}{19}$ C) $\frac{72^x}{19}$

D) $\frac{180^x}{19}$ E) $\frac{360^x}{19}$

**31.** Dada la siguiente igualdad:

$1°1' + 2°2' + 3°3' + \ldots\ldots + n°n' = x°x'$

Calcular: "x – n", si $50 < x < 60$

A) 30 B) 35 C) 40
D) 45 E) 50

**32.** Determine el menor número entero de grados centesimales que tiene el ángulo:

$\theta = 1^g2^m + 3^g4^m + 5^g6^m + \ldots\ldots$

A) $291^g$ B) $321^g$ C) $491^g$
D) $522^g$ E) $582^g$

**33.** Hallar la medida radial del ángulo que cumple con:

$$\frac{\sqrt[4]{\pi}}{\sqrt{2R+\sqrt{\pi}}} + \sqrt{\frac{2R}{\sqrt{\pi}}+1} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

siendo "R" lo convencional.

A) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ B) $\sqrt{\frac{\pi}{3}}$ C) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

D) $\frac{\sqrt{\pi}}{3}$ E) $\sqrt{\frac{\pi}{5}}$

**34.** Si la medida de un ángulo "$\alpha$" esta dada por C° S' y de la de un ángulo "$\theta$" por $C^g$ $S^m$. Además la diferencia del número de grados sexagesimales de "$\alpha$" y el número de grados centesimales de "$\theta$" es 0,12. Determine el número de radianes de "$\beta$". Siendo:

$$\beta = (C+S)^g (C-S)^m$$

A) $0{,}0190\pi$ rad B) $0{,}190\pi$ rad
C) $1{,}902\pi$ rad
D) $1{,}9011\pi$ rad E) $0{,}001901\pi$ rad

**35.** Resolver:

$$\begin{cases} xS = x^x - 3x & \ldots\ldots(1) \\ C = x^{x^{-1}} + 1 & \ldots\ldots(2) \end{cases}$$

Donde: S, C y R son los números convencionales, para la medida de un ángulo, dar como respuesta el valor de R.

A) $\pi/10$ B) $\pi/5$ C) $\pi/4$
D) $\pi/3$ E) $\pi/2$

team CALAPENSHKO



**36.** Se tiene dos ángulos tales que el quíntuplo del número de grados sexagesimales del segundo disminuido en 9 veces el número de grados centesimales del primero es 1080, además 50 veces el número de minutos sexagesimales del primero disminuido ene e número de minutos centesimales del segundo es 1000. Determine la medida del menor ángulo expresado en el sistema sexagesimal.

A) 3° B) 7° C) 8°
D) 9° E) 12°

**37.** Determine el valor de: cos(10R)
Siendo S, C y R número para un ángulo de giro horario que verifica

$$\frac{1}{C(C+4)}+\frac{1}{(C+4)(C+8)}+\frac{1}{(C+8)(C+12)}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{(C+2S-4)(C+2S)}=\frac{S}{35}$$

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2\sqrt{2}}}{2}$
D) $\frac{\sqrt{3-\sqrt{3}}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

**38.** Sabiendo que:

$$-\frac{\pi}{20}+19=\sqrt{4(C^2+S^2+R^2)-(C+S+R)^2-(C+R-S)^2-(S+R-C)^2}$$

Calcule: $A=\frac{2CR}{S\pi}$

Siendo: S, C y R los convencionales para un mismo ángulo negativo.

A) –1/3 B) –1/6 C) –1/9
D) $-\frac{1}{12}$ E) $-\frac{1}{15}$

**39.** Los números S y C que expresan las medidas de un ángulos en los sistemas sexagesimales y centesimal respectivamente, verificar la igualdad.

$$x^2(C-S)=x^4-x^2+1$$

Determinar en radianes la mínima medida de dicho ángulo.

A) $\frac{\pi}{20}$rad B) $\frac{\pi}{10}$rad C) $\frac{3\pi}{10}$rad
D) $\frac{3\pi}{20}$rad E) $\frac{3\pi}{40}$rad

**40.** En un triángulo ABC; se cumple que:

$$A+C=85x^g+\frac{5^g}{x}-1°$$
$$A-C=\frac{5^g}{x}+1°-75x^g$$

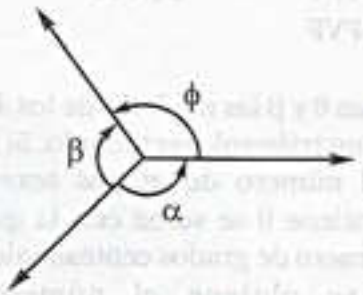
Determine la medida circular del ángulo "B" si el ángulo "A" toma su menor valor posible ($x\in\mathbb{R}^-$)

A) $\frac{2\pi}{9}$rad B) $\frac{44\pi}{9}$rad C) $\frac{5\pi}{9}$rad
D) $\frac{2\pi}{3}$rad E) $\frac{7\pi}{5}$rad

**41.** Dados los ángulos trigonométricos:

$$\alpha=(x-x^2)\text{rad}$$
$$\beta=\left(\frac{x}{2}-2\right)\text{rad}$$

De acuerdo al gráfico, determine el valor de $\phi$ en radianes, cuando $\alpha$ tome su máximo valor.




A) $2\pi-1$ B) $2\pi-2$ C) $2\pi-3$
D) $2\pi-\frac{5}{2}$ E) $2\pi-\frac{1}{2}$

**42.** Se ha medido un ángulo en los sistemas sexagesimal, centesimal y radial resultando tres números que cumplen la siguiente relación: Si al producto del cuadrado de menor número con el intermedio le agregamos el mayor número esto nos resulta 7/3 del producto del número menor con intermedio. Determine la medida del menor ángulo en el sistema circular, si este se genera en sentido antihorario.

A) $\frac{2}{5}$rad B) $\frac{1}{3}$rad C) 3 rad
D) $\frac{2}{3}$rad E) $\frac{3}{2}$rad

team CALAPENSHKO



**43.** Determine la medida de un ángulo en radianes, que cumple:

$$\frac{x}{\pi y}=\left(\frac{z}{\pi}\right)^2$$

donde x, y, z son los números de segundo centesimales, milésimas de radián y radianes respectivamente.

A) $\pm 5\sqrt{5}$ rad B) $\pm 10\sqrt{5}$ rad
C) $\pm 15\sqrt{5}$ rad
D) $\pm 20\sqrt{5}$ rad E) $\pm 25\sqrt{5}$ rad

**44.** Si: $18^\circ a' <> x^g y^m$
Siendo "a" número entero positivo y los ángulos están correctamente escritos señale verdadero (V) o falso (F):
( ) $a > x$
( ) $a < y$
( ) $x_{max} = 22$

A) VFV B) VVF C) FFF
D) FVF E) FVV

**45.** Sean θ y β las medidas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo. Si la tercera parte del número de grados sexagesimales que contiene θ se suma con la quinta parte del número de grados centesimales que contiene β se obtiene el número de grados sexagesimales que contiene β. Hallar la medida del mayor ángulo en radianes.

A) $\frac{3\pi}{20}$ rad B) $\frac{\pi}{4}$ rad C) $\frac{7\pi}{20}$ rad
D) $\frac{\pi}{5}$ rad E) $\frac{2\pi}{5}$ rad

**46.** Si se cumple la relación:

$$CR^{(SC-CR)} - SR^{(SC-CR)} = R^{\left(\frac{C-R}{\frac{1}{S}}\right)} \cdot R^{\left(\frac{S-C}{\frac{1}{R}}\right)}$$

donde S es el número de grados sexagesimales, C es el número de grados centesimales y R es el número de radianes. Determine el valor del ángulo en grados sexagesimales.

A) 9° B) 10° C) 11°
D) 12° E) 13°

**47.** Si definimos $\overline{ab}_{(m)} = am + b$, siendo S y C los números convencionales. Además: $\overline{xy}_{(S)} = \overline{yx}_{(C)}$. Calcular x/y en términos de R. Su número de radianes.

A) $\frac{250R-\pi}{180R-\pi}$ B) $\frac{200R-\pi}{180R-\pi}$ C) $\frac{200R+\pi}{180R+\pi}$
D) $\frac{200R+\pi}{180R-\pi}$ E) $\frac{200R-\pi}{180R+\pi}$

**48.** Se inventa un nuevo sistema de medidas en el que la unida de medida "u" es la 760 ava parte del ángulo de una vuelta, además hay 2 submúltiplos (n; i) tales que 80 de ellos forman la unidad inmediata superior.

Transformar $66^g 77^m 88^s$ al nuevo sistema.

A) $126^u 70^n 30^i$ B) $125^u 70^n 31^i$
C) $126^u 70^n 32^i$
D) $125^u 70^n 32^i$ E) $126^u 71^n 31^i$

**49.** Dada la equivalencia:

$$A^\circ 30' 36'' <> (A+5)^g 1^m B^s$$

Determine A si: $B = 11,\underbrace{111...1}_{\text{n cifras}}$

A) $39,\underbrace{999...999}_{(n+1)\text{ cifras}}$ B) $39,\underbrace{999...999}_{(n+2)\text{ cifras}}$
C) $39,\underbrace{999...999}_{(n+3)\text{cifras}}$
D) $39,\underbrace{999...999}_{(n+4)\text{ cifras}}$ E) $39,\underbrace{999...999}_{(n+5)\text{ cifras}}$

**50.** Si la diferencia de los números de grados centesimales y sexagesimales que contiene un ángulo es igual a: $\frac{(ax+y)^2+(x-ay)^2}{(x+y)^2-(x-y)^2}$

x, y > 0. Determine el menor valor que toma la medida radial de dicho ángulo.

A) $a^2\frac{\pi}{40}$ B) $(a+1)^2\frac{\pi}{40}$
C) $(a^2+3)\frac{\pi}{40}$
D) $(a+3)^2\frac{\pi}{40}$ E) $(a^2+1)\frac{\pi}{40}$

team CALAPENSHKO

Capítulo 2

# Longitud de Arco

**CAPACIDADES**

- Reconocer y Calcular la longitud de arco de circunferencia.
- Determinar el área de la región de un sector circular.

## TRIGONOMETRÍA: HERRAMIENTA FUNDAMENTAL DE LA ASTRONOMÍA

Hiparco de Nicea 161-127 antes de C. Astrónomo, matemático y geógrafo griego nacido en Nicea y murió probablemente en Alejandría.

Por otra parte, Hiparco es el inventor de la trigonometría, para cuyo objeto consiste en relacionar las medidas angulares con las lineales. Las necesidades de ese tipo de cálculos es muy frecuente en Astronomía.

Hiparco construyó una tabla de cuerdas, que equivalía a una moderna tabla de senos. Con la ayuda de dicha tabla, pudo fácilmente relacionar los lados y los ángulos de todo triángulo plano. Ahora bien, los triángulos dibujados sobre la superficie de la esfera celeste no son planos sino esféricos constituyendo la trigonometría esférica.

HIPARCO DE NICEA

En posesión de instrumentos astronómicos y matemáticos que apenas fueron superados hasta el Renacimiento, Hiparco abordó la explicación de los movimientos aparentemente irregulares de los planetas, así como las irregularidades de los movimientos del Sol y de la Luna. Apolonio de Perga (primera mitad del siglo IV antes de C.) había inventado el epiciclo (circunferencia cuyo centro; se mueve a lo largo de una circunferencia más grande, llamada deferente), con la esperanza de explicar la aparente irregularidad de los vagabundos (planetas). Hiparco agregó los círculos excéntricos, con lo que logró analizar los movimientos aparentes del Sol y de la Luna en términos de movimientos circulares uniformes. Ésta fue la base que permitió a Tolomeo, casi tres siglos más tarde, explicar el movimiento planetario, que resistió las tentativas de explicación de Hiparco. El sistema geocéntrico elaborado por Apolonio de Perga, Hiparco y Tolomeo, y que se fundaba en la consideración de curvas imaginarias en lugar de las órbitas reales, dominó la astronomía hasta que se impuso el sistema heliocéntrico de Copérnico y Kepler, a mediados del siglo XVII.

Hiparco descubrió la precesión de los equinoccios, calculándola en 36" por año, valor muy próximo del real (50"). Mejoró el cálculo de la duración del año y compiló el primer catálogo de estrellas de que se tenga noticia, registrando 850 estrellas. Hiparco fue también un pionero de la geografía matemática creada por Eratóstenes.

team CALAPENSHKO



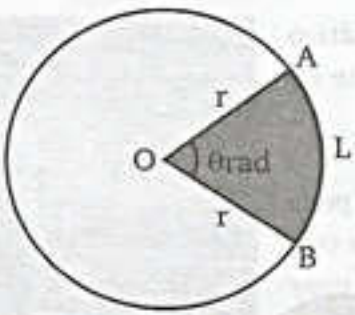
## INTRODUCCIÓN

Este tema es una aplicación del capitulo anterior, la cual consiste en hallar la medida en unidades de longitud de un arco de circunferencia, para la cual se genera una figura llamada sector circular . Hallaremos también el área de dicho sector.

# LONGITUD DE ARCO

## LONGITUD DE ARCO DE CIRCUFERENCIA

En la figura adjunta se muestra el sector circular AOB, el cual tiene la longitud de arco "L", la cual subtiende un ángulo central "θ" rad en una circunferencia de radio "r".




Se cumple:

$$L = \theta r \quad \text{..... (*)}$$

$$0 < \theta \leq 2\pi$$

**Ejemplo:** Hallar la longitud de arco de un sector circular de radio 20m y ángulo central de 72°

**Resolución:** Convertimos 72° a radianes:

$$72° = 72° \times \frac{\pi rad}{180°} = \frac{2\pi}{5} rad$$

Luego: $r = 20$ y $\theta = \frac{2\pi}{5}$

Usando (*) tenemos: $L = \frac{2\pi}{5} \times 20 = 8\pi$

∴ **La longitud de arco es 8π m**

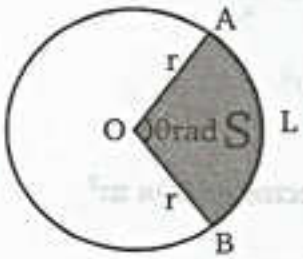
## LONGITUD DE UNA CIRCUNFERENCIA

$$L = 2\pi r$$

team CALAPENSHKO


## ÁREA DE LA REGIÓN DE UN SECTOR CIRCULAR

Siendo "S" el área de la región del sector circular AOB sombreado.




Se cumple:

$$S = \frac{\theta r^2}{2} \quad \text{..... (**)}$$

$$0 < \theta \leq 2\pi$$

Usando (*) en (**) se deduce: $S = \frac{Lr}{2}$ ∧ $S = \frac{L^2}{2\theta}$

### OBSERVACIÓN

El área máxima de un sector circular con perímetro constante k es $\frac{k^2}{16}$; además, el ángulo central que lo permite es 2 rad.

**SOLUCIÓN:** S: área

- $k = L + 2r$ .....(1)
- $S = \frac{Lr}{2}$ .....(2)

(1) en (2) $\quad S = \frac{(k-2r)r}{2} = \frac{kr}{2} - r^2 - \frac{k^2}{16} + \frac{k^2}{16}$

$$\Rightarrow S = \frac{k^2}{16} - \left(\frac{k}{4} - r^2\right) \leq \frac{k^2}{16}$$

Como se desea S máximo.

$$\Rightarrow \left(\frac{k}{4} - r\right)^2 = 0 \Rightarrow k = 4r \quad \text{.....(3)}$$

(1) en (3): $\quad L + 2r = 4r \Rightarrow L = 2r$ .....(4)

En el sector circular se cumple: $\quad L = \theta r$ .....(5)

Comparando (4) y (5): $\quad \theta = 2\,\text{rad}$

$$\therefore S_{máx} = \frac{k^2}{16} \text{ y } \theta = 2\,\text{rad}$$

## ÁREA DE UN CÍRCULO

twitter.com/calapenshko

$$A_{\bigcirc} = \pi r^2$$

**Ejemplo:** Con los datos del ejemplo anterior, hallar el área de la región del sector circular.

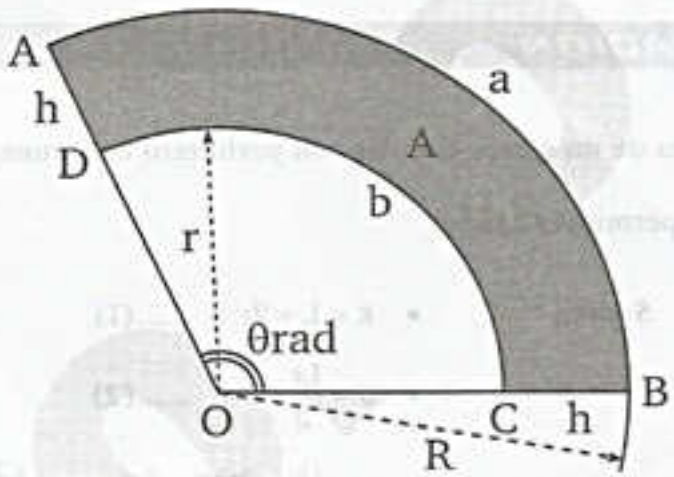
**Resolución:** De los datos: $r = 20 \wedge \theta = \frac{2\pi}{5}$

Usando (**) tenemos: $S = \frac{\frac{2\pi}{5} \times 20^2}{2} = 80\pi$

$\therefore$ **El área de sector es $80\pi$ m²**

## ÁREA DE LA REGIÓN DE UN TRAPECIO CIRCULAR

Siendo "A" el área de la región de un trapecio circular.




Se cumple: I) $A = \frac{1}{2}\theta(R^2 - r^2)$

II) $A = \left(\frac{a+b}{2}\right)h$

Donde: a : Longitud del arco $\overset{\frown}{AB}$
b : Longitud del arco $\overset{\frown}{CD}$
h : La distancia AD ó CB

También: $\theta = \frac{a-b}{h}$

- Ver problema resuelto 8

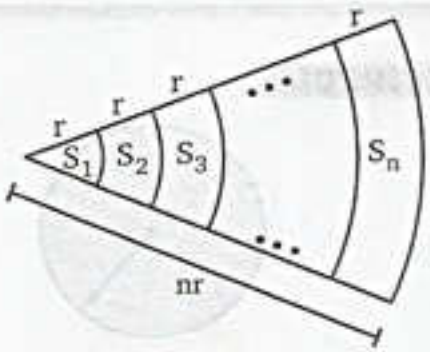
## RELACIÓN DE ÁREAS

### PROPIEDAD

Sea $n \in \mathbb{Z}^+$

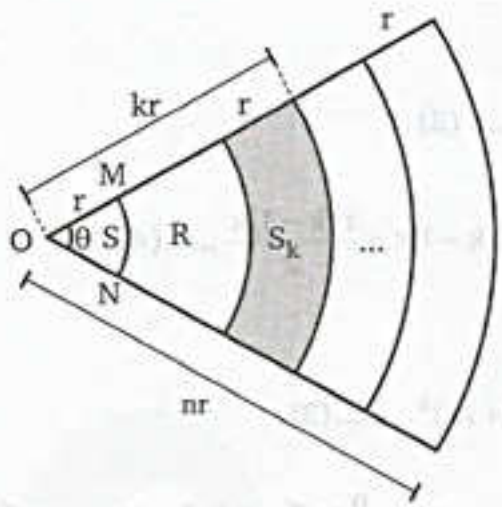
Se cumple:

$$\frac{S_1}{1} = \frac{S_2}{3} = \frac{S_3}{5} = \ldots\ldots = \frac{S_n}{2n-1}$$



team CALAPENSHKO


**DEMOSTRACIÓN**




- $S = \frac{\theta r^2}{2}$ ..... (1)
- $S + R = \frac{\theta(kr - r)^2}{2}$ ..... (2)
- $S + R + S_k = \frac{\theta(kr)^2}{2}$ ..... (3)

$(3) - (2): \; S_k = \frac{\theta}{2}(2kr^2 - r^2)$

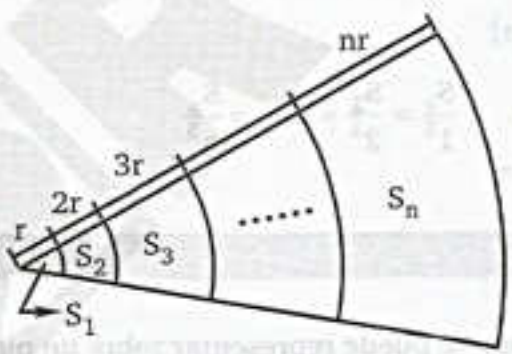
$$S_k = \frac{\theta}{2} r^2 (2k - 1) \quad \text{..... (4)}$$

$(4) \div (1): \qquad S_k = (2k - 1)S$

$$\Rightarrow \frac{S_k}{2k-1} = S = \text{Área del sector circular MON el cual es constante. } \forall k \in \mathbb{Z}^+ \in [1, n]$$

$$\therefore \frac{S_1}{1} = \frac{S_2}{3} = \frac{S_3}{5} = \ldots\ldots = \frac{S_n}{2n-1}$$

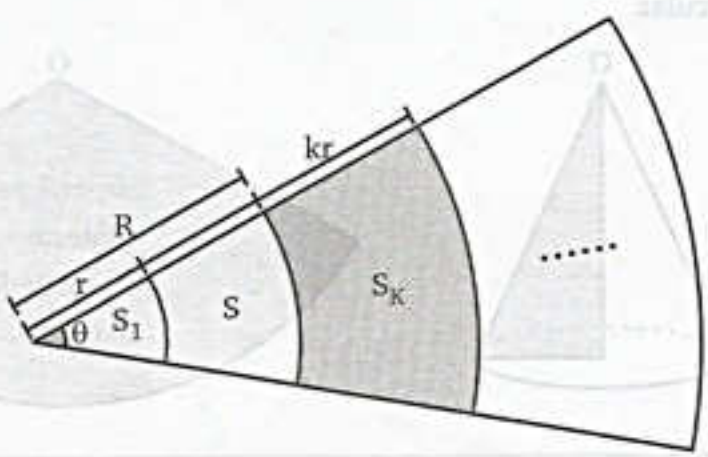
**PROPIEDAD** Sea: $n \in \mathbb{Z}^+$




Se cumple:

$$\frac{S_1}{1^3} = \frac{S_2}{2^3} = \frac{S_3}{3^3} = \ldots\ldots = \frac{S_n}{n^3}$$

**DEMOSTRACIÓN**



- $S_1 = \dfrac{\theta r^2}{2}$ ..... (1)

- $S_1 + S = \dfrac{\theta R^2}{2}$ ..... (2)

$$R = r + 2r + ..... + (k-1)r = \frac{r(k-1)k}{2} .....(4)$$

- $S_1 + S + S_k = \dfrac{\theta}{2}(R + kr)^2$ .....(3)

(3) – (2): $S_k = \dfrac{\theta}{2}(R^2 + k^2 r^2 + 2krR - R^2)$

$$S_k = \frac{\theta}{2} kr(kr + 2R) .....(5)$$

(4) en (5): $S_k = \dfrac{\theta}{2} kr(kr + r(k-1)k)$

$$S_k = \frac{\theta}{2} r^2 k^3 .....(6)$$

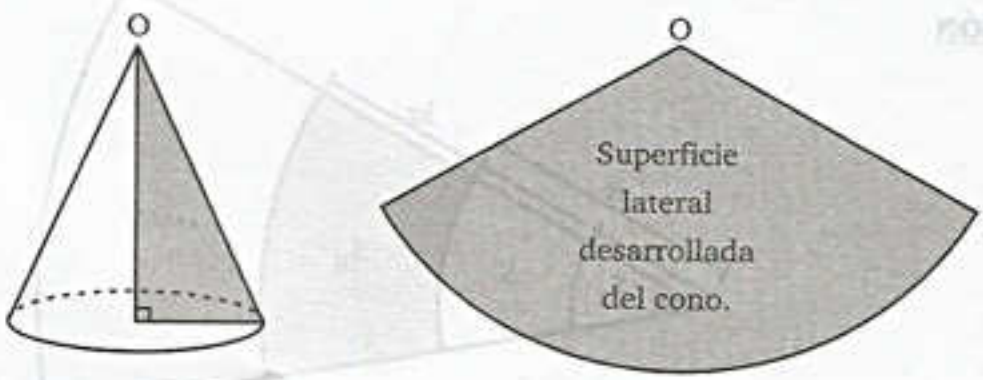
(6) ÷ (1): $\dfrac{S_k}{S_1} = k^3 \Rightarrow \dfrac{S_k}{k^3} = \dfrac{S_1}{1}$

Como $k \in Z^+ \wedge k \in [1; n]$

$$\therefore \frac{S_1}{1^3} = \frac{S_2}{2^3} = ..... = \frac{S_n}{n^3}$$

## OBSERVACIONES

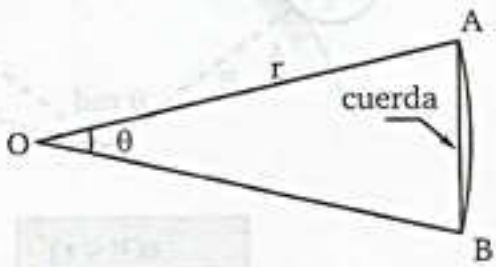
I. La superficie desarrollada por el cono se puede representar sobre un plano mediante un sector circular.



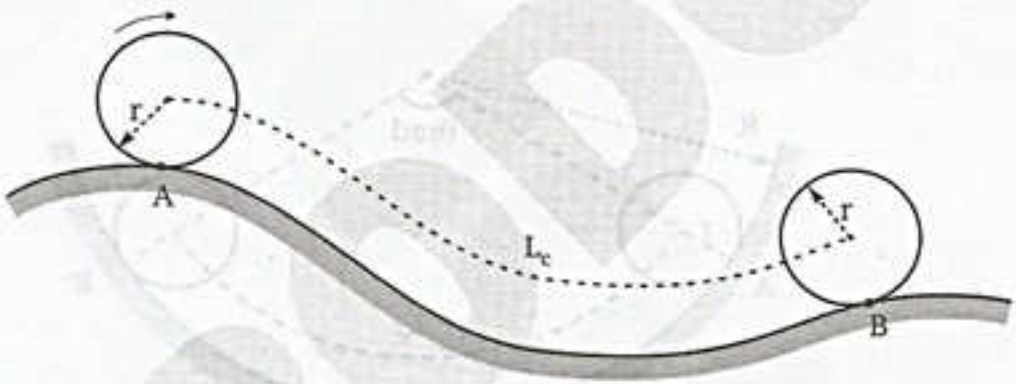
team CALAPENSHKO


II. Si el ángulo central es relativamente pequeño, se puede tomar la longitud del arco como un valor aproximado de la longitud de la cuerda correspondiente.

Así en el sector circular AOB tenemos: $\ell = AB$




## CÁLCULO DEL NÚMERO DE VUELTAS



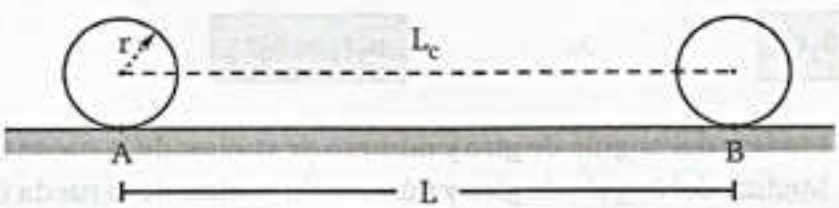

$$n = \frac{L_c}{2\pi r}$$

Donde:

n: Número de vueltas que da la rueda al desplazarse desde A hacia B.
$L_c$: Longitud recorrida por el centro de la rueda.
r : radio de la rueda.

## CASOS PARTICULARES

**a) En una superficie Lineal:**

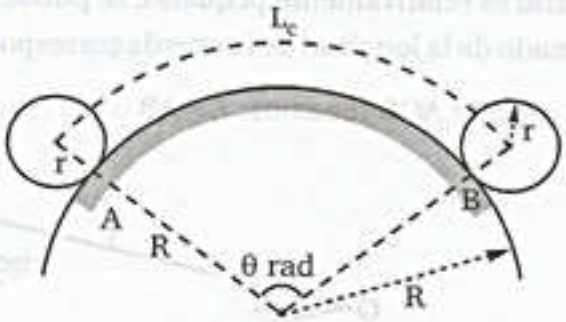



$$n = \frac{L}{2\pi r}$$

team CALAPENSHKO


**b) En una superficie Curva:**

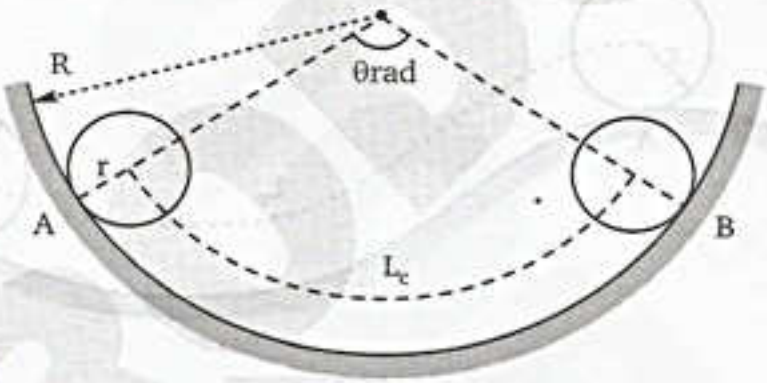
**(i)**




$$n = \frac{\theta(R + r)}{2\pi r}$$

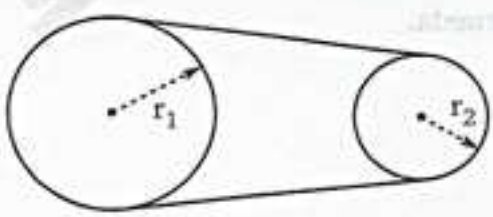
- Ver problemas resueltos 13, 14 y 15

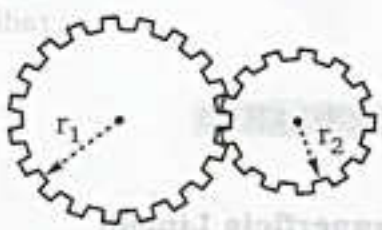
**(ii)**




$$n = \frac{\theta(R - r)}{2\pi r}$$

## POLEAS UNIDAS POR UNA FAJA Y ENGRANAJES EN CONTACTO



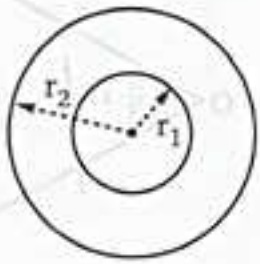

$$\theta_1 r_1 = \theta_2 r_2 \quad \wedge \quad n_1 r_1 = n_2 r_2$$

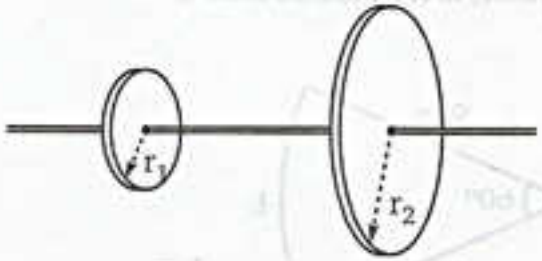
Donde: $\theta_1$ y $n_1$ : Medida del ángulo de giro y número de vueltas de la rueda ($r_1$)
$\theta_2$ y $n_2$ : Medida del ángulo de giro y número de vueltas de la rueda ($r_2$)

team CALAPENSHKO



## POLEAS UNIDAS POR SUS CENTROS



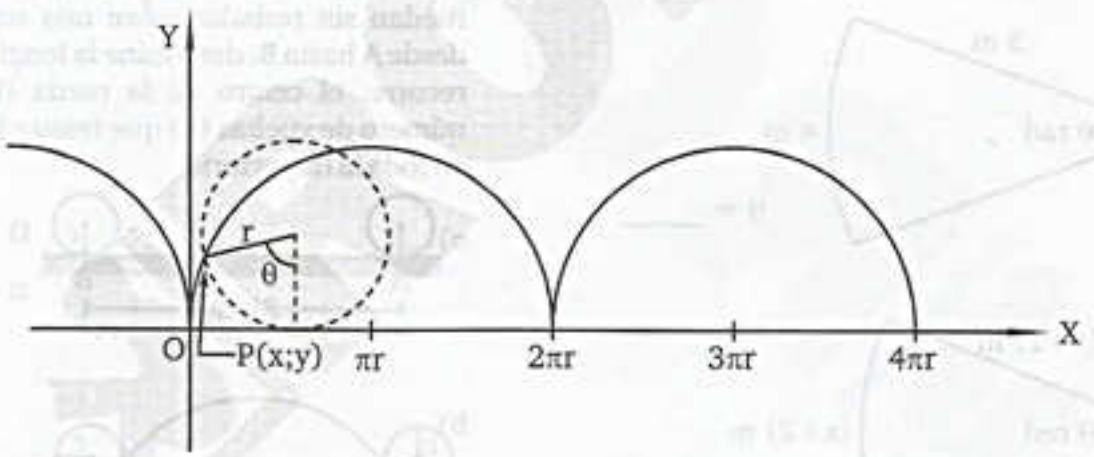




$\theta_1 = \theta_2$ ∧ $n_1 = n_2$

Donde:
- $\theta_1$ y $n_1$ : Medida del ángulo de giro y número de vueltas de la rueda ($r_1$)
- $\theta_2$ y $n_2$ : Medida del ángulo de giro y número de vueltas de la rueda ($r_2$)

## LA CICLOIDE

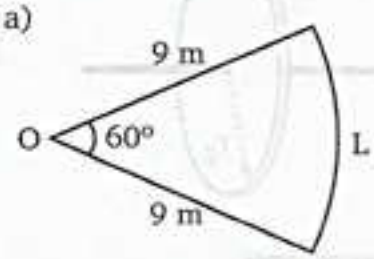
La cicloide es la curva generada por el movimiento de un punto dado en una circunferencia cuando ésta gira sin deslizarse sobre el eje x.



## EJERCICIOS DE APLICACIÓN

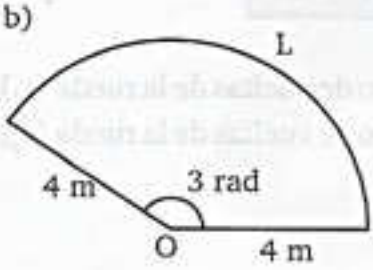
**1.** Determine la longitud de arco "L"

a)




L = ____

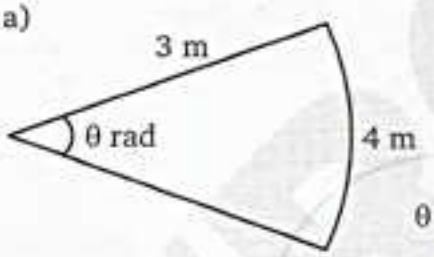
b)




L = ____

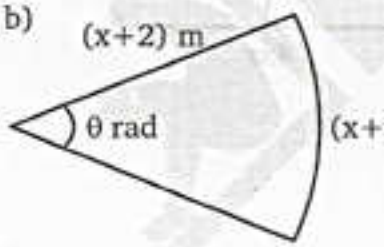
**2.** Calcule el número de radianes de un ángulo central "θ"

a)




θ = ____

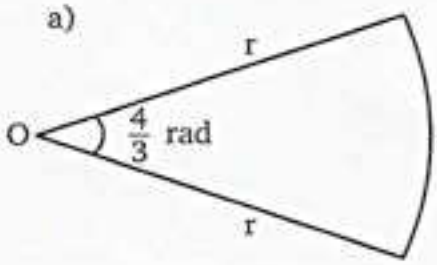
b)




θ = ____

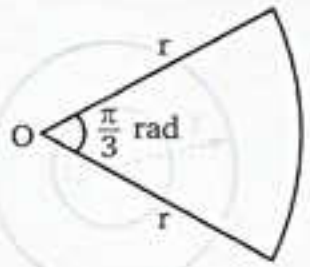
**3.** Determine la longitud del radio

a)



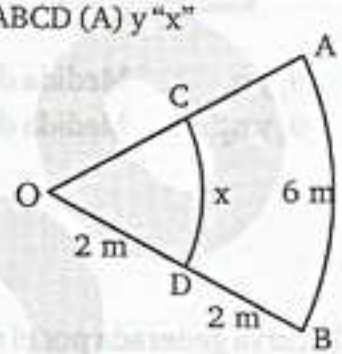

r = ____

b)




r = ____

**4.** En el siguiente sector circular, determine el área de la región del sector circular AOB (S), el área del trapecio circular ABCD (A) y "x"



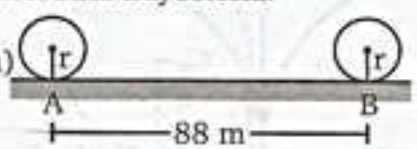

S = ____

A = ____

x = ____

**5.** En las figuras, las ruedas de radio r = 4 cm, ruedan sin resbalar sobre una superficie desde A hasta B, determine la longitud que recorre: el centro de la rueda (D) y el número de vueltas (n) que realiza la rueda en toda la trayectoria.

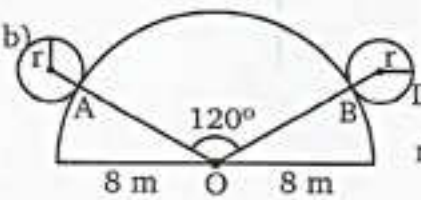
a)




D = ____

n = ____

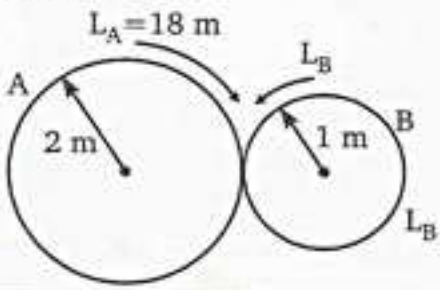
b)




D = ____

n = ____

**6.** Determine la longitud de arco recorrido por el disco "B"




L_B = ____

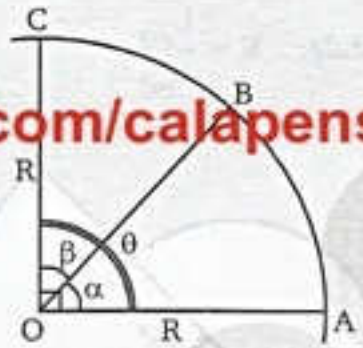
team CALAPENSHKO



## PROBLEMAS RESUELTOS

**PROBLEMA 1** Dos ángulos en el centro de un círculo son complementarios y las longitudes de los arcos que subtienden suman $4\pi$ m. Determine la longitud del radio del círculo.

**Resolución:** Interpretando el enunciado, tenemos:




twitter.com/calapenshko

$\alpha$ y $\beta$ son complementarios $\Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ rad

Además: $L_{\overset{\frown}{AB}} + L_{\overset{\frown}{BC}} = 4\pi$

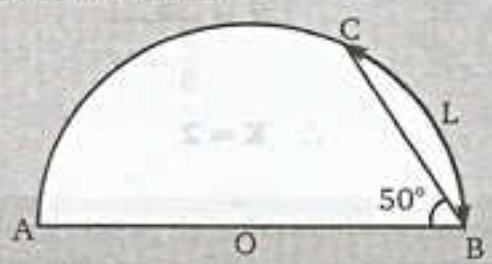
Luego para el sector AOC: $\theta = \frac{\pi}{2} \wedge L = 4\pi$

Aplicando: $L = \theta R \quad \Rightarrow 4\pi = \frac{\pi}{2}.R \quad \Rightarrow R = 8$

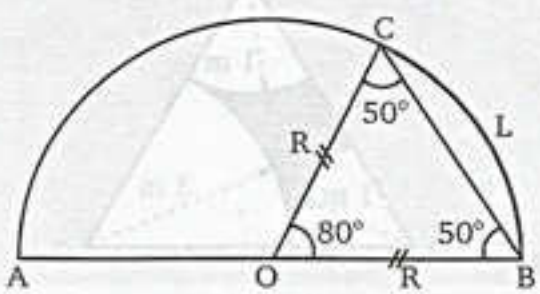
$\therefore$ **El radio medio 8 m**

**PROBLEMA 2** Determine la longitud del radio de la semicircunferencia mostrada, si: $L = 8\pi$ m

O: Centro de la semicircunferencia.




**Resolución:**



$$80° = \frac{4}{9}\pi \text{rad}$$

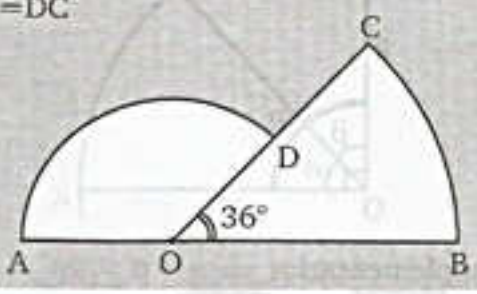
En el sector BOC: $\theta = \frac{4\pi}{9} \wedge L = 8\pi$

Aplicando: $L = \theta R \Rightarrow 8\pi = 4\frac{\pi}{9}.R \Rightarrow R = 18$

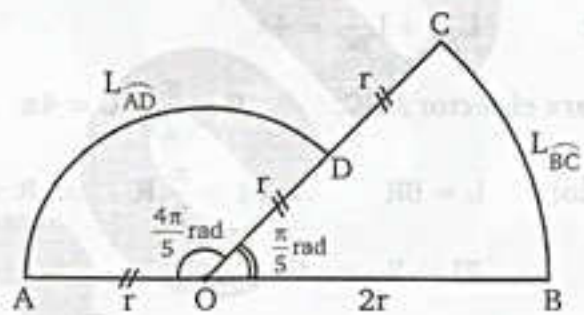
$\therefore$ **El radio es 18 m**

**PROBLEMA 3** De la figura, calcule: $K = \frac{L_{\widehat{AD}}}{L_{\widehat{BC}}}$

Si: AO = OD = DC




**Resolución:**



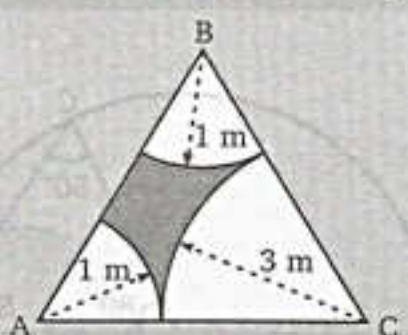

$$36° = \frac{\pi}{5}\text{rad}$$

Aplicando: $L = \theta R$ en K:

$$K = \frac{4\frac{\pi}{5}.r}{\frac{\pi}{5}.2r}$$

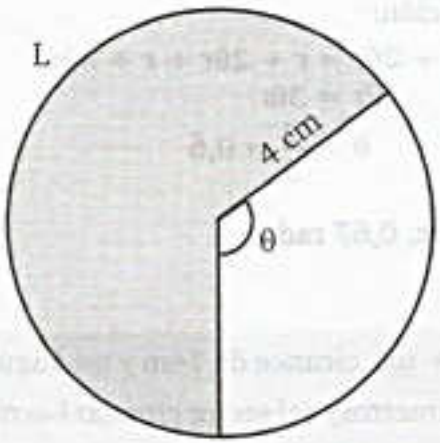
$\therefore$ **K = 2**

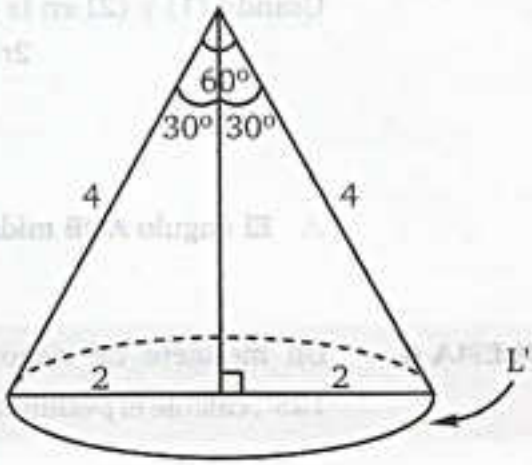
**PROBLEMA 4** Del gráfico, determine el perímetro de la región sombreada, si A, B y C son centros además ABC es un triangulo equilátero.



team CALAPENSHKO


**Resolución:**



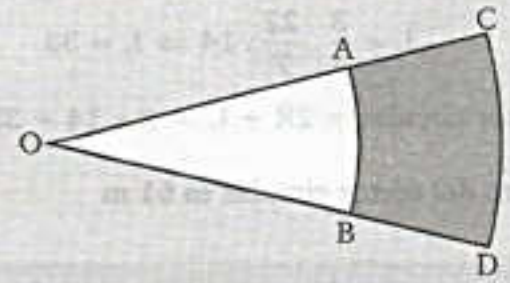




Se sabe que: $L = L'$

$4(2\pi - \theta) = 2\pi\ (2)$

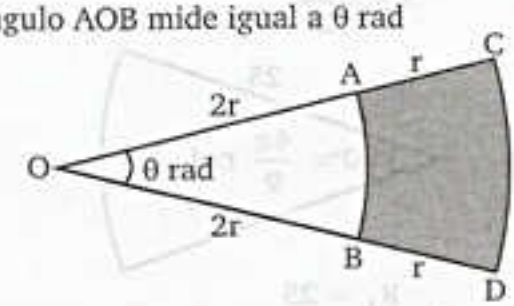
$\theta = \pi \ <> 180^o$

**PROBLEMA 5** De la figura mostrada, si el perímetro del sector circular AOB mide igual al perímetro del trapecio circular ACDB. Calcule aproximadamente la medida del ángulo AOB. Considere: OA = 2AC




**Resolución:** Del dato, si: $AC = r \Rightarrow OA = 2r$

Sea el ángulo AOB mide igual a θ rad




Condición: Perímetro Sector AOB = Perímetro trapecio circular ACDB

Aplicando L = θR: Sector AOB: $L_{\widehat{AB}} = \theta \cdot 2r$ .....(1)

Sector COD: $L_{\widehat{CD}} = \theta \cdot 3r$ .....(2)

team CALAPENSHKO

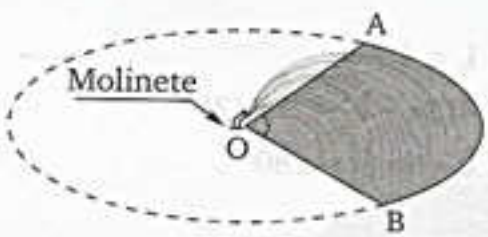

Usando (1) y (2) en la condición:

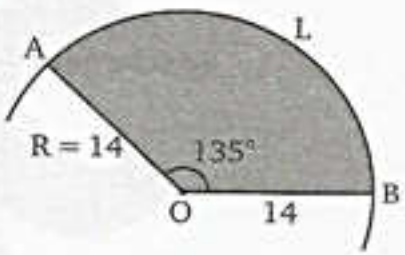
$$2r + 2r + 2\theta r = r + 2\theta r + r + 3\theta r$$
$$2r = 3\theta r$$
$$\theta = \frac{2}{3} = 0,\overline{6}$$

∴ **El ángulo AOB mide aprox. 0,67 rad.**

**PROBLEMA 6** Un molinete de riego tiene un alcance de 14m y un ángulo de giro que mide 135°, calcule el perímetro (en metros) del sector circular barrido por el moliente.

**Resolución:**




$$135° = 3\frac{\pi}{4}\text{ rad}$$

Aplicando: $L = \theta R = 3\frac{\pi}{4}.14$ ..... $\left(\text{Usando: } \pi = \frac{22}{7}\right)$

$$L = \frac{3}{4}.\frac{22}{7}.14 \Rightarrow L = 33$$

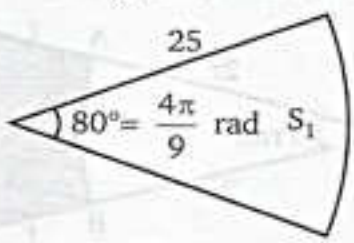
Perímetro sector circular $= 2R + L = 2 \times 14 + 33 = 61$

∴ **El perímetro del sector circular es 61 m**

**PROBLEMA 7** Un sector circular cuyo radio mide 25 m y al valor del ángulo central de 80°; se le disminuye el radio en 5 m. ¿Cuál será el nuevo valor del ángulo central si el área del sector circular no varia ?

**Resolución:** Aplicaremos: $S = \frac{\theta R^2}{2}$

**Inicialmente:**

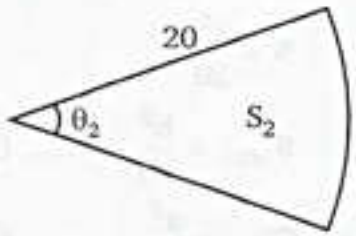



Datos: $R_1 = 25$

$$\theta_1 = 4\frac{\pi}{9}$$

$$\Rightarrow S_1 = \frac{\left(4\frac{\pi}{9}\right)(25)^2}{2} \quad \text{..... (1)}$$

Finalmente:




Datos: $R_2 = 20$

$$\Rightarrow S_2 = \frac{\theta_2(20)^2}{2} \quad \ldots\ldots (2)$$

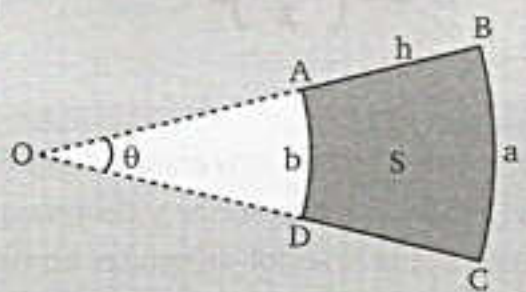
Luego $S_1 = S_2$ ,usando (1) y (2) tenemos:

$$\frac{\left(\frac{4\pi}{9}\right)(25)^2}{2} = \frac{\theta_2(20)^2}{2} \Rightarrow \theta_2 = \frac{25\pi}{36}$$

$\therefore$ **El nuevo valor del ángulo central será: $\frac{25\pi}{36}$ rad = 125°**

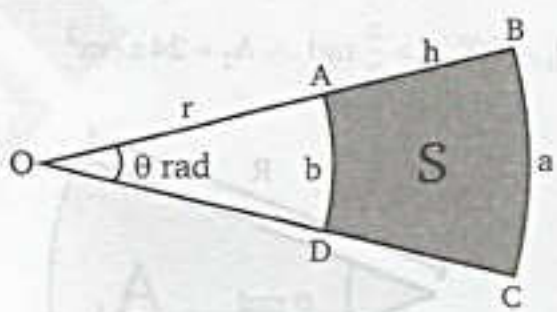
**PROBLEMA 8** Considerando al trapecio circular ABCD.

$S \rightarrow$ área




Calcule los valores de " $\theta$ " y " S " en términos de a ,b y h

**Resolución:**




- Sea: $OA = r$
- Aplicando: $L = \theta R$

  Sector AOD: $b = \theta r$ ..... (1)

  Sector BOC: $a = \theta(r + h)$ ..... (2)

  (2) – (1): $a - b = \theta h$

$$\therefore \boxed{\theta = \frac{a-b}{h}} \quad \ldots\ldots (*)$$

- Aplicando: $S = \frac{L^2}{2\theta}$

Sector AOD: $S_{AOD} = \frac{b^2}{2\theta}$ ..... (3)

Sector BOC: $S_{BOC} = \frac{a^2}{2\theta}$ ..... (4)

(4) – (3): $\underbrace{S_{BOC} - S_{AOD}}_{S} = \frac{a^2}{2\theta} - \frac{b^2}{2\theta}$

$$S = \frac{a^2 - b^2}{2\theta}$$

$$S = \frac{(a + b)(a - b)}{2\theta}$$

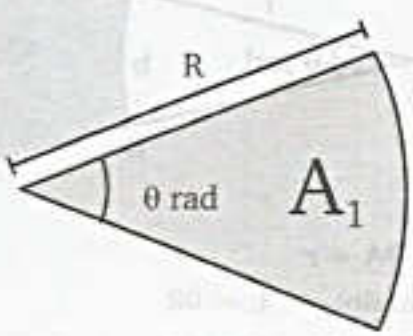
Usando (*): $S = \frac{(a + b)(a - b)}{2\left(\frac{a - b}{h}\right)}$

$$\therefore \ S = \left(\frac{a + b}{2}\right)h$$

**PROBLEMA 9** El área de un sector circular cuyo ángulo central mide 60° es de $24\pi$ cm$^2$. Si triplicamos el radio de dicho sector y disminuimos $\beta$ radianes a su ángulo central, el área del nuevo sector disminuye un cuarto del anterior. ¿Cuál es el valor, en radianes, de $\beta$?

**ADMISIÓN UNI 2016-II**

**Resolución:** i) $R_1 = R \ \ \theta_1 = 60° <> \frac{\pi}{3}$ rad $\wedge$ $A_1 = 24\pi$ cm$^2$




$$24\pi = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} R^2$$

$$\Rightarrow \ R = 12\text{cm}$$

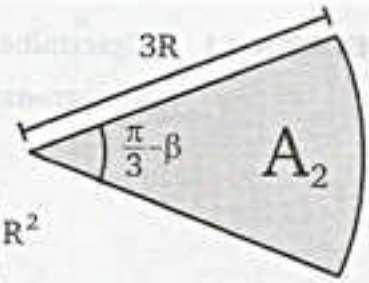
team CALAPENSHKO



ii) $R_2 = 3R$

$$A_2 = \frac{1}{2}\theta_2 R_2^{\,2}$$

$$A_2 = \frac{3}{4}A_1$$

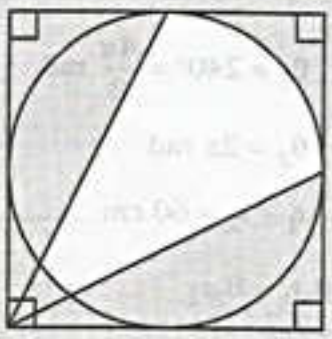



Dato: $\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\beta\right)(3R)^2 = \frac{1}{2}-\frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{3}\right)R^2$

$$\therefore\ \beta = \frac{11\pi}{36}$$

**PROBLEMA 10** En la figura mostrada "r" mide 3 cm. Determine el valor aproximado del área sombreada en $cm^2$.

**ADMISIÓN UNI 2017 - II**



**Resolución:**

Del gráfico: $\frac{37°}{2} + \alpha = \frac{53°}{2}$

$\rightarrow \alpha = 8°$

$S = S_{\triangle COD} + 2S_{\triangle ODB} + S_{\square AOB}$

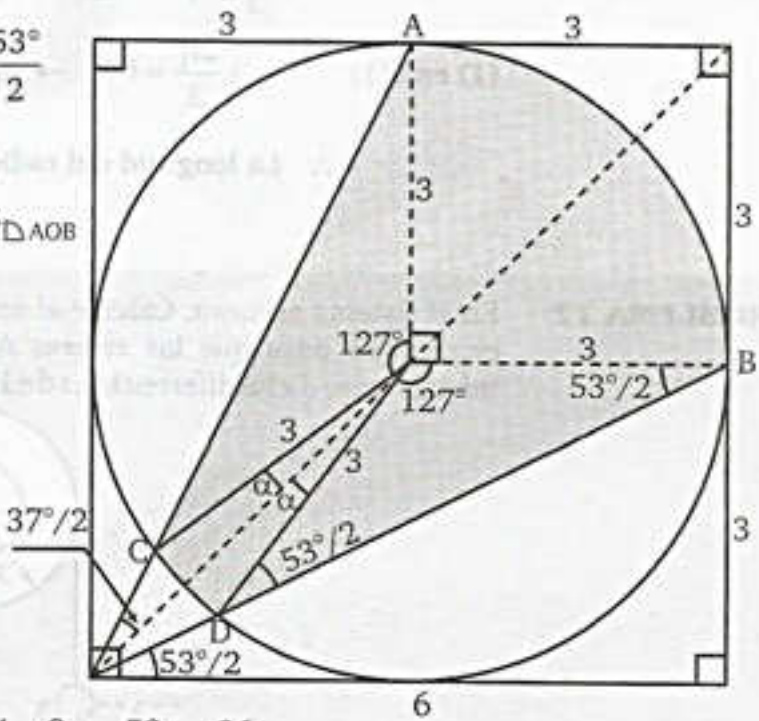
S: Área de la región sombreada.

Donde:

$S_{\triangle COD} = \frac{16\pi}{180}\frac{(3)^2}{2}$;

$S_{\triangle ODB} = \frac{3.3}{2}\operatorname{sen}127°$ y

$S_{\square AOB} = \frac{\pi.3^2}{4}$

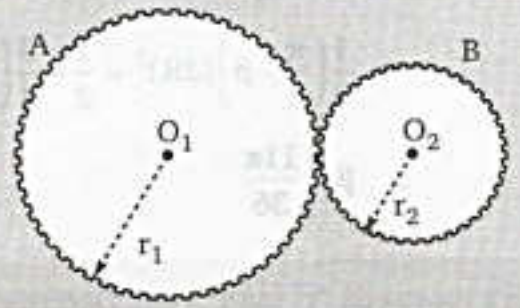



Luego: $S = \frac{2\pi}{5} + 2.\frac{9}{2}.\frac{4}{5} + \frac{9\pi}{4} = \frac{53\pi}{20} + \frac{36}{5}$

Considerando: $\pi = 3{,}14$.

$$\therefore\ S = 15{,}52 \text{ (aproximadamente).}$$

**PROBLEMA 11** Determine la longitud del radio del engranaje A si cuando este gira 240° entonces el engranaje B gira $2\pi$ rad; además $O_1O_2 = 60$ m.




**Resolución:** De los datos tenemos:

$$\begin{cases} \theta_1 = 240° = \dfrac{4\pi}{3} \text{ rad} \\ \theta_2 = 2\pi \text{ rad} \\ r_1 + r_2 = 60 \text{ cm} \quad \text{.....(*)} \end{cases}$$

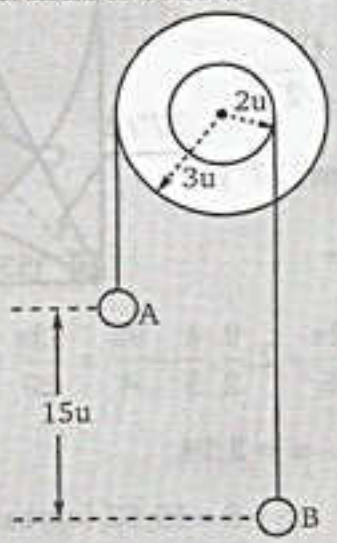
Usando : $\theta_1 r_1 = \theta_2 r_2$

Tenemos : $\dfrac{4\pi}{3} \cdot r_1 = 2\pi r_2 \rightarrow r_2 = \dfrac{2r_1}{3}$ .....(1)

(1) en (*) : $r_1 + \dfrac{2r_1}{3} = 60 \rightarrow r_1 = 36$

$\therefore$ **La longitud del radio del engranaje A mide 36 cm.**

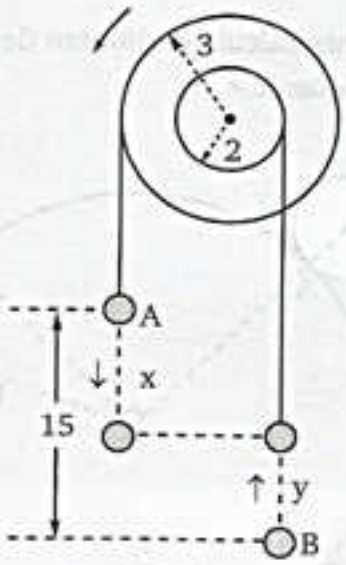
**PROBLEMA 12** En el sistema adjunto. Calcule el ángulo (en radianes) que debemos girar los engranajes para que las esferas A y B se encuentren a la misma altura, si inicialmente dicha diferencia es de 15 u.



team CALAPENSHKO



**Resolución:**




Cuando la esfera A baja una longitud x, la esfera B sube una longitud y, luego:

$$x + y = 15 \quad \text{.....(1)}$$

Los engranajes son concéntricos, entonces giran el mimo ángulo ($\theta$), luego:

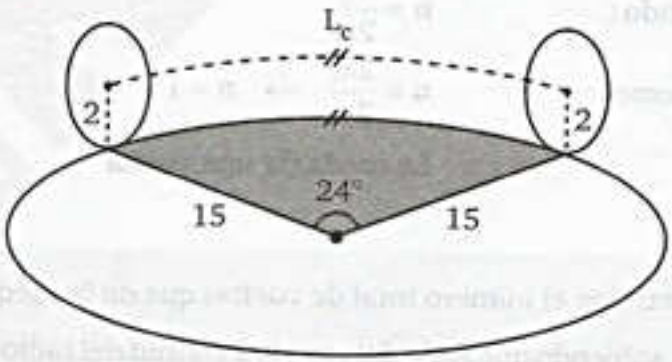
$$x = 3\theta \quad \text{e} \quad y = 2\theta \quad \text{.....(2)}$$

(2) en (1): $3\theta + 2\theta = 15 \rightarrow \theta = 3$

$\therefore$ **Debemos de girar 3 radianes**

**PROBLEMA 13** Una rueda cuyo radio mide 2 m esta sobre una pista circular; la longitud de su radio mide 15 m y describe sobre dicha pista un ángulo central que mide 24° Determine la medida del ángulo que barre la rueda en ese recorrido.

**Resolución:**




Del gráfico: $24° = \frac{2\pi}{15}\text{rad}$

En el sector sombreado: $L = \theta R$

$$L_c = \frac{2\pi}{15} \times 15 \rightarrow L_c = 2\pi$$

Luego para la rueda tenemos $\theta_r$ como el ángulo barrido

$$L_c = \theta_r \times r$$

$$2\pi = \theta_r \times 2 \rightarrow \theta_r = \pi$$

$\therefore$ **El valor del ángulo barrido por la rueda es180°**

**A todo el público en general:**

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

**Este libro no debe ser prostituito monetariamente**, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

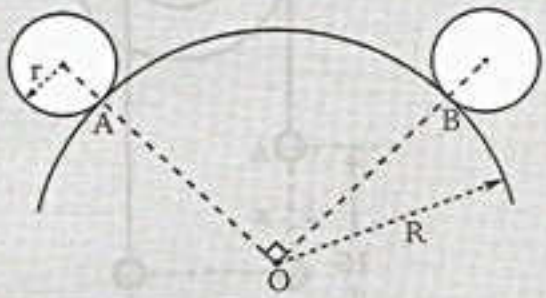
Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

**28 de agosto del 2020**

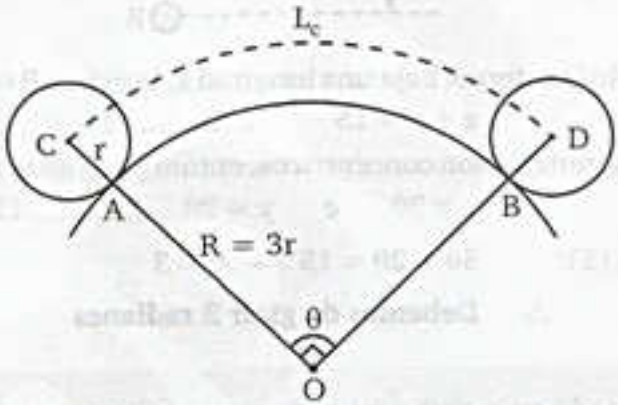
team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 14** De la figura adjunta calcule el número de vueltas que da la rueda al ir desde A hasta B, sabiendo que: $R = 3r$.




**Resolución:**




$OC = 4r\ ;\ \theta = \dfrac{\pi}{2}$

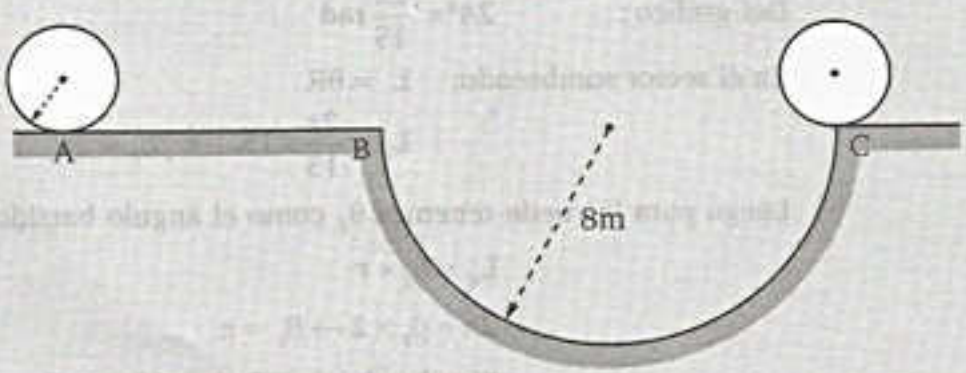
En el sector COD: $L_c = \dfrac{\pi}{2} \times 4r \rightarrow L_c = 2\pi r$

Usando: $n = \dfrac{L_c}{2\pi r}$

Tenemos: $n = \dfrac{2\pi r}{2\pi r} \rightarrow n = 1$

$\therefore$ **La rueda da una vuelta**

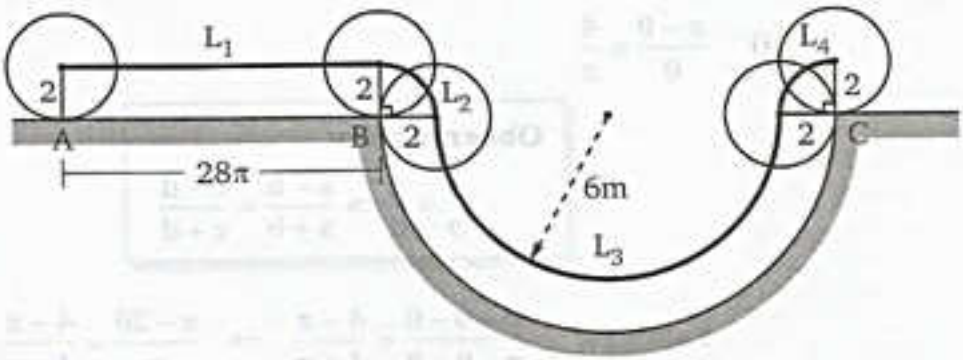
**PROBLEMA 15** Determine el número total de vueltas que da la rueda al recorrer los tramos $\overline{AB}$ y $\widehat{BC}$, sabiendo que $AB = 28\pi$ m y la longitud del radio de la rueda mide 2 m.



team CALAPENSHKO



**Resolución:**




El número de vueltas se calcula sabiendo el recorrido total del centro ($L_c$),es decir: decir:

$$L_c = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$$

Así : $L_1 = 28\pi$ ; $L_2 = \frac{\pi}{2} \times 2 = \pi$

$L_3 = \pi \times 6 = 6\pi$ ; $L_4 = \frac{\pi}{2} \times 2 = \pi$

Reemplazando en: $n = \frac{L_c}{2\pi r} = \frac{28\pi + \pi + 6\pi + \pi}{2\pi(2)} \rightarrow n = 9$

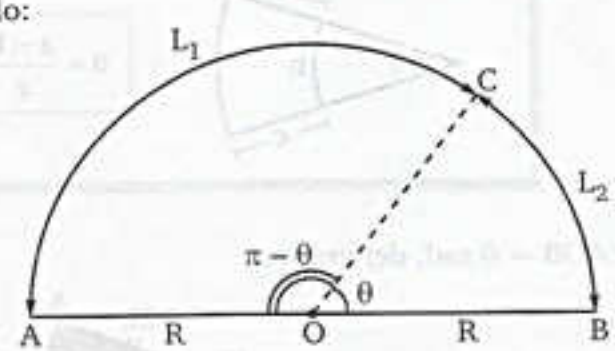
∴ **La rueda dió 9 vueltas**

**PROBLEMA 16** Dos ángulos centrales de una circunferencia cumplen lo siguiente:

1) Son suplementarios
2) La diferencia de los arcos que subtienden es 2 cm.
3) La razón entre la medida de los ángulos es $4/\pi$.

Determine (en cm) la longitud del radio de la circunferencia.

**Resolución:** Graficando:




**Recordar:**
$L = \theta R$

i) $L_1 - L_2 = 2$

Entonces : $(\pi - \theta)R - \theta R = 2 \rightarrow R = \frac{2}{\pi - 2\theta}$ .....(1)

ii) $\dfrac{\pi-\theta}{\theta}=\dfrac{4}{\pi}$

**Observación:**

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d}$$

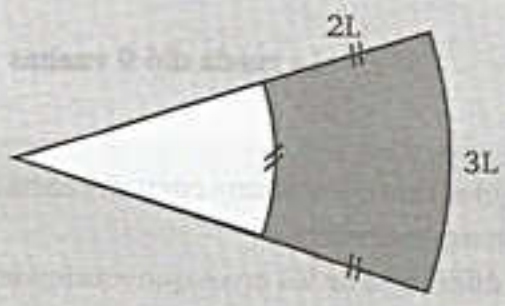
Entonces: $\dfrac{\pi-\theta-\theta}{\pi-\theta+\theta}=\dfrac{4-\pi}{4+\pi}\rightarrow\dfrac{\pi-2\theta}{\pi}=\dfrac{4-\pi}{4+\pi}$

$$\rightarrow\quad \pi-2\theta=\frac{\pi(4-\pi)}{4+\pi}$$

Reemplazando en (1):

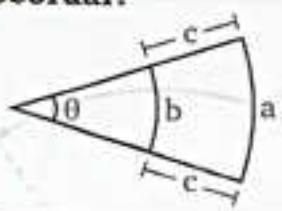
$$\therefore\quad R=\frac{2(4+\pi)}{\pi(4-\pi)}$$

**PROBLEMA 17** Del gráfico, determine el perímetro de la región no sombreada.



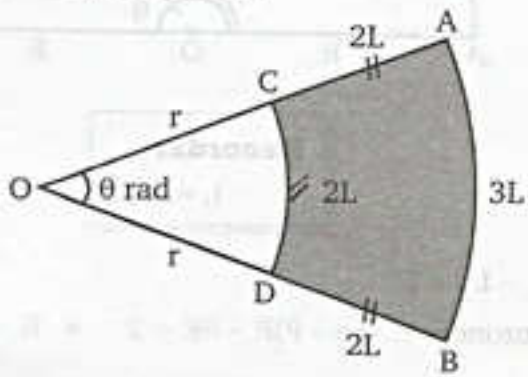

**Resolución:**

**Recordar:**




$$\theta=\frac{a-b}{c}$$

Sea: $\angle AOB = \theta$ rad, del gráfico:



team CALAPENSHKO


Aplicando la propiedad:

$$\theta = \frac{3L - 2L}{2L} \rightarrow \theta = \frac{1}{2} \quad .....(1)$$

Del sector COD: $2L = \theta \cdot r$ .....(2)

(1) en (2): $2L = \frac{1}{2}r \rightarrow r = 4L$

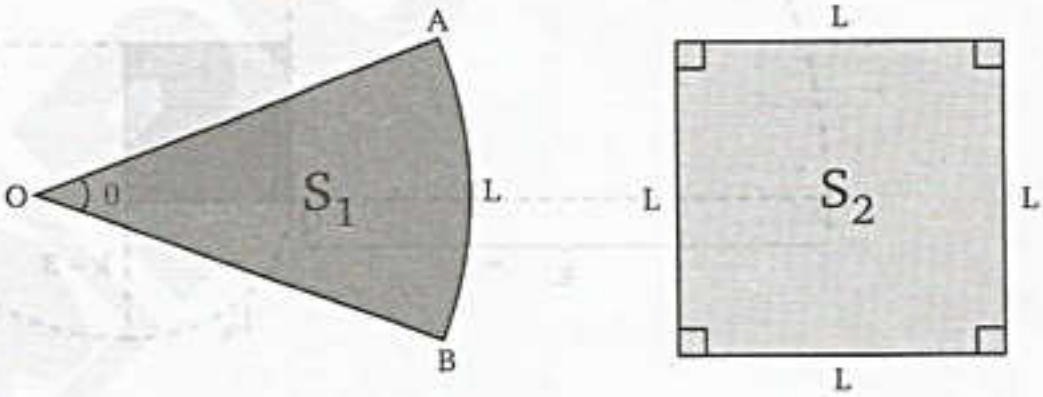
$$\text{Perímetro}_{\text{sectorCOD}} = 2r + 2L = 2(4L) + 2L$$

$$\text{Perímetro}_{\text{sectorCOD}} = 8L + 2L$$

$$\therefore \quad \textbf{Perímetro}_{\textbf{sectorCOD}} = \textbf{10L}$$

**PROBLEMA 18** Se tiene un sector circular cuyo arco mide igual al lado de un cuadrado, cuya área mide igual al del sector indicado. Se pide calcular la medida del ángulo central del sector circular.

**Resolución:** Graficando e indicando los datos del problema.




Se observa que debemos relacionar el arco y el ∠ central; usaremos para el área del sector circular:

$$S = \frac{L^2}{2\theta}$$

Luego, como: $S_1 = S_2$ (condición del problema)

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$\frac{L^2}{2\theta} = L^2 \rightarrow \theta = \frac{1}{2}$$

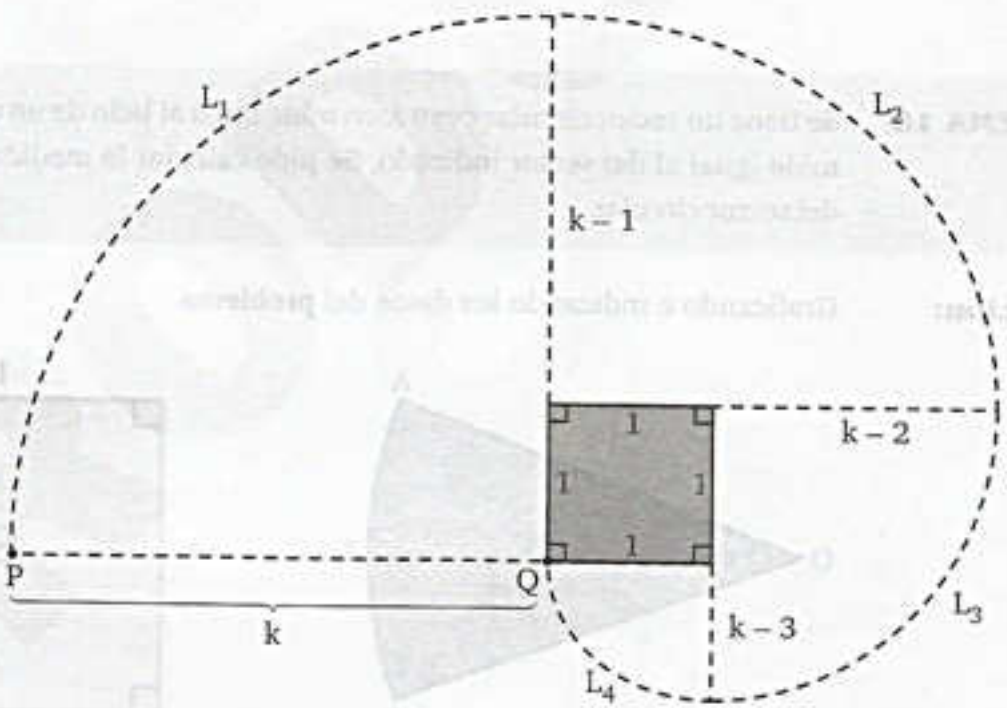
$$\therefore \quad \textbf{θ = 0,5 rad}$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 19** Si se gira P en el sentido indicado hasta envolver toda la cuerda en el cuadrado, cuyo lado mide 1 cm, determine la longitud que recorre el extremo P.

Dato: PQ = k cm

**Resolución:** Formando sectores circulares cuyos ángulos centrales son de $90° \diamond \frac{\pi}{2}$ rad




Aplicando la fórmula $\boxed{L = \theta \cdot R}$ en cada caso:

$$L_1 = \frac{\pi}{2}(k)\ ;\ L_2 = \frac{\pi}{2}(k-1)\ ;\ L_3 = \frac{\pi}{2}(k-2)\ ;\ L_4 = \frac{\pi}{2}(k-3)$$

Nos piden: $L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = \frac{\pi}{2}(4k-6)$

Pero se observa en el último tramo:

$$k - 3 = 1 \rightarrow k = 4$$

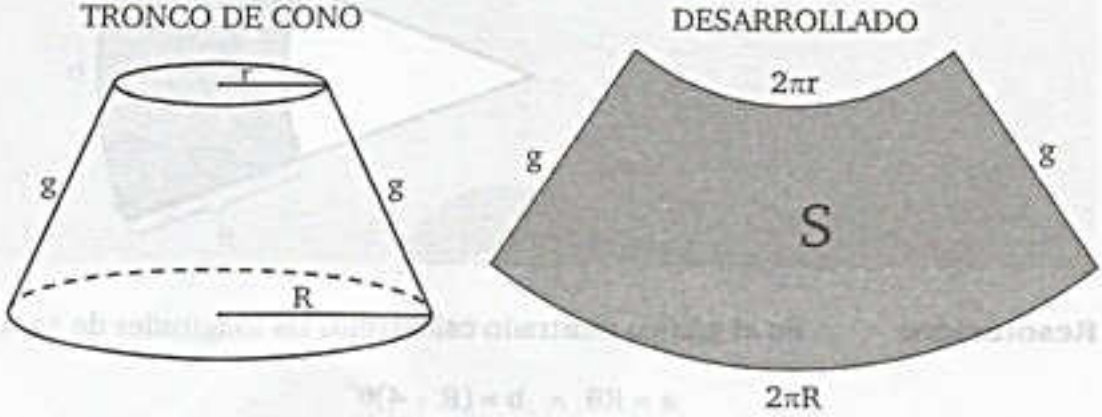
$$\therefore\ L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 5\pi$$

team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 20** Si en un tronco de cono circular recto; las longitudes de los radios de sus bases y su generatriz suman 8 cm. ¿Cuál es el máximo valor del área lateral de la región del tronco del cono?

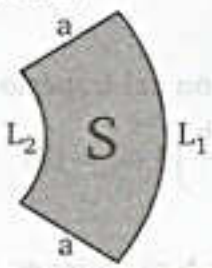
**Resolución:** Graficando




Dato: $R + r + g = 8\ cm \rightarrow R + r = 8 - g$ .....(1)

**Recordar:**

El área de la región de un trapecio circular se calcula:




$$S = \frac{(L_1 + L_2)a}{2}$$

Aplicando la fórmula:

$$S = \left(\frac{2\pi R + 2\pi r}{2}\right)g \rightarrow S = \pi(R + r)g \quad \text{.....(2)}$$

(1) en (2): $S = \pi(8 - g)g = -\pi\left[g^2 - 8g\right]$

Completando cuadrados:

$$S = -\pi\left[g^2 - 8g + 4^2\right] + 16\pi = -\pi\left[g - 4\right]^2 + 16\pi$$

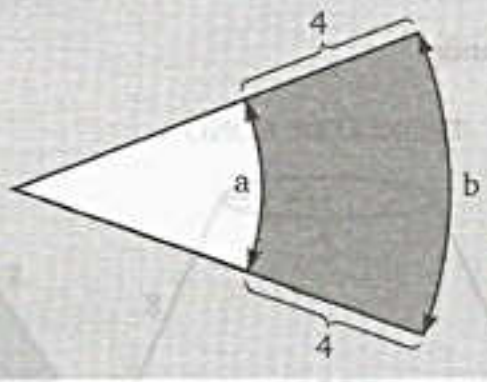
Para que "S" sea máximo es cuando: $g - 4 = 0$

$$\therefore \quad S_{Máx.} = 16\pi\ cm^2$$

**PROBLEMA 21** En la figura mostrada:

$$a = 210 - 40x \;;\; b = 7x^2 - 30x$$

Si el área de la región del trapecio circular tiene valor mínimo; entonces la medida de su ángulo central en radianes es:

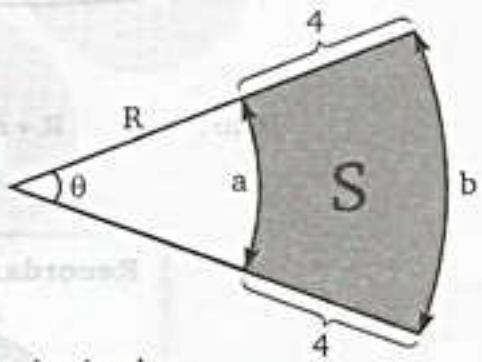



**Resolución:** En el gráfico mostrado calculamos las longitudes de arco:

$$a = R\theta \;\wedge\; b = (R+4)\theta$$

$$b = \underbrace{R\theta}_{a} + 4\theta$$

$$\theta = \frac{b-a}{4} \quad .....(1)$$




Hallamos el área S de la región del trapecio circular:

$$S = \left(\frac{a+b}{2}\right)4 \quad ..... \quad (2)$$

Sustituyendo los datos de a y b se obtiene:

$$S = 2(210 - 40x + 7x^2 - 30x)$$

$$\Rightarrow \quad 14x^2 - 140x + 420 - S = 0 \quad (*)$$

Sabemos: $\Delta \geq 0 \;\rightarrow\; (-140)^2 - 4(14)(420 - S) \geq 0$

$$S \geq 70$$

$$\therefore \quad S_{\text{Mín.}} = 70$$

Sustituyendo en (*):

$$x = 5$$

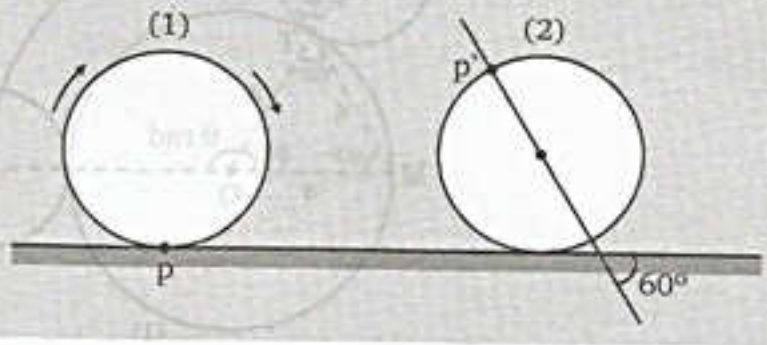
Luego: $a = 10 \;;\; b = 25$

Finalmente: $\theta = \dfrac{25-10}{4}$

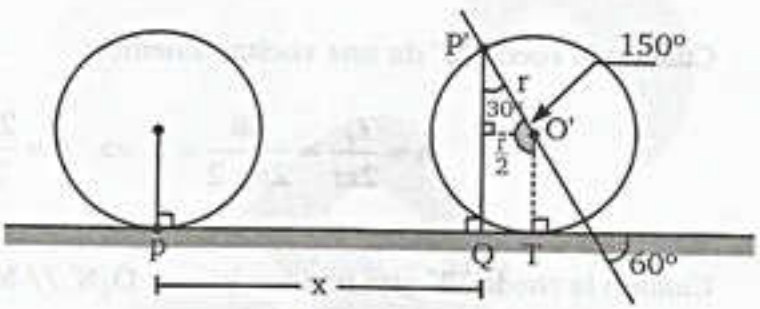
$$\therefore \quad \boldsymbol{\theta = 3{,}75}$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 22** Del gráfico P' es la nueva ubicación de P al girar la rueda mostrada desde la posición (1) hasta la posición (2). Determine la longitud que existe entre P y la proyección P' sobre el plano horizontal.




**Resolución:**




Para pasar de la posición (1) a (2) el ángulo central de la rueda ha barrido un ángulo que mide: $150^\circ \langle\rangle \frac{5\pi}{6}$ rad.

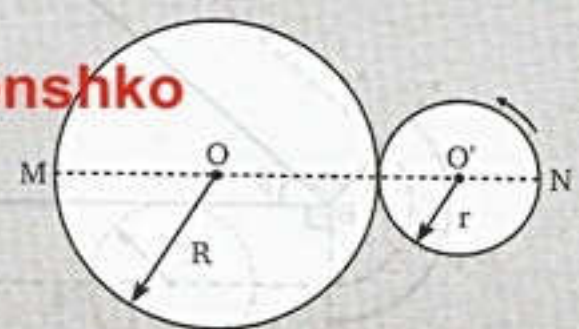
$$\ell_{\overset{\frown}{PT}} = PT = \frac{5\pi}{6} \cdot r$$

Luego: $PQ = PT - QT$

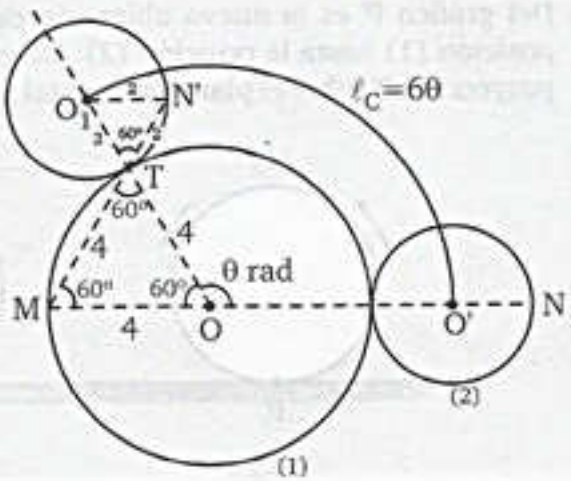
$$\therefore \quad PQ = \frac{r}{6}(5\pi - 3)$$

**PROBLEMA 23** Determine la longitud entre los puntos "M" y "N" cuando el disco de radio r gira una vuelta alrededor del disco de radio "R", desde la posición inicial mostrada.
Dato: R = 4 u y r = 2 u.

twitter.com/calapenshko



**Resolución:**




Cuando la rueda "2" da una vuelta, tenemos:

$$n = \frac{\ell_C}{2\pi r} = \frac{6\theta}{2\pi \times 2} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

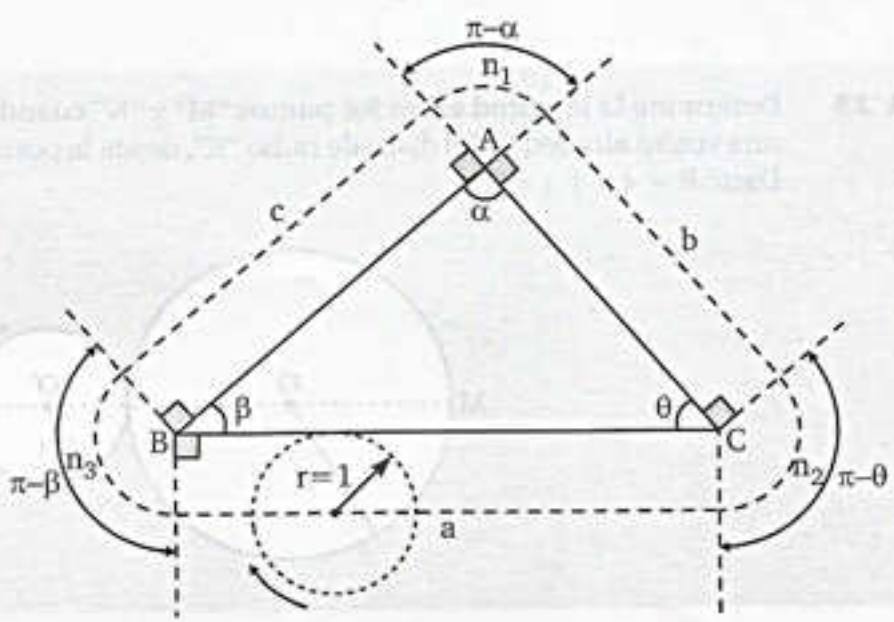
Cuando la rueda "2" gira una vuelta $\Rightarrow O_1N' \,//\, MN$

$\Delta_{O_1N'T}$ y $\Delta_{MTO}$ (Equiláteros) $\Rightarrow$ N'T $\wedge$ TM : Colineales

$\therefore$ **MN' = 6 u**

**PROBLEMA 24** Calcule el número de vueltas que da la rueda al recorrer el contorno de un triángulo, si el perímetro de este es de 44 m y su radio mide 1 m. Considerar: $\pi = 22/7$

**Resolución:**



team CALAPENSHKO



Para determinar el número de vueltas solicitado, hallaremos las vueltas que da sobre los lados del triángulo:

$$\overbrace{n_a+n_b+n_c}^{\#\text{Vueltas}}=\frac{a}{2\pi(1)}+\frac{b}{2\pi(1)}+\frac{c}{2\pi(1)}=\frac{a+b+c}{2\pi}=\frac{44}{2\left(\frac{22}{7}\right)}=7$$

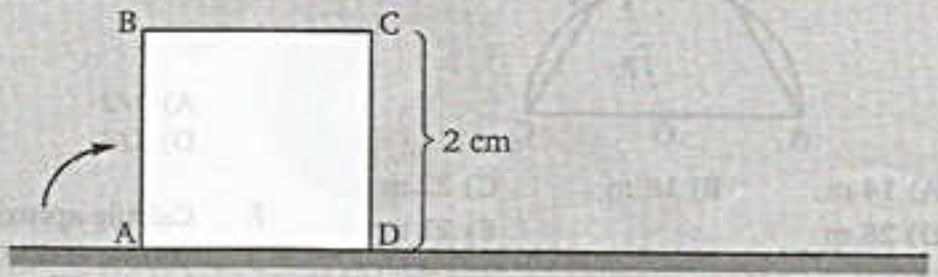
Ahora hallaremos las vueltas que da la rueda en los vértices del triángulo:

$$n_1+n_2+n_3=\frac{\pi-\alpha}{2\pi(1)}+\frac{\pi-\theta}{2\pi(1)}+\frac{\pi-\beta}{2\pi(1)}=\frac{3\pi-\overbrace{(\alpha+\beta+\theta)}^{\pi}}{2\pi}=1$$

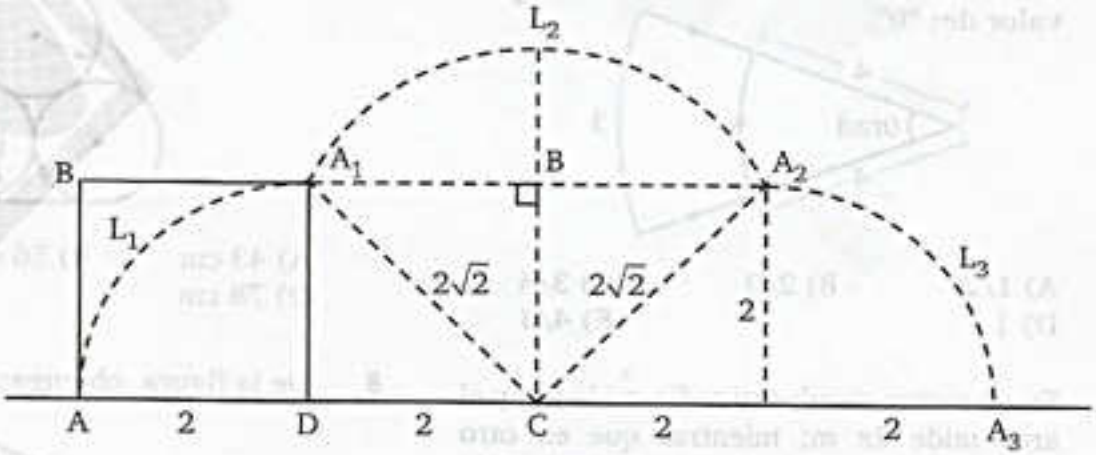
Número total de vueltas que da la rueda:

$$\therefore \ \#\ \text{Vueltas} = 8$$

**PROBLEMA 25** En la figura mostrada el cuadrado cuyo lado mide 2 cm rueda sin resbalar hasta que el punto "A" vuelve a tocar el piso. Determine la longitud (en cm) recorrida por el punto A.




**Resolución:**



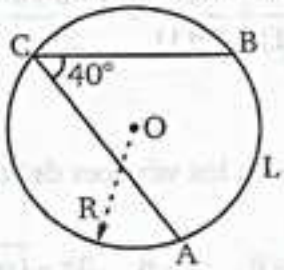

Longitud recorrida por A:

$$L_T=L_1+L_2+L_3=\frac{\pi}{2}(2)+\frac{\pi}{2}(2\sqrt{2})+\frac{\pi}{2}(2)$$

$$\therefore \ L_T=\pi(2+\sqrt{2})$$

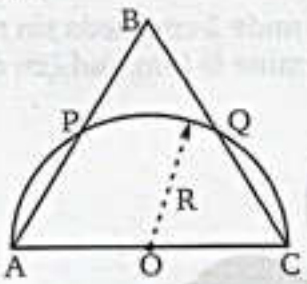
# PROBLEMAS PROPUESTOS

**1.** Calcule la longitud del radio de la circunferencia si: L = 4π m O: centro.



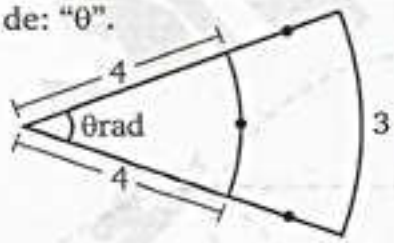

A) 9 m B) 8 m C) 6 m
D) 5 m E) 4 m

**2.** La figura muestra una semicircunferencia de centro "O" y un triángulo equilátero ABC. Halle la longitud del arco PQ (R = 21m).




A) 14 m B) 18 m C) 22 m
D) 28 m E) 21 m

**3.** En el sector circular mostrado. Halle el valor de: "θ".

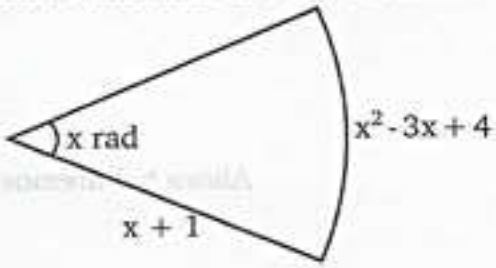



A) 1/2 B) 2/3 C) 3/4
D) 1 E) 4/3

**4.** En un sector circular su radio mide 6m y el arco mide 2π m; mientras que en otro sector circular cuyo ángulo central mide 15° menos que el ángulo central del primero, el radio mide 36m. ¿Halle la longitud de arco del segundo sector?

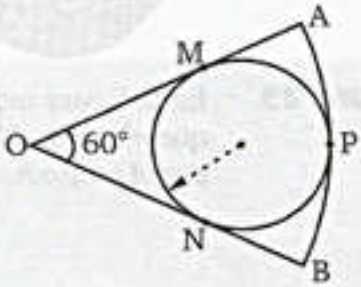
A) 5π m B) 10π m C) 15π m
D) 12π m E) 9π m

**5.** De la figura mostrada, calcule la longitud del radio del sector circular mostrado.



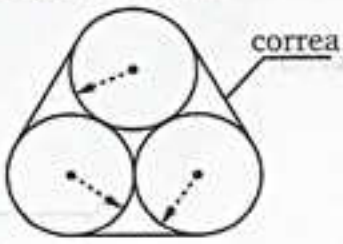

A) 1,5 B) 2 C) 2,5
D) 3 E) 3,5

**6.** Del gráfico determine: $\frac{L_{\widehat{AB}}}{L_{\widehat{MPN}}}$




A) 1/2 B) 3/4 C) 2/3
D) 1/4 E) 1

**7.** Calcule aproximadamente, la longitud de la correa, si los radios de los tres discos tienen la misma longitud de 7 cm.




A) 43 cm B) 56 cm C) 64 cm
D) 78 cm E) 86 cm

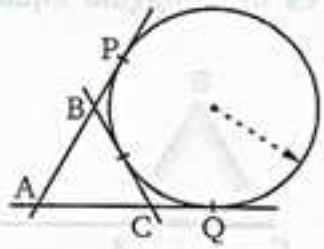
**8.** De la figura, obtenga: $R = \theta^2 + \theta$

A) 3/2 B) $\sqrt{2}$ C) 2
D) 1/2 E) 1

team CALAPENSHKO



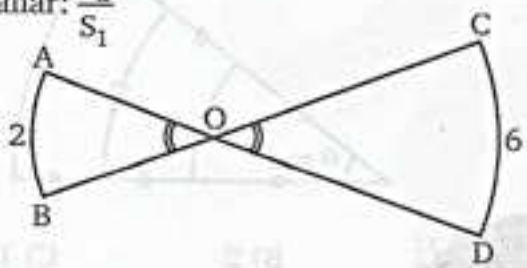
**9.** Del gráfico mostrado, calcule la mayor longitud del arco $\widehat{PQ}$, siendo ABC un triangulo equilátero de lados $2\sqrt{3}$ m.




A) $2\pi$ m B) $3\pi$ m C) $4\pi$ m
D) $5\pi$ m E) $6\pi$ m

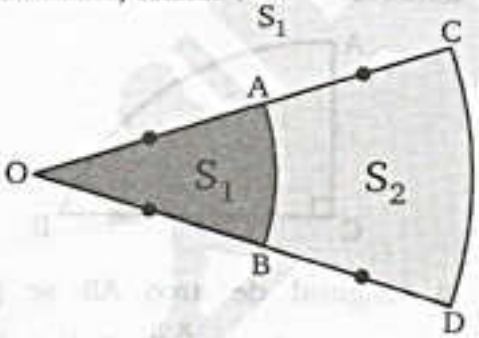
**10.** Siendo $S_1$ y $S_2$ las áreas de las regiones de los sectores circulares AOB y COD.

Hallar: $\frac{S_2}{S_1}$



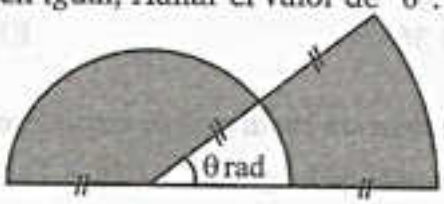

A) 3 B) 6 C) 9
D) 12 E) 15

**11.** En la figura, AOB y COD son sectores circulares, Hallar : $\frac{S_2}{S_1}$



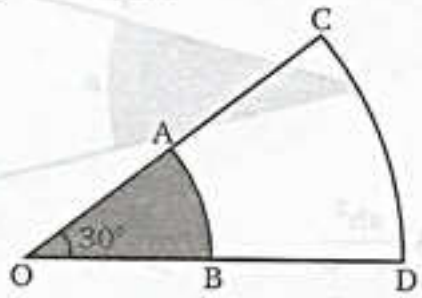

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 2
D) $\sqrt{5}$ E) 3

**12.** Si las áreas de las regiones sombreadas miden igual, Hallar el valor de "$\theta$".




A) $\pi/10$ B) $\pi/20$ C) $\pi/5$
D) $\pi/4$ E) $\pi/3$

**13.** De los sectores circulares mostrados, halle $L_{\widehat{CD}}$, si el área de la región sombreada es $3\pi\ u^2$ y AC = 2 u.



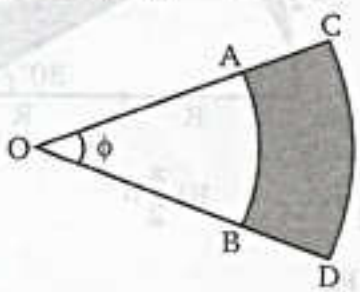

A) $\frac{\pi}{3}$ u B) $\frac{4\pi}{3}$ u C) $\frac{2\pi}{3}$ u
D) $\pi$ u E) $\frac{5\pi}{3}$ u

**14.** Se tiene un sector circular AOB cuya longitud de arco $\widehat{AB}$ es numéricamente igual al área de la región de dicho sector. Hallar la longitud del radio del sector circular.

A) 1 B) 2 C) $\pi$
D) $\frac{\pi}{2}$ E) 4

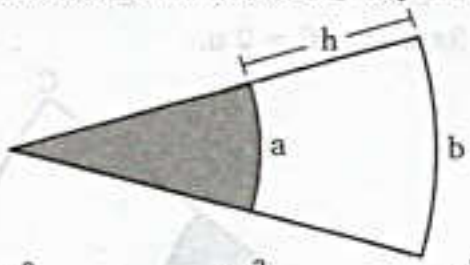
**15.** De los sectores circulares mostrados, halle el área de la región del trapecio circular sombreado.

Si : $L_{\widehat{AB}} = b$ ; $L_{\widehat{CD}} = a$




A) $\frac{1}{2}\left(\frac{a^2+b^2}{\phi}\right)$ B) $\frac{1}{2}\left(\frac{a^2-b^2}{\phi}\right)$
C) $\frac{1}{2}\left(\frac{a^2-b^4}{\phi}\right)$
D) $\frac{1}{4}\left(\frac{a^2-b^2}{\phi}\right)$ E) $\frac{1}{4}\left(\frac{a^2+b^2}{\phi}\right)$

**16.** De la figura, halle el área del sector circular sombreado en términos de "a", "b"y "h".




A) $\frac{ah^2}{a+b}$ B) $\frac{bh^2}{(a+b)}$ C) $\frac{a^2h}{2(b-a)}$

D) $\frac{b^2h}{2(b-a)}$ E) $\frac{abh}{(b-a)}$

**17.** Señale si es verdadero (V) o falso (F), según corresponda en:

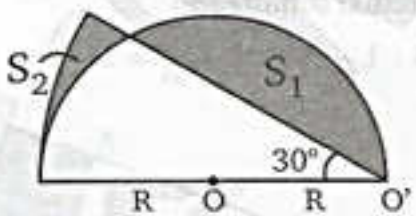
( ) Si en un sector circular, se duplica el radio; el área de su región también se duplica.

( ) Se tiene un sector circular, si el área de su región es "S". Si duplicamos el radio y triplicamos el arco, el área de la región del nuevo sector mide "6S".

( ) Si en un sector circular el ángulo central se reduce a la mitad y se duplica el radio; el área no varía.

A) VVV B) FVV C) FVF
D) VFV E) VVF

**18.** Hallar: $S_1 - S_2$ . Siendo O y O' centros.




A) $\frac{3\pi}{2}R^2$ B) $\frac{\pi}{2}R^2$ C) $\frac{2\pi}{3}R^2$

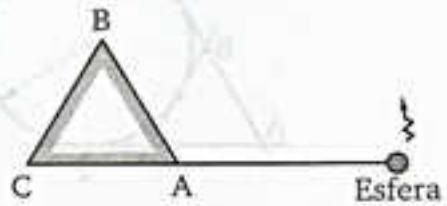
D) $\frac{\pi}{6}R^2$ E) $\frac{\pi}{3}R^2$

**19.** Un molinete de riego tiene un alcance de 14 m de longitud y un ángulo de riego que mide 225°. Hallar el área (en $m^2$) de la región del sector circular determinado por el molinete.

$\left(\text{tomar: } \pi = \frac{22}{7}\right)$

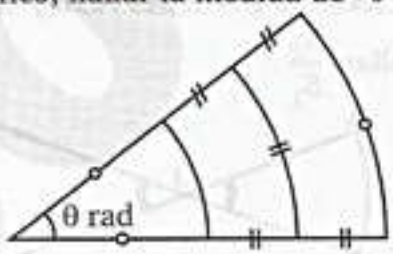
A) 195 B) 225 C) 275
D) 335 E) 385

**20.** Si la cuerda envuelve exactamente al triángulo trasladándose la esfera hasta el punto A, hallar el recorrido de la esfera. ABC es un triángulo equilátero de lado 4 m.



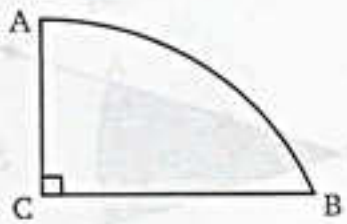

A) $3\pi$ m B) $9\pi$ m C) $12\pi$ m
D) $16\pi$ m E) $18\pi$ m

**21.** Del gráfico, hallar la medida de "θ".




A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) 1
D) $\sqrt{2}-1$ E) $\sqrt{2}+1$

**22.** Se sabe que el centro de la longitud de arco $\overset{\frown}{AB}$ se encuentra en la prolongación del lado $\overline{AC}$.




Si la longitud de arco AB se puede expresar como "$\pi + \frac{\pi}{k}$", hallar el valor de "k" aproximadamente.

Dato: AC = 1 ; BC = 3

A) 9 B) 18 C) 27
D) 36 E) 45

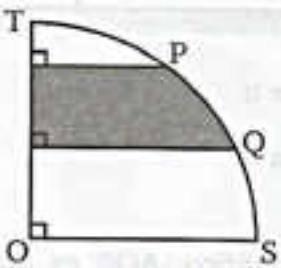
**23.** Se tiene un cuadrante de circunferencia AOB de radio de longitud $r = (\sqrt{5} + 1)$ m, sobre el arco AB se toma el punto C de tal manera que la longitud del arco AC es media proporcional

team CALAPENSHKO


entre las longitudes de los arcos AB y BC, luego la longitud del arco AC es?

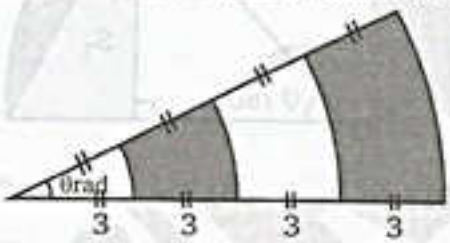
A) $\frac{\pi}{2}$ m  B) $\pi$ m  C) $2\pi$ m
D) $\frac{\pi}{4}$ m  E) $\frac{3\pi}{2}$ m

**24.** Calcule el área de la región sombreada si: $OT = OS = 4\sqrt{3}$ m, además: $\widehat{TP} = \widehat{PQ} = \widehat{QS}$




A) $2\pi$ m²  B) $2\pi$ m²  C) $4\pi$ m²
D) $6\pi$ m²  E) $8\pi$ m²

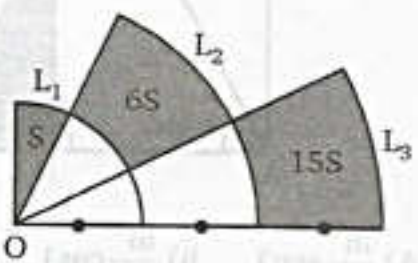
**25.** Si la suma de las áreas de las regiones sombreadas es $15\pi$ u², halle la medida de "$\theta$".




A) $\pi/15$  B) $\pi/10$  C) $\pi/5$
D) $\pi/4$  E) $\pi/3$

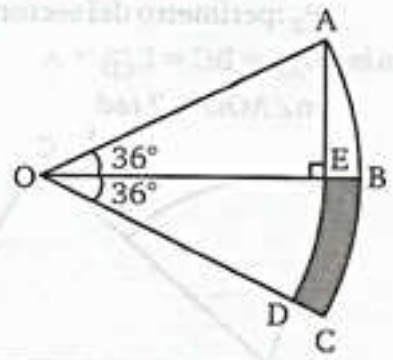
**26.** Del esquema mostrado, halle el valor de:

$$E = \frac{L_1 + L_3}{L_1 + L_2}$$



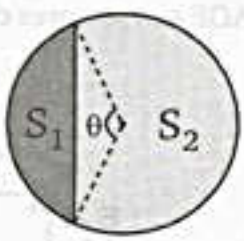

A) 1  B) 2  C) 3
D) 4  E) 5

**27.** Calcule el área de la región sombreada, si: $AE = 2\sqrt{5}$ m.




A) $\pi$m²  B) $2\pi$ m²  C) $3\pi$ m²
D) $4\pi$ m²  E) $5\pi$ m²

**28.** Del gráfico, si: $S_2 = 2S_1$
Calcule: "$3\theta - 2\text{sen}\theta$"




A) $\pi/2$  B) $\pi$  C) $3\pi/2$
D) $2\pi$  E) $3\pi$

**29.** Un jardinero quiere construir y cercar un campo que tenga la forma de un sector circular con un alambre de 20 m de longitud. Halle el valor del radio de dicho sector para que el área del campo sea la mayor posible.

A) 5 m  B) $\sqrt{5}$ m  C) $\sqrt{3}$ m
D) 3 m  E) 2,5 m

**30.** Si el área de la región circular mide $65\pi$ m² de área y 13 m de radio se genera un cono recto, calcule la altura de dicho cono.

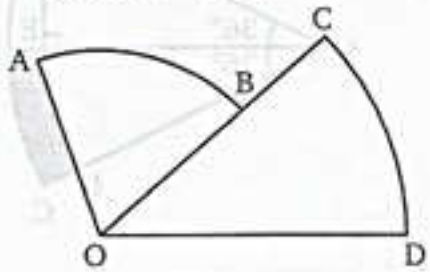
A) 5 m  B) 10 m  C) 7 m
D) 9 m  E) 12 m

**31.** Del gráfico calcule: $P_2/P_1$, siendo:

$P_1$: perímetro del sector COD

$P_2$: perímetro del sector AOB

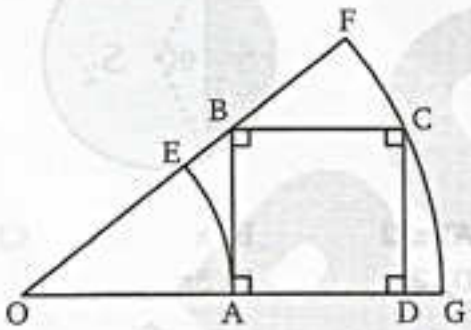
Además: $L_{\widehat{AB}} = BC = L_{\widehat{CD}}$ ∧ $m\angle AOD = 2$ rad




A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}+1$ C) $2\sqrt{2}$

D) $2\sqrt{2}-1$ E) $2\sqrt{2}+1$

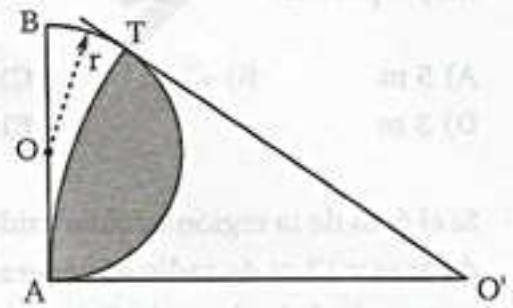
**32.** Si ABCD es un cuadrado. Halle la medida del ángulo FOG, si: $L_{\widehat{GF}} = \sqrt{5}L_{\widehat{AE}}$; además FOG y AOE son sectores circulares.




A) 30 B) 37° C) 45°

D) 53° E) 60°

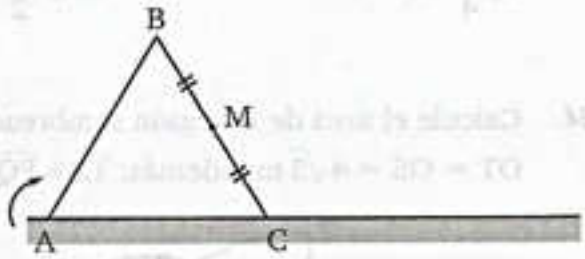
**33.** Calcule el perímetro de la región sombreada. Si O y O' son centros (T: punto de tangencia)




A) $\frac{\pi r}{6}(7-\sqrt{3})$ B) $\frac{\pi r}{6}(5+\sqrt{3})$ C) $\frac{\pi r}{6}(7+\sqrt{3})$

D) $\frac{\pi r}{3}(5+\sqrt{3})$ E) $\frac{\pi r}{3}(7-\sqrt{3})$

**34.** Se tiene un triángulo equilátero de lado 6 u, ubicado sobre una pista horizontal (Ver figura). Si el triángulo empieza a girar sin resbalar de tal manera que el punto A vuelve a tocar el piso otra vez; calcule la longitud de la trayectoria que sigue al punto M.

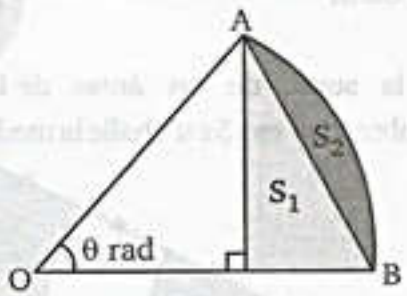



A) $2\pi$ u B) $\pi$ u C) $3\pi$ u

D) $4\pi$ u E) $\frac{\pi}{2}$ u

**35.** Del gráfico, AOB es un sector circular y $S_1 = S_2$. Halle:

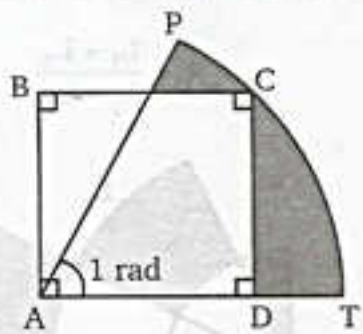
$$N = \theta \csc\theta + \cos\theta$$




A) 1,5 B) 2 C) $\frac{\pi}{3}$

D) $\pi$ E) $2\pi$

**36.** Determine el área de la región sombreada siendo ABCD un cuadrado de lado "m" y PAT un sector circular.



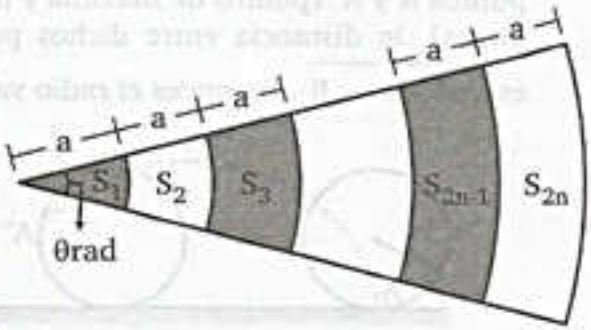

A) $\frac{m^2}{2}\text{sen}1$ B) $\frac{m^2}{2}\cos 1$ C) $\frac{m^2}{2}\tan 1$

D) $\frac{m^2}{2}\cot 1$ E) $\frac{m^2}{2}\sec 1$

team CALAPENSHKO


**37.** Del gráfico reduzca:

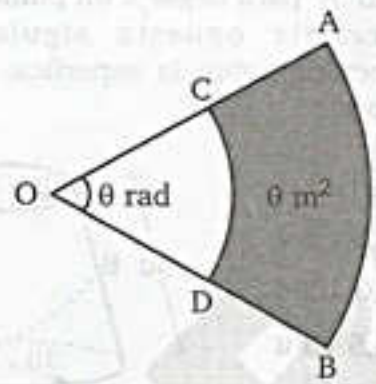
$$E = \sum_{k=1}^{n} (S_{2k} - S_{2k-1})$$




A) $\frac{\theta a^2 n}{2}$ B) $\frac{\theta a^2}{3}$ C) $\theta a^2 n$

D) $3\theta a^2 n$ E) $2\theta a^2 n$

**38.** De la figura, halle el radio del sector AOB si: $L_{\widehat{CD}} = \theta$ m

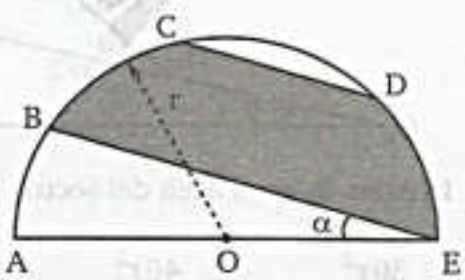



A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$

D) 2 E) $\sqrt{5}$

**39.** Determine el área de la región sombreada en términos de "r" y "α".

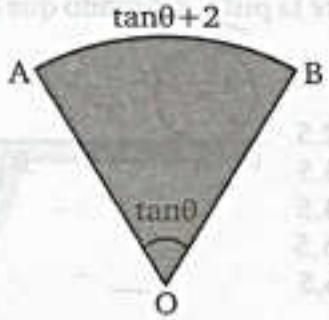
Dato: $\widehat{AB} = \widehat{CD}$.




A) $\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)r^2$ B) $\left(\frac{\pi-2\alpha}{2}\right)r^2$ C) $\left(\frac{\pi-3\alpha}{2}\right)r^2$

D) $\left(\frac{\pi-4\alpha}{2}\right)r^2$ E) $\left(\frac{\pi-5\alpha}{2}\right)r^2$

**40.** Del gráfico, Hallar "secθ" para que el área del sector circular AOB sea mínimo.




A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 2

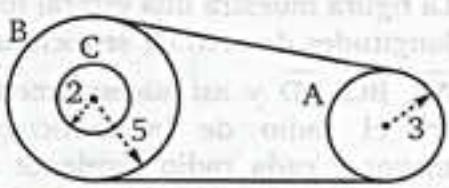
D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{6}$

**41.** Las longitudes de los radios de las ruedas de una bicicleta son entre sí como 3 es a 4. Hallar el número de vueltas que da la rueda mayor cuando la rueda menor gire $24\pi$ radianes.

A) 6 B) 8 C) 9

D) 10 E) 12

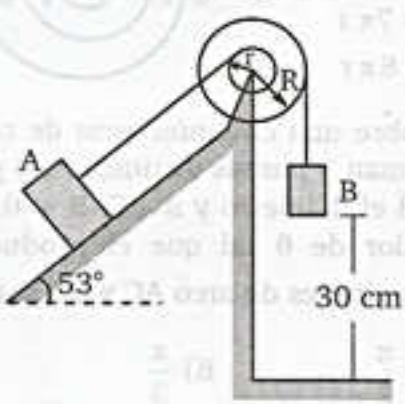
**42.** Del esquema, al hacer girar la faja, las ruedas A y C giran ángulos cuyas medidas suman $28\pi$. Determinar cuántas vueltas dará la rueda mayor.




A) 1 B) 1,5 C) 2

D) 2,5 E) 3

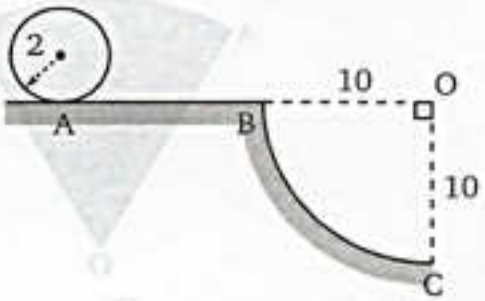
**43.** Halle el desnivel producido en el bloque A cuando el bloque B llega al piso. R = 2r.




A) 15 cm B) 12 cm C) 9 cm

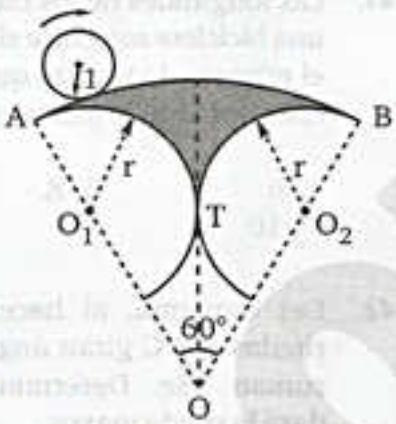
D) 8 cm E) 6 cm

**44.** Halle el número total de vueltas que da la rueda al ir desde A hasta C, sin resbalar sobre la pista, sabiendo que $\overline{AB}$ mide $13\pi$ m.




A) 2,5
B) 3,5
C) 4,5
D) 5,5
E) 6,5

**45.** Determine el número de vueltas que da la rueda al recorrer todo el contorno de la región sombreada (r = 4) siento T punto de tangencia.




A) $\frac{17}{3}$
B) 10
C) 6
D) 8
E) $\frac{5}{2}$

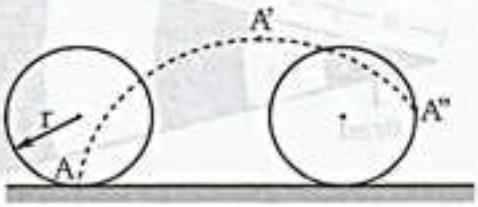
**46.** La figura muestra una espiral formada por longitudes de arco de semicircunferencias $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$ y así sucesivamente, siendo "r" el radio de la semicircunferencia mayor y cada radio siguiente es el 75% del radio anterior. Hallar la longitud de la espiral.

A) $4\pi r$
B) $5\pi r$
C) $6\pi r$
D) $7\pi r$
E) $8\pi r$

**47.** Sobre una circunferencia de radio "r" se toman 3 puntos distintos A, B y C, siendo $\overline{AB}$ el diámetro y $m\angle CAB = \theta$. Hallar el valor de $\theta$ tal que el producto de las longitudes de arco AC y BC sea máxima.

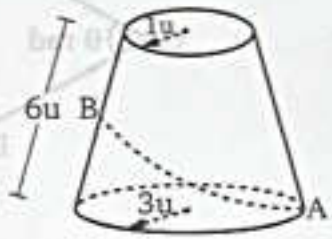
A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{4}$
D) $\frac{\pi}{5}$ E) $\frac{\pi}{6}$

**48.** Se tiene un punto A sobre la rueda que se desplaza girando sobre la superficie horizontal. Si el punto A llega hasta los puntos A' y A" (puntos de máxima y media altura), la distancia entre dichos puntos es $\sqrt{\pi^2 + 4\pi + 8}$. Entonces el radio vale?



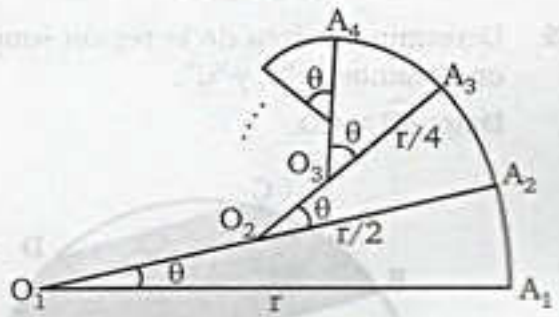

A) 0,5 B) 1 C) 2
D) 4 E) 8

**49.** ¿Cuál es la mínima distancia que debería recorrer un araña que se encuentra en el punto "A" para llegar a un punto "B" en la generatriz opuesta siguiendo una trayectoria sobre la superficie del tronco de cono.




A) $3,0\sqrt{3}$ u
B) $3,5\sqrt{3}$ u
C) $4,0\sqrt{3}$ u
D) $4,5\sqrt{3}$ u
E) $5,0\sqrt{3}$ u

**50.** Del gráfico mostrado, reducir la suma ilimitada: $E = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots$




Donde: $S_k$ es el área del sector $A_kO_kA_{k+1}$

A) $\frac{3\theta r^2}{2}$ B) $\frac{4\theta r^2}{3}$ C) $\frac{\theta r^2}{3}$
D) $\frac{\theta r^2}{2}$ E) $\frac{2\theta r^2}{3}$

team CALAPENSHKO

Capítulo 3

# Razones Trigonométricas de Ángulos Agudos

**CAPACIDADES**

- Identificar las razones trigonométricas de ángulo agudo
- Aplicar las razones trigonométricas en la resolución de triángulos rectángulos

## LA ESCUELA Y LAS TERNAS PITAGÓRICOS

Los pitagóricos afirmaban que la estructura del universo era aritmética y geométrica. La hermandad estaba dividida en dos partes: Los estudiantes y los oyentes. Los estudiantes aprendían las enseñanzas matemáticas, religiosas y filosóficas directamente de su fundador, mientras que los oyentes se limitaban a ver el modo de comportarse de los pitagóricos.

PITÁGORAS DE SAMOS

Pitágoras pasa por ser el introductor de pesos y medidas, y elaborador de la teoría musical; el primero en hablar de «teoría» y de «filósofos», en postular el vacío, en canalizar el fervor religioso en fervor intelectual, en usar la definición y en considerar que el universo es una obra sólo descifrable a través de las matemáticas. Fueron los pitagóricos los primeros en sostener la forma esférica de la tierra y postular que ésta, el sol y el resto de los planetas conocidos, no se encontraban en el centro del universo, sino que giraban en torno a una fuerza simbolizada por el número uno.

Los pitagóricos atribuían todos sus descubrimientos a Pitágoras por lo que es difícil determinar con exactitud cuales resultados son obra del maestro y cuales de los discípulos. Entre ellos están:

1. **UNA PRUEBA DEL TEOREMA DE PITÁGORAS.** Si bien los pitagóricos no descubrieron este teorema (ya era conocido y aplicado en Babilonia y la India desde hacía un tiempo considerable), sí fueron los primeros en encontrar una demostración formal del teorema.

2. **TERNAS PITAGÓRICAS.** Una terna pitagórica es una terna de números enteros (a, b, c) tales que cumple: $a^2 + b^2 = c^2$. Aunque los babilonios ya sabían cómo generar tales ternas en ciertos casos, los pitagóricos extendieron el estudio del tema encontrando resultados como cualquier entero impar es miembro de una terna pitagórica primitiva.

3. **NÚMEROS PERFECTOS.** Estudiaron los números perfectos, es decir aquellos números que son iguales a la suma de sus divisores propios.

4. **NÚMEROS AMIGABLES.** Un par de números son amigables si cada uno es igual a la suma de los divisores propios del otro (Atribuido a Pitágoras descubrir el par: 220, 284).

5. **NÚMEROS IRRACIONALES.** A partir del descubrimiento de que la diagonal de un cuadrado de lado 1 no puede expresarse como un cociente de números enteros.

team CALAPENSHKO


## INTRODUCCIÓN

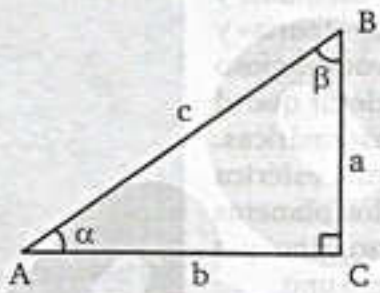
En este capítulo veremos algunas aplicaciones de la trigonometría que implica la resolución de un triángulo rectángulo. Un triángulo tiene seis elementos: tres lados y tres ángulos. Resolver un triángulo consiste en hallar tres de los elementos cuando se conocen los otros tres, siempre que uno de ellos sea un lado.

# RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

## DEFINICIÓN

Consideramos a los ángulos de un triángulo rectángulo designados por A, B y C, siendo C el ángulo recto. Los lados opuestos a los ángulos se representarán por a, b y c respectivamente. La suma de los ángulos agudos es 90° y cada uno es el complemento del otro.

Podemos definir las razones trigonométricas de un ángulo agudo como el cociente que se establece entre las longitudes de dos de los lados de un triángulo con respecto a uno de sus ángulos agudos.




Donde:

a y b : catetos

c : hipotenusa

Las razones trigonométricas de un ángulo agudo se define:

| | |
|---|---|
| $\text{sen}\alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{a}{c}$ | $\csc\alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto a } \alpha} = \dfrac{c}{a}$ |
| $\cos\alpha = \dfrac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{b}{c}$ | $\sec\alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente a } \alpha} = \dfrac{c}{b}$ |
| $\tan\alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto adyacente a } \alpha} = \dfrac{a}{b}$ | $\cot\alpha = \dfrac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{cateto opuesto a } \alpha} = \dfrac{b}{a}$ |

### OBSERVACIÓN

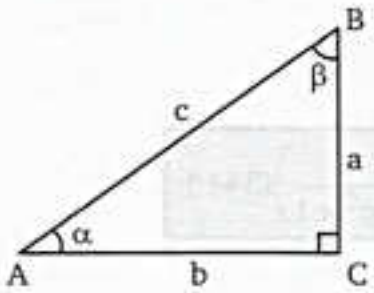
Para el ángulo agudo "α" se cumplen:

| | | |
|---|---|---|
| $0 < \text{sen}\,\alpha < 1$ | $\tan\alpha > 0$ | $\sec\alpha > 1$ |
| $0 < \cos\alpha < 1$ | $\cot\alpha > 0$ | $\csc\alpha > 1$ |

team CALAPENSHKO


## TEOREMA DE PITÁGORAS

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la medida de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de la medida de los catetos.



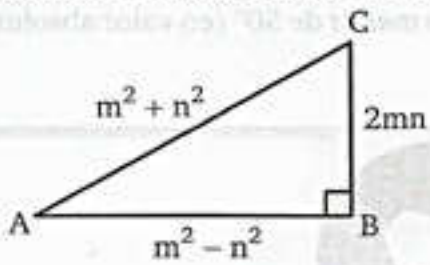

Del gráfico tenemos: $c^2 = a^2 + b^2$

Ángulo complementarios: $\alpha + \beta = 90°$

## TRIÁNGULOS PITAGÓRICOS

Se denomina de esta manera a aquellos triángulos rectángulos cuya medida de sus lados está expresada por números enteros.

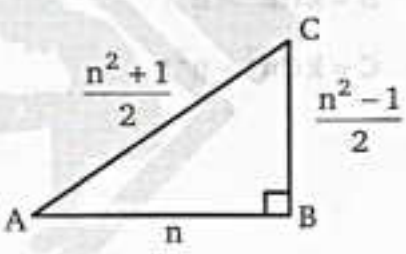
Los lados de todo triángulo pitagórico tienen la siguiente forma:



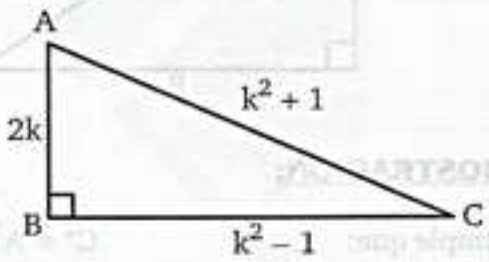

* m y n son números enteros positivos.
* $m > n$

De la forma general se deducen casos particulares:

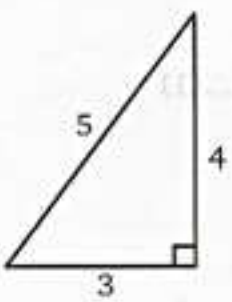
* $n \rightarrow$ impar $(n > 1)$
* AB Cateto menor.



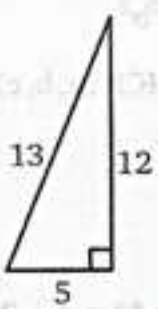

* $k \rightarrow$ par $(k > 2)$
* AB Cateto menor.



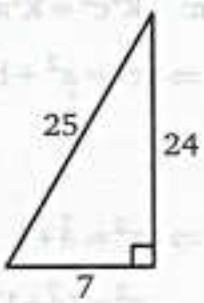

* Algunos triángulos pitagóricos son:



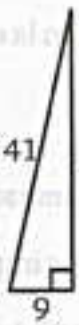

ESCALA 1: 6




ESCALA 1: 2




ESCALA 1: 2




ESCALA 2: 3

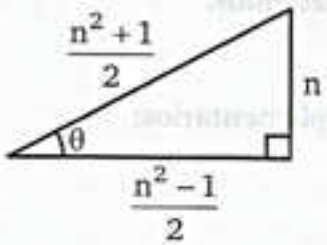
team CALAPENSHKO



## OBSERVACIÓN

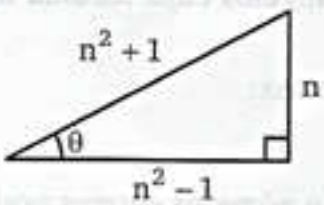
Una fórmula práctica para calcular la medida del menor ángulo de un triángulo pitagórico (De las formas estudiadas anteriormente) es la siguiente:

a) n: Impar (n > 1)




$$\theta = \left(\frac{n}{3n^2+1}\right)(344°)$$

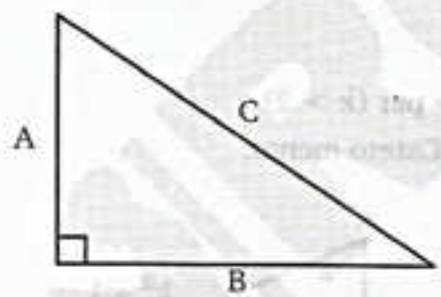
b) n: par (n > 2)




El error que se comete al aplicar esta fórmula práctica es menor de 50" (en valor absoluto).

## NÚMEROS PITAGÓRICOS

Los números pitagóricos poseen la siguiente estructura.




$A, B, C \in \mathbb{Z}^+$

$A = k(2mn)$

$B = k(m^2 - n^2)$

$C = k(m^2 + n^2)$

**DEMOSTRACIÓN:**

Se cumple que: $C^2 = A^2 + B^2$

Sea K el MCD (A, B, C) $A = Ka,\ B = Kb, C = Kc$ ..... (*)

Reemplazando en la ecuación: $K^2c^2 = K^2a^2 + K^2b^2$

$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$ y MCD (a, b, c) = 1 .....(1)

Ahora:

- Si a y b son impares.

  OBS.: Si x es impar $\Rightarrow x^2 = \overset{\circ}{4}+1$

  como: $c^2 = a^2 + b^2$ $c^2 = (\overset{\circ}{4}+1)+(\overset{\circ}{4}+1) = \overset{\circ}{4}+2$

  De esto último c es par $\Rightarrow c^2 = \overset{\circ}{4}$ lo que se contradice.

team CALAPENSHKO



- Si a y b son pares y como: $c^2 = a^2 + b^2$

$\Rightarrow$ $c^2$ es par. $\Rightarrow$ c es par.

$\Rightarrow$ MCD (a, b, c) $= \overset{\circ}{2}$ lo que contradice (1).

$\therefore$ a y b son de distinta paridad.

Supongamos que a es par y b es impar.

como: $c^2 = a^2 + b^2$ $\Rightarrow$ c es impar.

Ahora restando $b^2$ de ambos miembros:

$$c^2 - b^2 = a^2 \Rightarrow (c+b)(c-b) = a^2$$

como b y c son impares: $\Rightarrow$ $b + c$ y $c - b$ son pares.

$\Rightarrow$ Es cierto que: $\left(\frac{c+b}{2}\right)\left(\frac{c-b}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}\right)^2$

Suponiendo que : $\exists d \neq 1$ tal que $\frac{c+b}{2} = \overset{\circ}{d} \wedge \frac{c-b}{2} = \overset{\circ}{d}$

$$\Rightarrow \frac{c+b}{2} + \frac{c-b}{2} = \overset{\circ}{d} \Rightarrow c = \overset{\circ}{d}$$

También : $\frac{c+b}{2} - \left(\frac{c-b}{2}\right) = \overset{\circ}{d} \Rightarrow b = \overset{\circ}{d}$

como : $c^2 = a^2 + b^2$ $\Rightarrow$ $a^2 = \overset{\circ}{d^2} \Rightarrow a = \overset{\circ}{d}$

$\Rightarrow$ MCD(a, b, c) $= \overset{\circ}{d}$ lo que contradice (1)

$\Rightarrow$ $\frac{c+b}{2} \wedge \frac{c-b}{2}$ son PESI y como el producto es un cuadrado perfecto.

$$\Rightarrow \exists\, m,n \in \mathbb{Z}^+ \Big/ \frac{c+b}{2} = m^2 \wedge \frac{c-b}{2} = n^2$$

twitter.com/calapenshko

Sumando y restando las expresiones se obtiene:

$$c = m^2 + n^2 \wedge b = m^2 - n^2$$

Reemplazando en: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = (m^2+n^2)^2 - (m^2-n^2)^2$

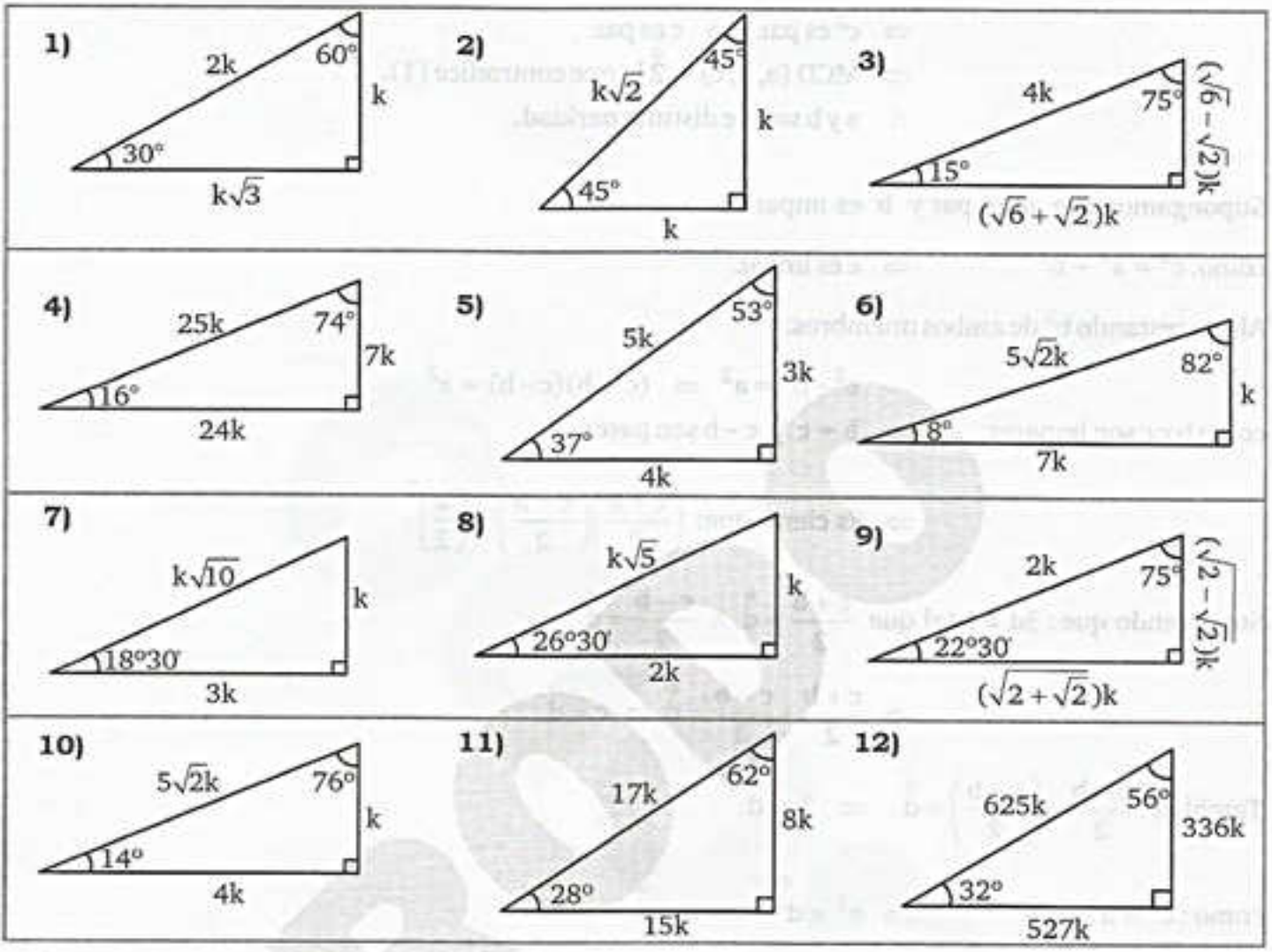
$$a^2 = 4m^2n^2 \Rightarrow a = 2mn$$

En (*): $A = K(2mn)$

$B = K(m^2 - n^2)$

$C = K(m^2 + n^2)$

## TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS DE ÁNGULOS NOTABLES Y APROXIMADOS




Hallaremos las razones trigonométricas de los siguientes ángulos notables y aproximados:

| R.T. \ ∠ | 45° | 30° | 60° | 37° | 53° |
|---|---|---|---|---|---|
| sen$\alpha$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{4}{5}$ |
| cos$\alpha$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{3}{5}$ |
| tan$\alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{4}{3}$ |
| cot$\alpha$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{3}{4}$ |
| sec$\alpha$ | $\sqrt{2}$ | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | 2 | $\frac{5}{4}$ | $\frac{5}{3}$ |
| csc$\alpha$ | $\sqrt{2}$ | 2 | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{5}{3}$ | $\frac{5}{4}$ |

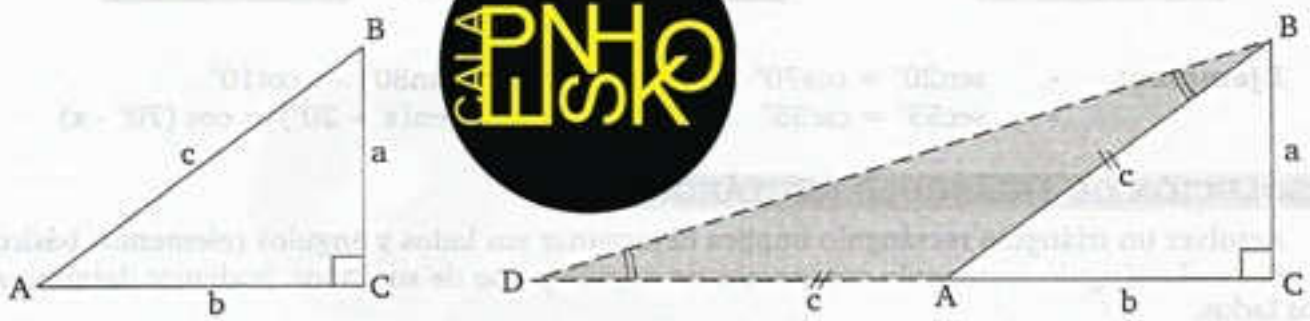
team CALAPENSHKO



## OBSERVACIÓN

Una forma práctica para hallar las razones trigonométricas de la mitad de un ángulo agudo es la siguiente:

Partimos de un triángulo ABC, recto en C, si queremos las razones trigonométricas de $\left(\frac{A}{2}\right)$ entonces prolongamos el cateto $\overline{CA}$ hasta un punto D, tal que: AD = AB; luego el triángulo DAB es isósceles: $m\angle BDA = \frac{A}{2}$

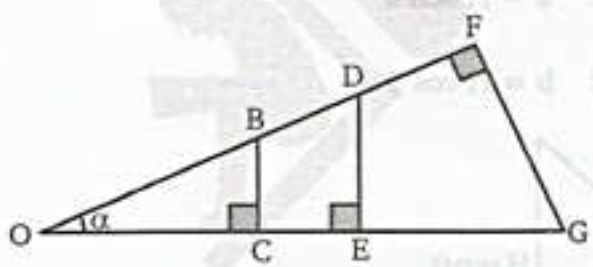



Por tanto del $\triangle_{BCD}$: $\cot\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{c+b}{a}$ ; $\tan\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{a}{c+b}$

Con este método a partir del $\triangle$ 37° y 53° se pueden construir $\triangle$ 18,5° y $\triangle$ 26,5°

## PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

"Las razones trigonométricas de un ángulo agudo son independientes de los lados del triángulo rectángulo que lo contiene y dependen únicamente de la magnitud de dicho ángulo".




Los triángulos OCB, OED y OFG son semejantes, pues posen los mismos ángulos.
Por lo tanto, por ejemplo, el sen α es igual en los tres triángulos, es decir:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{OG}} = \operatorname{sen}\alpha$$

## PROPIEDADES DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ÁNGULOS AGUDOS

### RAZONES TRIGONOMÉTRICAS RECÍPROCAS

Dos razones trigonométricas relativas a un mismo ángulo serán reciprocas entre sí, cuando el producto de estas nos da la unidad. Se cumple:

$\csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \Rightarrow$ **$\operatorname{sen}\alpha \csc\alpha = 1$**

$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} \Rightarrow$ **$\tan\alpha \cot\alpha = 1$**

$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \Rightarrow$ **$\cos\alpha \sec\alpha = 1$**

Donde, α es un ángulo agudo.

**Ejemplos:** - $\text{sen}20^\circ \cdot \csc 20^\circ = 1$ - $\cos 16^\circ \cdot \sec 16^\circ = 1$

- $\tan 25^\circ \cdot \cot 25^\circ = 1$ - $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

## RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

Las razones trigonométricas de un ángulo son iguales a las razones trigonométricas de su complemento por tal razón a los segundos se les suele llamar co-razones por ser razones del complemento de un ángulo. Siendo $\alpha$ y $\beta$ valores de los ángulos agudos tal que $\alpha + \beta = 90^\circ$, entonces

$\text{sen}\,\alpha = \cos\beta$ $\tan\alpha = \cot\beta$ $\sec\alpha = \csc\beta$

**Ejemplos:** - $\text{sen}20^\circ = \cos 70^\circ$ - $\tan 80^\circ = \cot 10^\circ$

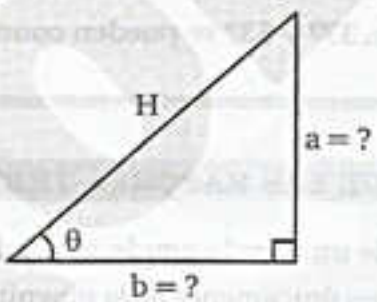
- $\sec 55^\circ = \csc 35^\circ$ - $\text{sen}(x + 20^\circ) = \cos(70^\circ - x)$

## RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULO RECTÁNGULOS

Resolver un triángulo rectángulo implica determinar sus lados y ángulos (elementos básicos).

Si en el triángulo rectángulo conocemos un ángulo y uno de sus lados, podemos determinar los otros lados.

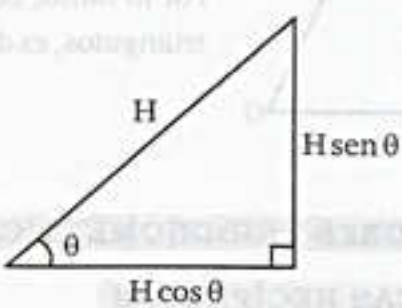
**Ejemplo:** En el triángulo rectángulo conocemos la medida del ángulo $\theta$ y la hipotenusa H. Hallaremos la longitud de los catetos a y b en términos de $\theta$ y H.




Para hallar a, $\frac{a}{H} = \text{sen}\theta$, entonces: $a = H\,\text{sen}\,\theta$

Para hallar b, $\frac{b}{H} = \cos\theta$, entonces: $b = H\cos\theta$

Finalmente:




Se observa que conocidos el ángulo $\theta$ y el lado H, se han determinado los demás lados en función de H y una razón trigonométrica de $\theta$, para determinar dicha razón usaremos en forma práctica:

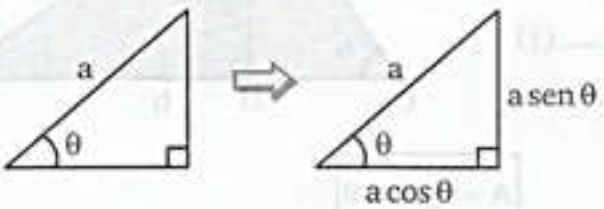
$$\frac{[\text{lado incógnita}]}{[\text{lado dato}]} = \text{RT}\left(\begin{matrix}\angle \\ \text{dato}\end{matrix}\right)$$

team CALAPENSHKO

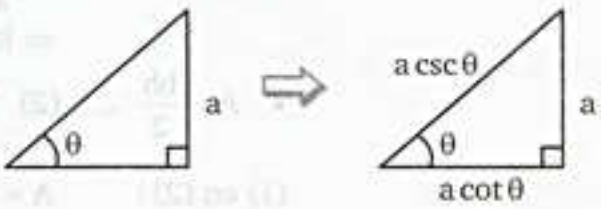


## APLICACIONES

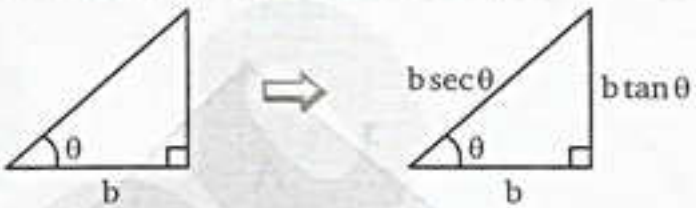
**I)** Datos: hipotenusa y θ




**II)** Datos: cateto opuesto y θ

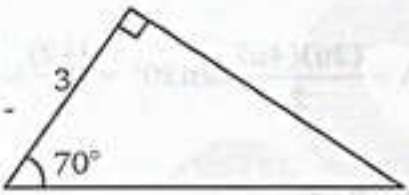


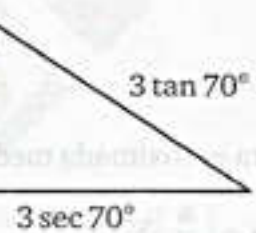

**III)** Datos: cateto adyacente y θ



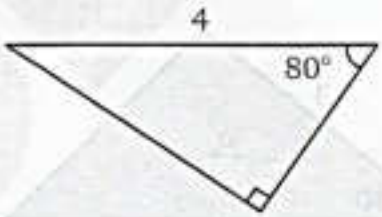

**Ejemplos:**

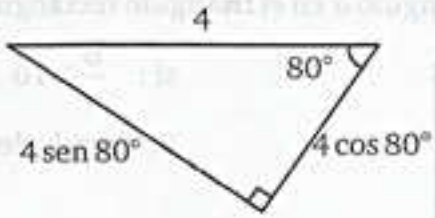
Si tenemos:



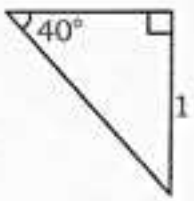



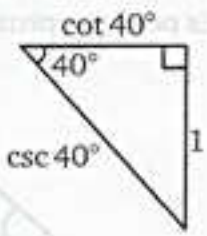

Si tenemos:



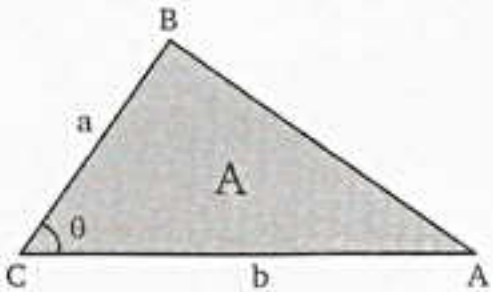




Si tenemos:




## ÁREA DE UNA REGIÓN TRIÁNGULAR

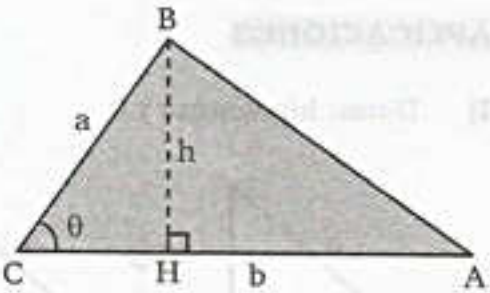



(A: Área de la región triangular)

Se cumple:

$$A = \frac{1}{2}ab\,\text{sen}\theta$$

**DEMOSTRACIÓN:** Sea A el área

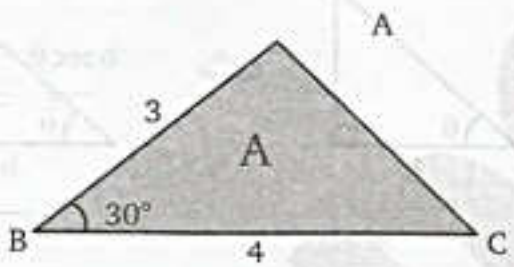



- Trazamos la altura relativa ($\overline{BH}$) a $\overline{AC}$.
- En el $\triangle CHB$ : $\frac{h}{a} = \operatorname{sen}\theta$

  $\Rightarrow h = a\operatorname{sen}\theta$ .....(1)
- $A = \frac{bh}{2}$ .....(2)

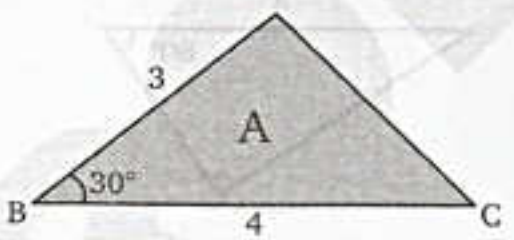
(1) en (2) : $A = \frac{b(a\operatorname{sen}\theta)}{2}$ $\qquad \boxed{A = \frac{ab}{2}\operatorname{sen}\theta}$

**Ejemplo:** Calcule el área de la región triangular sombreada.




(A: Área)

**Resolución:**

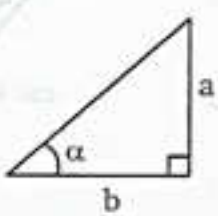



$$A = \frac{(3u)(4u)}{2}\operatorname{sen}30° = \frac{(12)}{2}\times\frac{1}{2}\ u^2$$

$$\mathbf{A = 3\,u^2}$$

## OBSERVACIÓN

Es posible aproximar el ángulo α en el triángulo rectángulo.




si : $\frac{b}{a} \geq 10$

Se calcula de manera aproximada mediante:

$$\alpha = \left(\frac{a}{b}\right)57{,}3°$$

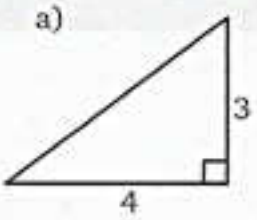
team CALAPENSHKO



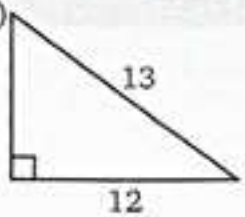
## EJERCICIOS DE APLICACIÓN

**1.** Usando el teorema de Pitágoras, determine la longitud de los lados que faltan:

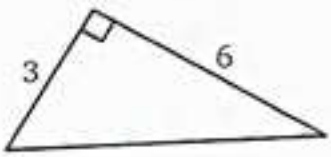
a)




b)




c)




d)

**2.** Indique verdadero (V) o falso (F):

( ) ...Si $\text{sen}\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

( ) ...Si $\tan\beta = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{sen}\beta = \frac{4}{5}$

( ) ...Si $\cos\theta = 0{,}4 \Rightarrow \sec\theta = 2{,}5$

( ) ...Si $\csc\phi = 2 \Rightarrow \cot\phi = \sqrt{3}$

**3.** Coloque el signo de relación (>, <, =) correspondiente en cada cuadro:

a) $\text{sen}\,30^\circ$ ☐ $\cos 60^\circ$

b) $\tan 45^\circ$ ☐ $\sec 60^\circ$

c) $\cot 37^\circ$ ☐ $\cos^2 30^\circ$

d) $\sec 53^\circ$ ☐ $2\sec 30^\circ$

e) $\cot 45^\circ$ ☐ $\text{sen}\,30^\circ$

f) $3\cos^2 60^\circ$ ☐ $\tan 53^\circ$

**4.** En cada caso, indique el menor valor positivo de: $\alpha, \beta, \theta, \phi, \omega, \lambda$

a) $\text{sen}\,\alpha = \cos 2\alpha$

b) $\tan\beta = \cot(10^\circ + \beta)$

c) $\text{sen}\,\theta \cdot \csc(60^\circ - \theta) = 1$

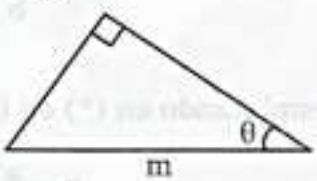
d) $\cos 3\phi \cdot \sec 45^\circ = 1$

e) $\tan(\omega + 10^\circ)\cot(40^\circ - \omega) = 1$

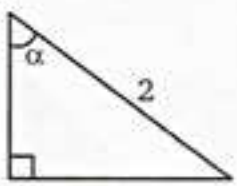
f) $\sec\lambda = \csc\left(\frac{\lambda}{2}\right)$

**5.** Aplicando la resolución de triángulos rectángulos, determine la longitud de los lados que faltan.

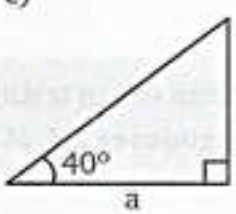
a)



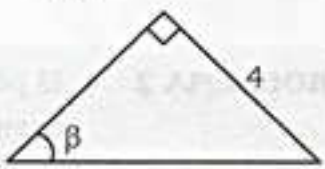

b)



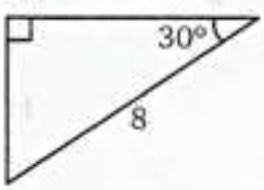

c)



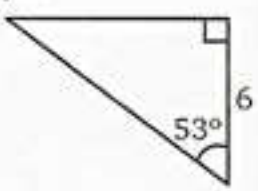

d)




e)




f)

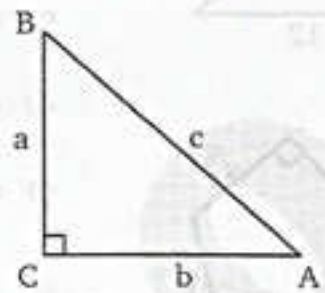


## PROBLEMAS RESUELTOS

**PROBLEMA 1** En un triángulo rectángulo ABC (recto en C) reduzca:

$$\sec A \cdot \csc B - \tan A \cdot \cot B$$

**Resolución:** Dado el $\triangle_{ABC}$ recto en "C"




Por el teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \ldots\ldots (*)$$

Sea "P" lo pedido $P = \sec A \cdot \csc B - \tan A \cdot \cot B$

$$P = \frac{c}{b} \cdot \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{c^2 - a^2}{b^2} \quad \ldots\ldots (**)$$

Reemplazando en (*) en (**)

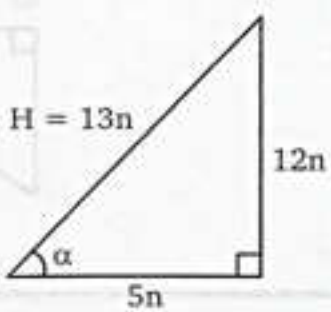
$$P = \frac{a^2 + b^2 - a^2}{b^2} = \frac{b^2}{b^2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{P = 1}$$

**PROBLEMA 2** El perímetro de un triángulo rectángulo es 300 m. Si la tangente de uno de los ángulos agudos es 2,4. ¿Cuánto mide el cateto menor?

**Resolución:** Del enunciado dibujamos el triángulo rectángulo donde sea $\tan\alpha = 2{,}4$

$$\tan\alpha = \frac{12}{5}$$



**A todo el público en general:**

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

**Este libro no debe ser prostituito monetariamente**, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

**28 de agosto del 2020**

team CALAPENSHKO


Por Pitágoras la hipotenusa es 13n

$$H^2 = (12n)^2 + (5n)^2 \rightarrow H = 13n$$

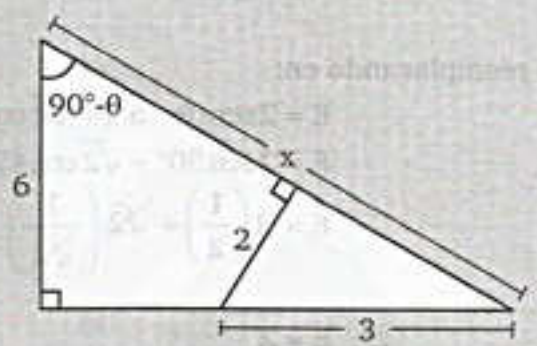
Por condición, el perímetro es 300:

$$13n + 12n + 5n = 300 \rightarrow n = 10$$

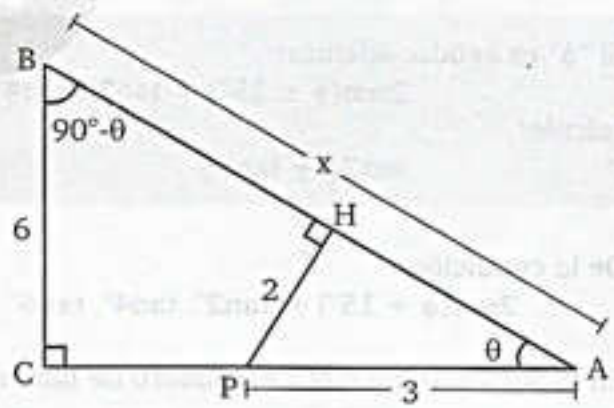
Finalmente el cateto menor:

$$\therefore \quad \mathbf{5n = 50\ m}$$

**PROBLEMA 3** De la figura, determine la longitud de x.




**Resolución:**




Del gráfico:

* En el $\triangle_{ACB}$: $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{6}{x}$

* En el $\triangle_{AHP}$: $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{2}{3}$

Luego igualando las razones trigonométricas

$$\frac{6}{x} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 9}$$

**PROBLEMA 4** Si $\theta$ es el valor de un ángulo agudo tal que:

$$\operatorname{sen}(3\theta-20^\circ)\cdot\csc(\theta+50^\circ)=\frac{\tan 40^\circ}{\cot 50^\circ}$$

calcule:

$$E=2\operatorname{sen}(\theta-5^\circ)+\sqrt{2}\cos(\theta+10^\circ)$$

**Resolución:**

De la condición : $\operatorname{sen}(3\theta-20^\circ)\cdot\csc(\theta+50^\circ)=\dfrac{\tan 40^\circ}{\cot 50^\circ}$

$$\operatorname{sen}(3\theta-20^\circ)\cdot\csc(\theta+50^\circ)=\frac{\cot 50^\circ}{\cot 50^\circ}$$

$$\operatorname{sen}(3\theta-20^\circ)\cdot\csc(\theta+50^\circ)=1$$

Propiedad de las R. T. recíprocas:

$$3\theta-20^\circ=\theta+50^\circ$$

$$2\theta=70^\circ \Rightarrow \theta=35^\circ$$

Luego reemplazando en:

$$E=2\operatorname{sen}(\theta-5^\circ)+\sqrt{2}\cos(\theta+10^\circ)$$

$$E=2\operatorname{sen}30^\circ+\sqrt{2}\cos 45^\circ$$

$$E=\cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)+\cancel{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\right)$$

$$\therefore\ E=2$$

**PROBLEMA 5** Si "$\phi$" es agudo, además:

$$2\operatorname{sen}(\phi+15^\circ)=\tan 2^\circ.\tan 4^\circ.\tan 6^\circ\ldots.\tan 84^\circ.\tan 86^\circ.\tan 88^\circ$$

calcule:

$$\operatorname{sen}2\phi+\tan 3\phi$$

**Resolución:**

De la condición:

$$2\operatorname{sen}(\phi+15^\circ)=\tan 2^\circ.\tan 4^\circ.\tan 6^\circ.\tan 8^\circ\ldots.\tan 84^\circ.\tan 86^\circ.\tan 88^\circ$$

En el Segundo miembro el número de factores en 44

$$2\operatorname{sen}(\phi+15^\circ)=\tan 2^\circ.\tan 4^\circ.\tan 6^\circ\ldots.\tan 44^\circ.\underbrace{\tan 46^\circ\ldots.\tan 86^\circ.\tan 88^\circ}_{\text{CO-RT}}$$

$$2\operatorname{sen}(\phi+15^\circ)=\tan 2^\circ.\tan 4^\circ.\tan 6^\circ\ldots.\tan 44^\circ.\cot 44^\circ\ldots.\cot 4^\circ.\cot 2^\circ$$

Ordenando el Segundo miembro (el orden de los factores no altera el producto)

$$2\operatorname{sen}(\phi+15^\circ)=\underbrace{\tan 2^\circ.\cot 2^\circ}_{1}.\underbrace{\tan 4^\circ.\cot 4^\circ}_{1}.\underbrace{\tan 6^\circ.\cot 6^\circ}_{1}\ldots.\underbrace{\tan 44^\circ.\cot 44^\circ}_{1}$$

$$2\operatorname{sen}(\phi+15^\circ)=1.1.1.\ldots.1$$

$$2\operatorname{sen}(\phi+15^\circ)=1$$

$$\operatorname{sen}(\phi+15^\circ)=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}\phi+15^\circ=30^\circ\\ \phi=15^\circ\end{cases}$$

team CALAPENSHKO

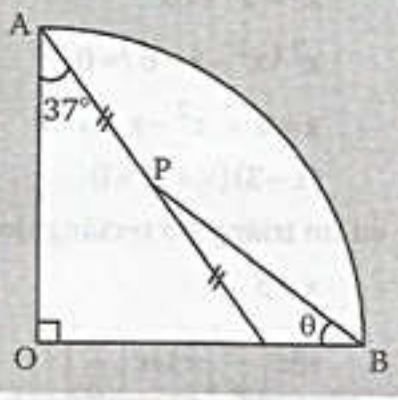

Luego lo pedido: $E = \text{sen}2\phi + \tan 3\phi$

Reemplazando: $\phi = 15°$

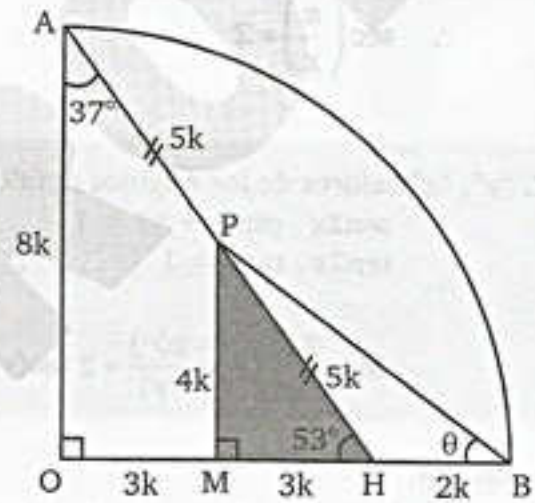
$$E = \text{sen}30° + \tan 45° = \frac{1}{2} + 1$$

$$\therefore \ \mathbf{E = \frac{3}{2}}$$

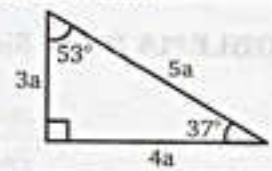
**PROBLEMA 6** Del gráfico calcule tanθ (AOB: es sector circular)




**Resolución:**




**Sabemos:**




En el $\triangle_{AOH}$, sea: $AH = 10k$

$OA = 8k$ ; $OH = 6k \Rightarrow HB = 2k$

Trazamos altura PM y en el $\triangle_{PMH}$

$PM = 4k \ \wedge \ MH = 3k$

Finalmente: $\tan\theta = \dfrac{4k}{5k}$

$$\therefore \ \mathbf{\tan\theta = \frac{4}{5}}$$

**PROBLEMA 7** Si $\alpha$ y $\beta$ son los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, calcule el valor de:

$\sec\left(\frac{\pi}{x}\right)$, sabiendo que: $\tan\alpha = x^5$ y $\tan\beta = \frac{1}{x^4+6x^3}$.

**ADMISIÓN UNMSM 2017 - I**

**Resolución:** Se sabe que $\alpha$ y $\beta$ son ángulos agudos de un triángulo rectángulo. Se cumple que:

$$\alpha+\beta=90°$$
$$\tan\alpha=\cot\beta$$

Del dato:
$$x^5=x^4+6x^3$$
$$x^3(x^2-x-6)=0$$
$$x=0 \vee x^2-x-6=0$$
$$(x-3)(x+2)=0$$

Solo es posible en un triángulo rectángulo:
$$x=3$$

Finalmente:
$$\sec\left(\frac{\pi}{x}\right)=\sec\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\therefore \quad \sec\left(\frac{\pi}{x}\right)=2$$

**PROBLEMA 8** Siendo "x", "y", "z" valores de los ángulos agudos que cumplen:

$\text{sen}2x \cdot \csc(x+y) = 1$ .....(1)
$\tan2x \cdot \tan z = 1$ .....(2)

calcule:

$$M=\frac{3\cos(x+20°)}{\text{sen}(70°-y)}+2\tan(y+z)\tan x$$

**Resolución:** De la ecuación (1):

$\text{sen}2x \cdot \csc(x+y) = 1$ (propiedad de las RT recíprocas)
$2x = x + y$
$x = y$ ..... (*)

De la ecuación (2): $\tan2x \cdot \underbrace{\tan z}_{\text{CO.RT}} = 1$

$\tan2x \cdot \cot(90° - z) = 1$ (propiedad de las RT recíprocas)
$2x = 90° - z$
$2x + z = 90°$ .....(**)

Reemplazando (*) en (**):

$$\begin{cases} x + x + z = 90° \\ y + z = 90° - x \quad .....(***) \end{cases}$$

team CALAPENSHKO


Luego lo pedido: $M=\dfrac{3\cos(x+20°)}{\operatorname{sen}(70°-y)}+2\tan(y+z)\,.\,\tan(x)$

Como: $70°-x \wedge x+20°$ son complementarios

$$\operatorname{sen}(70°-x)=\cos(x+20°)$$

Reemplazando: $M=\dfrac{3\cos(x+20°)}{\cos(x+20°)}+2\tan(90°-x)\,.\,\tan x$

$$M=3+2\underbrace{\cot x\,.\,\tan x}_{1}=3+2(1)$$

$\therefore\ \mathbf{M=5}$

**PROBLEMA 9** En un triángulo ABC (recto en C), se cumple que:

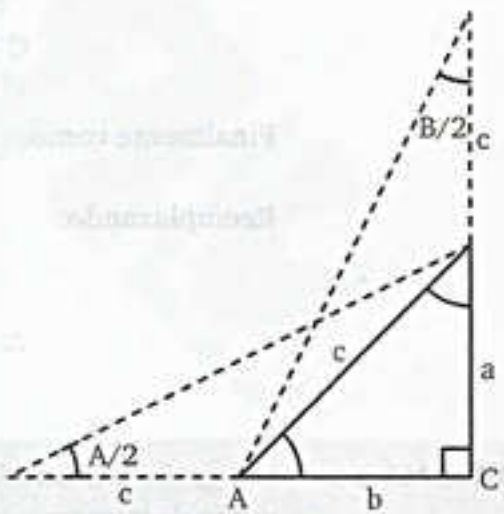
$$\tan A=\frac{\operatorname{sen}\frac{A}{2}\left[2\operatorname{sen}\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}\right]}{\operatorname{sen}\frac{B}{2}\left[2\operatorname{sen}\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right]}$$

Halle el valor de: $R=\dfrac{3\sec^2 A}{\sqrt{2}\operatorname{sen}B}$ **ADMISIÓN CALLAO 2017 - I**

**Resolución:** En un triángulo ABC, recto en C, se cumple que:

$$\tan A=\frac{\operatorname{sen}\frac{A}{2}\left[2\operatorname{sen}\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}\right]}{\operatorname{sen}\frac{B}{2}\left[2\operatorname{sen}\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right]}$$

$$\tan A=\frac{\dfrac{2\operatorname{sen}\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{B}{2}}}{\dfrac{2\operatorname{sen}\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}}{\operatorname{sen}\frac{A}{2}}}=\frac{2+\cot\frac{B}{2}}{2+\cot\frac{A}{2}}$$




$$\frac{a}{b}=\frac{2+\frac{a+c}{b}}{2+\frac{b+c}{a}}$$

Efectuando : $a=b$, entonces $A=B=45°$

$$\therefore\ R=\frac{3(\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}}=6$$

**A todo el público en general:**

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

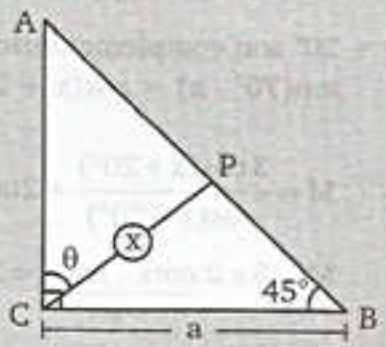
**Este libro no debe ser prostituito monetariamente**, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

**28 de agosto del 2020**

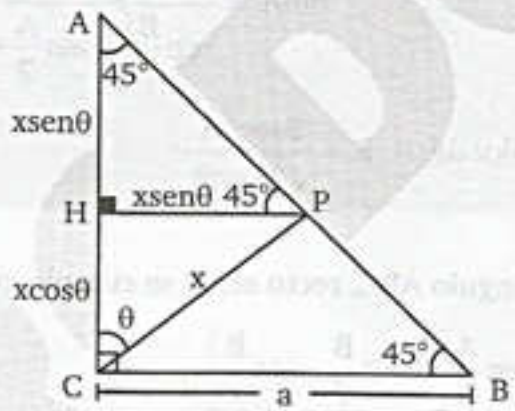
**PROBLEMA 10** Exprese la longitud de "x" del gráfico, en términos de "a" y "θ"




**Resolución:** En el $\triangle_{ACB}$: de "P" se traza PH $\perp$ AC $\Rightarrow$ PH = AH

Aplicamos resolución de triángulos rectángulos en $\triangle$:

$$\text{CHP y PHA} \Rightarrow \begin{cases} CH = x\cos\theta \\ PH = x\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$



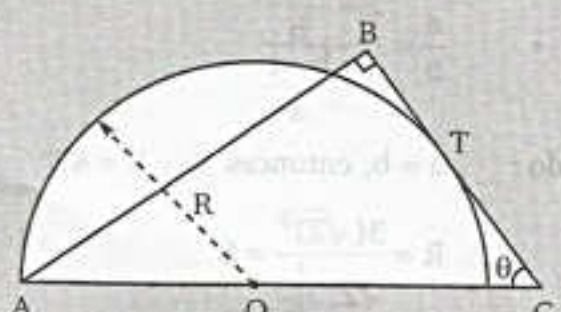

Finalmente como: AC = BC

Reemplazando: $x\,\text{sen}\theta + x\cos\theta = a$

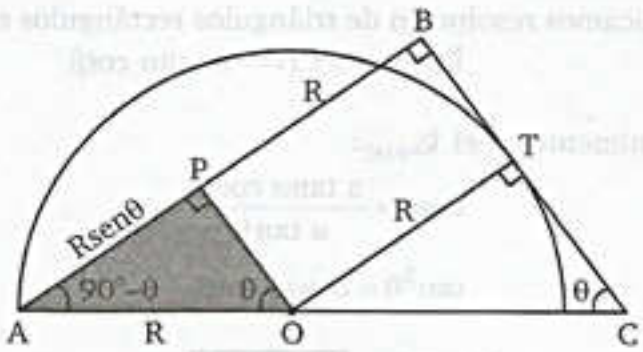
$x(\text{sen}\theta + \cos\theta) = a$

$$\therefore\ x = \frac{a}{\text{sen}\,\theta + \cos\theta}$$

**PROBLEMA 11** Del gráfico mostrado, exprese la longitud de AB en términos de "R" y "θ" (T: es punto de tangencia; O: centro de la semicircunferencia)



team CALAPENSHKO


Unimos : $OT = R \Rightarrow PB = R$

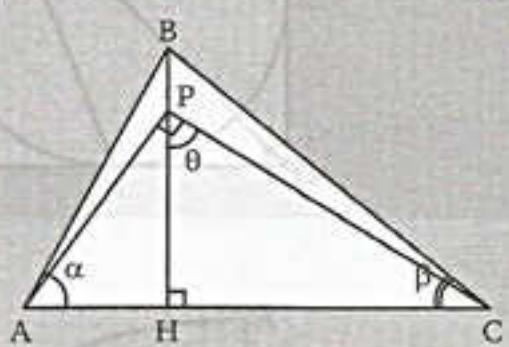
Trazamos la altura OP y en el $\triangle_{OPA}$ aplicamos resolución de triángulos:

$$AP = R\,\text{sen}\,\theta$$

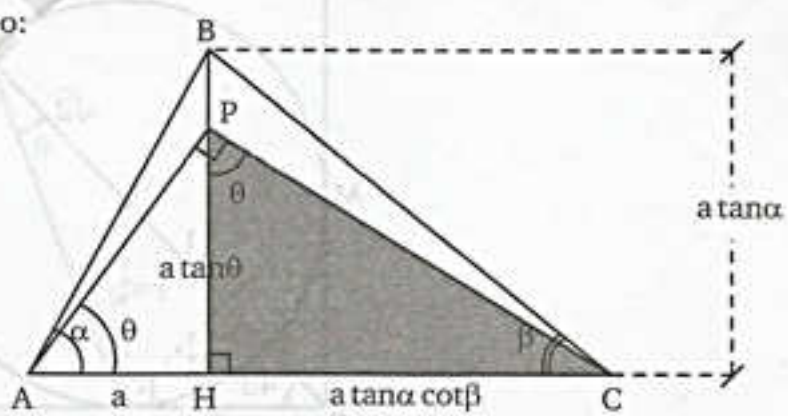
Finalmente : $AB = AP + PB = R\,\text{sen}\,\theta + R$

$$\therefore\ \mathbf{AB = R(\text{sen}\,\theta + 1)}$$

**PROBLEMA 12** Del gráfico, exprese el valor de "$\tan\theta$" en términos de: "$\alpha$" y "$\beta$"




**Resolución:** Del gráfico:




Sea: $AH = a$

Aplicamos resolución de triángulos rectángulos en el:

$$\begin{cases} \triangle_{AHB} \Rightarrow BH = a\tan\alpha \\ \triangle_{AHP} \Rightarrow PH = a\tan\theta \end{cases}$$

team CALAPENSHKO


Aplicamos resolución de triángulos rectángulos en el:

$$\triangle_{BHC} \Rightarrow CH = a\tan\alpha\cot\beta$$

Finalmente en el $\triangle_{PHC}$:

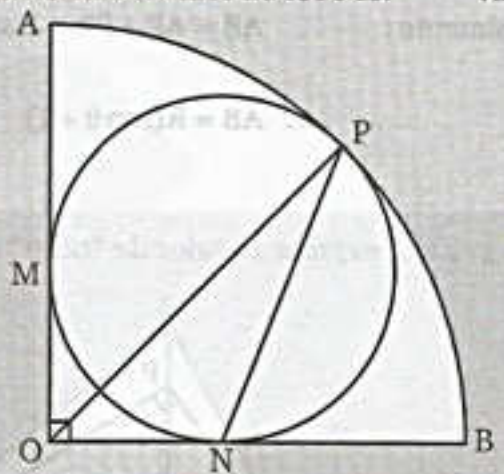
$$\tan\theta = \frac{a\tan\alpha\cot\beta}{a\tan\theta}$$

$$\tan^2\theta = \tan\alpha \cdot \cot\beta$$

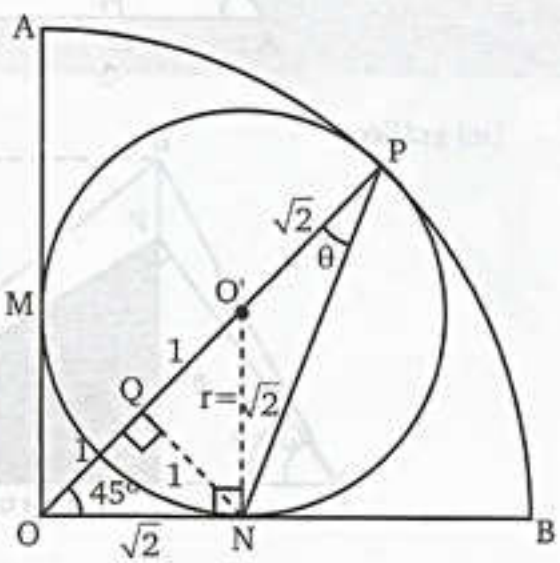
$$\therefore \tan\theta = \sqrt{\tan\alpha \cdot \cot\beta}$$

**PROBLEMA 13** En la figura mostrada M, N y P son puntos de tangencia de la circunferencia inscrita en el sector circular AOB.

Si $m\angle OPN = \theta$ rad, entonces el valor de $\cot\theta$ es: **ADMISIÓN UNI 2016-I**




**Resolución:**




Asumiendo $r = \sqrt{2}$, para facilitar cálculos: OQN: notable de 45°

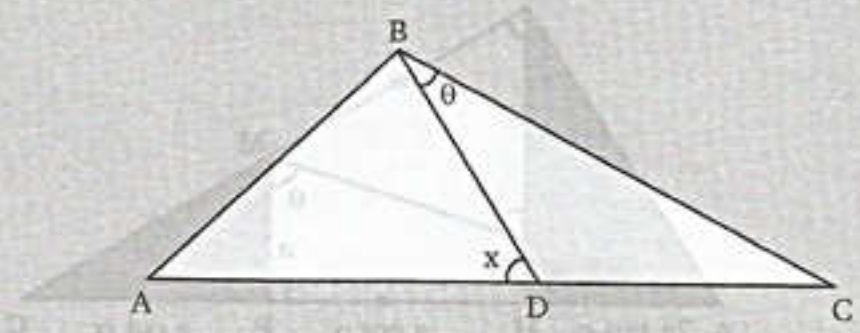
$$O'N = O'P = \sqrt{2}$$

$$\cot\theta = \sqrt{2} + 1$$

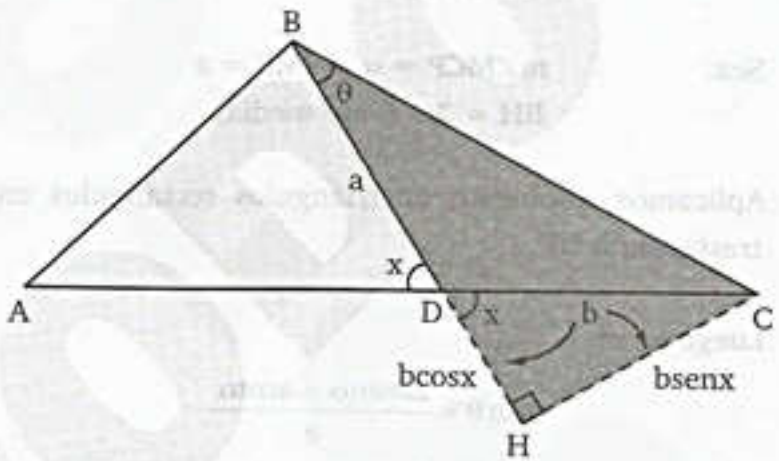
team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 14** Exprese el valor de "tanθ"; si: BD = a, CD = b, en términos de a, b y x.




**Resolución:** Del gráfico prolongamos BD y desde "C" trazamos una perpendicular a la prolongación.




Aplicando resolución de triángulos rectángulos

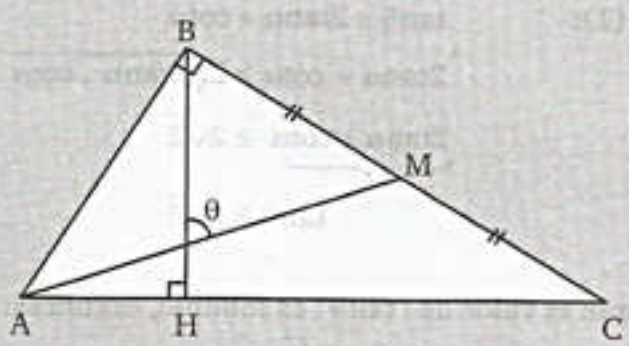
En el $\triangle_{DHC}$: $CH = b \operatorname{sen} x$

$DH = b \cos x$

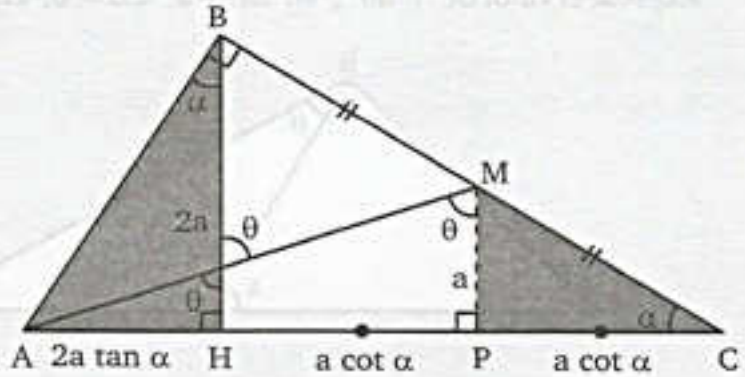
En el $\triangle_{BHC}$:

$$\therefore \tan\theta = \frac{b \operatorname{sen} x}{a + b\cos x}$$

**PROBLEMA 15** Si en el gráfico el valor del ángulo "θ" es mínimo, determine: $\sec\theta + 9\operatorname{sen}^2\theta$



**Resolución:** Del gráfico:




Trazamos la altura MP

$$CP = PH$$

Sea: $m\angle MCP = \alpha \wedge MP = a$

$BH = 2a$ (base media)

Aplicamos resolución de triángulos rectángulos en el $\triangle_{MPC} \wedge \triangle_{AHB}$, trasladando "θ"

Luego en el $\triangle_{APM}$:

$$\tan\theta = \frac{2a\tan\alpha + a\cot\alpha}{a}$$

$$\tan\theta = 2\tan\alpha + \cot\alpha \quad \ldots\ldots (1)$$

Dado que "θ" ∧ "α" son las medidas de los ángulos agudos y además el valor de "θ" es mínimo entonces "tan θ" es mínimo:

**Recordar:**

Si: $A, B \in \mathbb{R}^+$

Se cumple: $MA \geq MG$

$$\Rightarrow A + B \geq 2\sqrt{AB}$$

De (1): $\tan\theta = 2\tan\alpha + \cot\alpha$

$$2\tan\alpha + \cot\alpha \geq 2\sqrt{2\tan\alpha \cdot \cot\alpha}$$

$$\underbrace{2\tan\alpha + \cot\alpha}_{} \geq 2\sqrt{2}$$

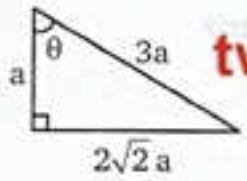
$$\tan\theta \geq 2\sqrt{2}$$

Como: el valor de "tan θ" es mínimo, entonces:

$$\tan\theta = 2\sqrt{2}$$

team CALAPENSHKO


Luego:

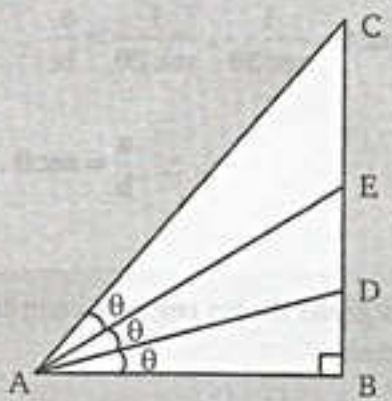



twitter.com/calapenshko

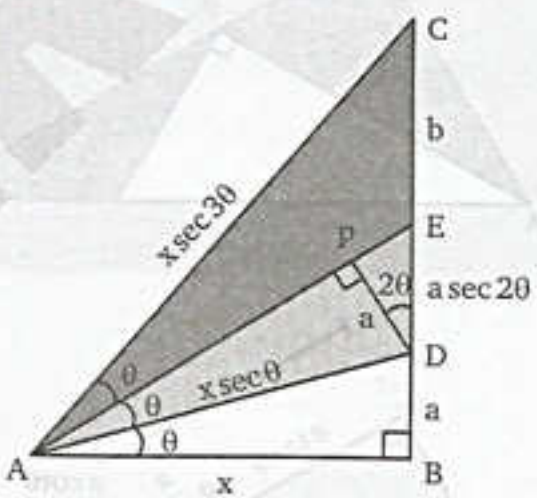
Lo pedido: $E = \sec\theta + 9\text{sen}^2\theta = 3 + 9\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2$

$\therefore$ **E = 11**

**PROBLEMA 16** Del gráfico exprese: $\frac{BD}{EC}$ en términos de "θ"




**Resolución:**




Sea $BD = a \wedge EC = b$

Entonces lo pedido es: "$\frac{a}{b}$"

Trazamos DP ⊥ AE (P en AE)

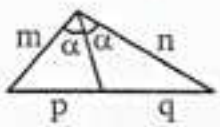
i) Propiedad de la bisectriz

DB = DP

Sea: AB = x

Aplicamos resolución de triángulos rectángulos en el $\triangle_{ABD} \wedge \triangle_{ABC}$

Luego: Aplicamos la propiedad de la bisectriz

ii) 


$$\Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{p}{q}$$

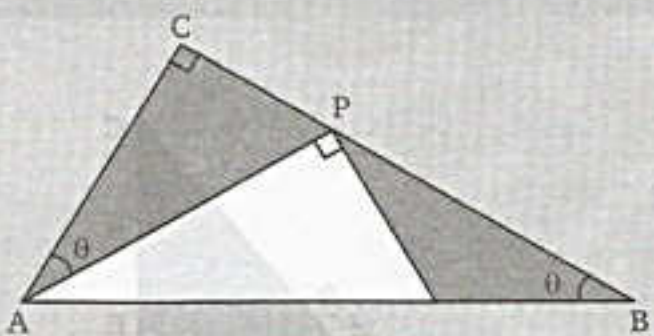
Entonces en el triángulo ADC (Prop (ii))

$$\frac{x\sec\theta}{x\sec 3\theta} = \frac{a\sec 2\theta}{b}$$

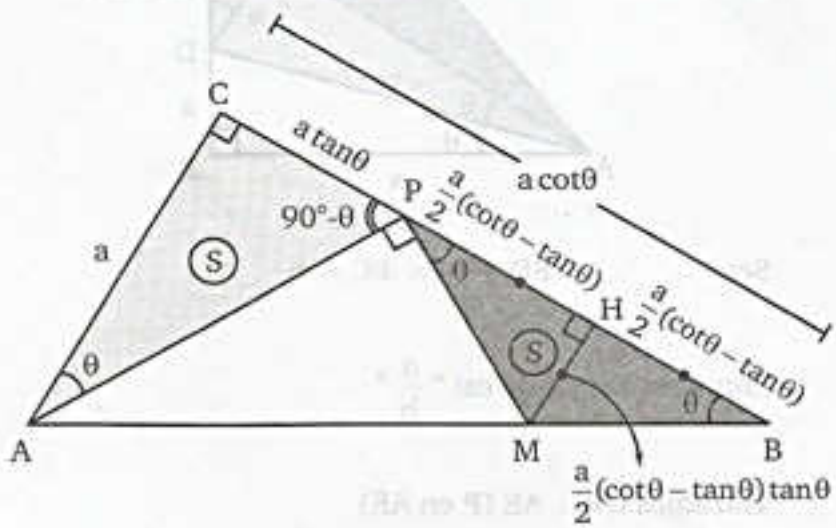
$$\sec\theta \cdot \frac{1}{\sec 3\theta} \cdot \frac{1}{\sec 2\theta} = \frac{a}{b}$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \sec\theta \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 3\theta$$

**PROBLEMA 17** En la figura si las áreas de las regiones sombreadas son del mismo valor. Calcule: $\cot\theta + \tan\theta$




**Resolución:**



Sea: $AC = a \Rightarrow PC = a\tan\theta$

Aplicamos resolución de triángulos rectángulos ($\triangle_{ACB}$)

Trazamos la altura MH:

$$MH = \frac{a}{2}(\cot\theta - \tan\theta)\tan\theta$$

Luego: $S = \dfrac{b \cdot h}{2}$

$$S = \frac{a^2\tan\theta}{2} \wedge S = \frac{a^2(\cot\theta - \tan\theta)^2\tan\theta}{4}$$

Igualando áreas:

$$\frac{a^2\tan\theta}{2} = \frac{a^2(\cot\theta - \tan\theta)^2\tan\theta}{4}$$

Tenemos: $(\cot\theta - \tan\theta)^2 = 2$

Desarrollando: $\cot^2\theta - 2\underbrace{\cot\theta\tan\theta}_{1} + \tan^2\theta = 2 \rightarrow \cot^2\theta + \tan^2\theta = 4$

Finalmente; sumando 2 a ambos miembros:

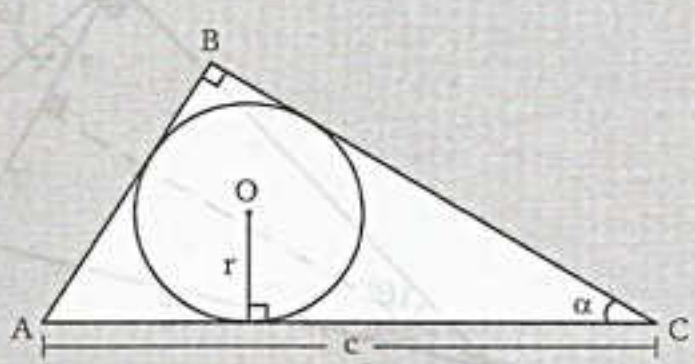
$$\cot^2\theta + 2 + \tan^2\theta = 6$$

$$\cot^2\theta + 2\underbrace{\cot\theta\tan\theta}_{1} + \tan^2\theta = 6$$

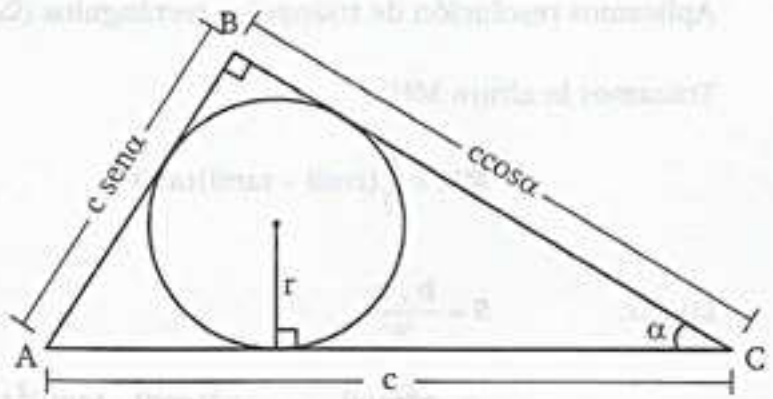
$$(\cot\theta + \tan\theta)^2 = 6$$

$$\therefore \quad \cot\theta + \tan\theta = \sqrt{6}$$

**PROBLEMA 18** En la siguiente figura; la relación $\dfrac{4r^2}{c^2}$ es equivalente a:



**Resolución:** Del gráfico mostrado completando los catetos por resolución de ◺




Por Poncelet $c\,\text{sen}\,\alpha + c\cos\alpha = c + 2r$

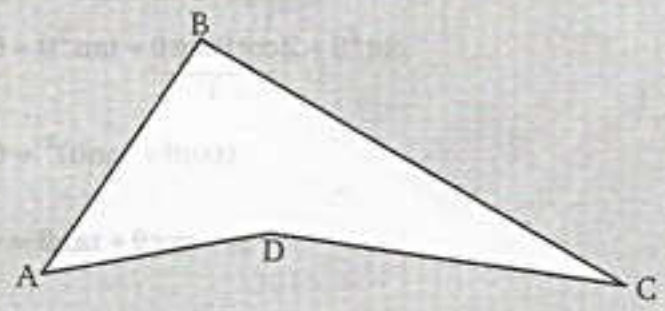
$$2r = c(\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha - 1)$$

Elevando al cuadrado m.a.m:

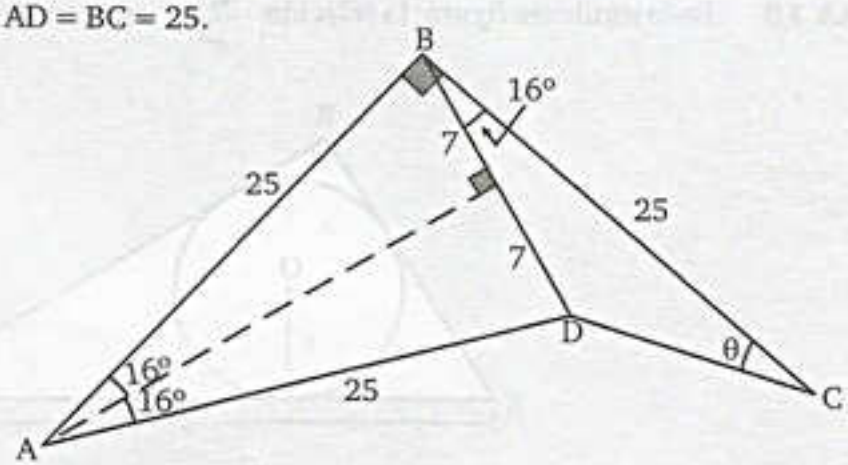
$$4r^2 = c^2(\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha - 1)^2$$

$$\therefore \quad \frac{4r^2}{c^2} = 2(1 - \text{sen}\,\alpha)(1 - \cos\alpha)$$

**PROBLEMA 19** En la figura mostrada: AB = AD = BC, m∠ ABC = 90°, m∠ BAD = 32°, m∠BCD = θ. Calcule: cot θ.



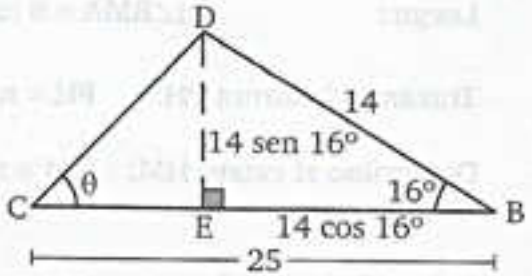

**Resolución:** Sea: AB = AD = BC = 25.



team CALAPENSHKO



En el Δ BCD tenemos:



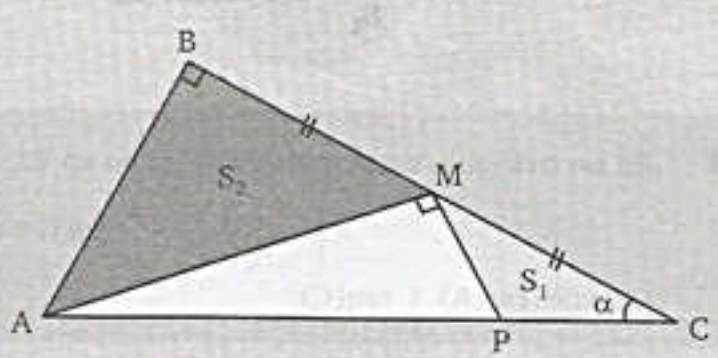

En el $\triangle_{CED}$:

$$\cot\theta = \frac{25 - 14\cos 16°}{14\,\text{sen}16°}$$

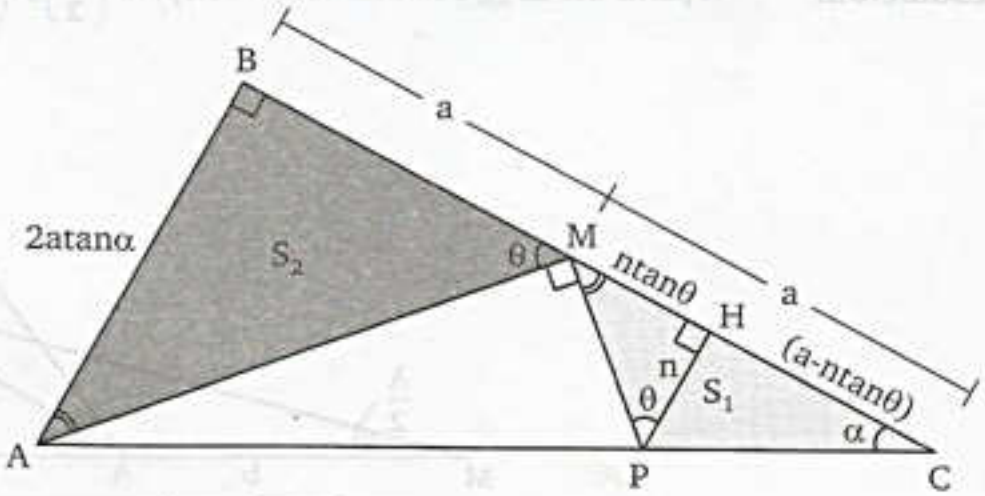
$$\cot\theta = \frac{25 - 14\left(\frac{24}{25}\right)}{14\left(\frac{7}{25}\right)} = \frac{\frac{289}{25}}{\frac{98}{25}}$$

$$\therefore\ \cot\theta = 2{,}95$$

**PROBLEMA 20** Del gráfico calcule: $\frac{S_2}{S_1}$




**Resolución:**



**A todo el público en general:**

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

**Este libro no debe ser prostituito monetariamente**, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

**28 de agosto del 2020**

team CALAPENSHKO



Del dato: $CM = MB = a$

Luego: $m\angle BMA = \theta \Rightarrow \tan\theta = 2\tan\alpha$

Trazamos la altura PH: $PH = n$

Determino el cateto HM: $HM = n \cdot \tan\theta$

Del gráfico en el $\triangle_{PHC}$: $\tan\alpha = \dfrac{n}{a - n\tan\theta}$

Reemplazando $(\tan\theta = 2\tan\alpha)$: $\tan\alpha = \dfrac{n}{a - 2n\tan\alpha}$

Despejando: $n = \dfrac{a\tan\alpha}{1 + 2\tan^2\alpha}$

Finalmente: $$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\dfrac{(2a\tan\alpha)\cdot a}{2}}{\dfrac{a}{2}\left(\dfrac{a\tan\alpha}{1+2\tan^2\alpha}\right)}$$

Simplificando:

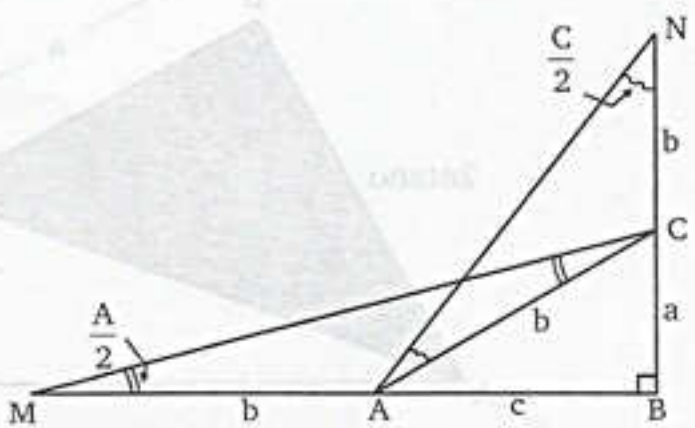
$$\therefore \quad \frac{S_2}{S_1} = 2(1 + 2\tan^2\alpha)$$

**PROBLEMA 21** En un triángulo rectángulo ABC (recto en B), se cumple que:

$$\left[\cot\left(\frac{A}{2}\right) + 4\right] \cdot \cot C = \cot\left(\frac{C}{2}\right) + 5$$

Calcule: csc(A) + tan(C)

**Resolución:** A partir del $\triangle_{ABC}$, construimos los $\triangle$ para $\left(\dfrac{A}{2}\right)$ y $\left(\dfrac{C}{2}\right)$, así:



team CALAPENSHKO


* Del $\triangle_{MBC}$ : $\cot\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{b+c}{a}$

* Del $\triangle_{NBA}$ : $\cot\left(\frac{C}{2}\right)=\frac{a+b}{c}$

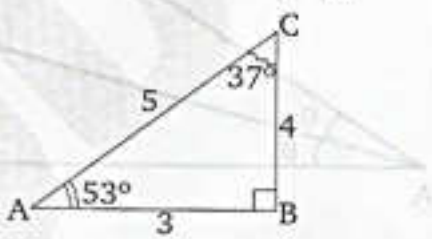
Condición:

$$\left[\cot\left(\frac{A}{2}\right)+4\right].\cot C=\cot\left(\frac{C}{2}\right)+5$$

Reemplazando:

$$\left[\frac{b+c}{a}+4\right]\left(\frac{a}{c}\right)=\frac{a+b}{c}+5 \Rightarrow \left[\frac{b+c+4a}{a}\right]\left(\frac{a}{c}\right)=\left(\frac{a+b+5c}{c}\right)$$

$$\Rightarrow b+c+4a=a+b+5c \qquad \Rightarrow 3a=4c \Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{4}{3}$$

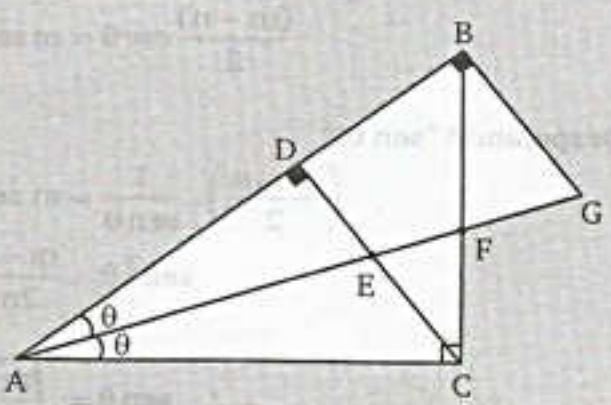



Luego: $A = 53° \wedge C = 37°$

Así: $\csc A + \tan C = \csc 53° + \tan 37° = \frac{5}{4}+\frac{3}{4}$

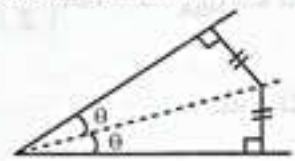
$\therefore$ **$\csc A + \tan C = 2$**

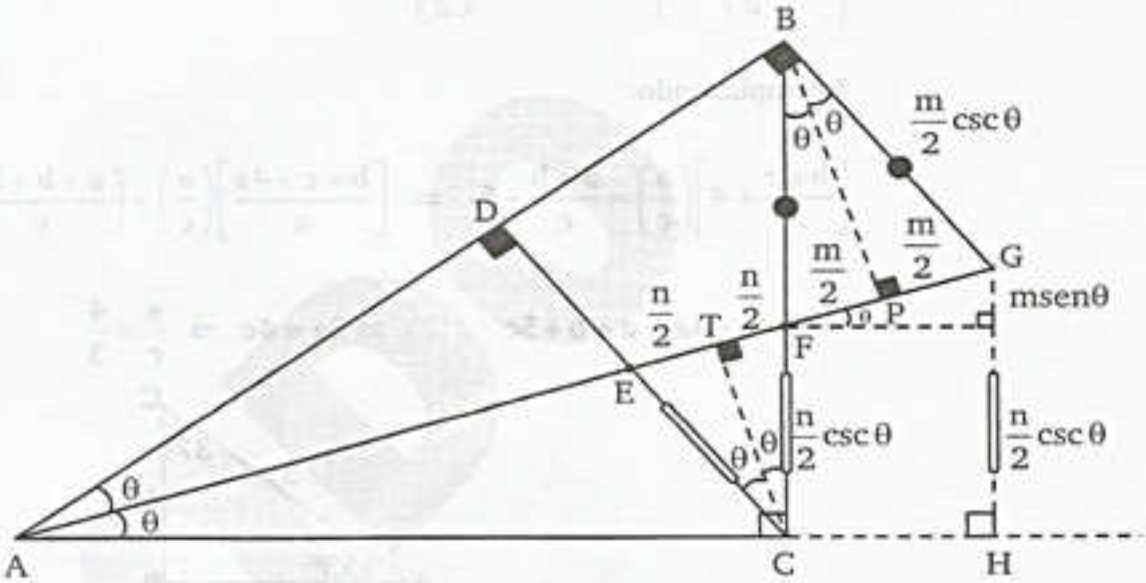
**PROBLEMA 22** Del gráfico, si $EF = n \wedge FG = m$. Calcule el valor de "$\operatorname{sen}\theta$"



**Resolución:** Del gráfico completando los ángulos

**Recordar:**
Propiedad de la bisectriz




En el ΔECF: Trazamos la altura CT

En el ΔFBG: Trazamos la altura BP

Por la propiedad, se cumple que:

$$BG = GH$$

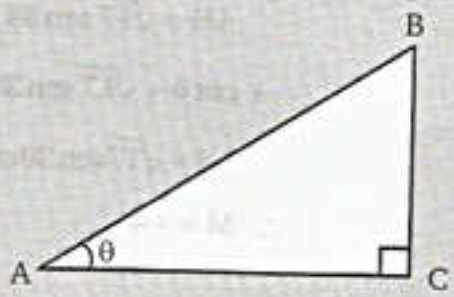
Reemplazando :
$$\frac{m}{2}\csc\theta = m\,\text{sen}\,\theta + \frac{n}{2}\csc\theta$$

Factorizando :
$$\frac{m}{2}\csc\theta - \frac{n}{2}\csc\theta = m\,\text{sen}\,\theta$$
$$\frac{(m-n)}{2}\csc\theta = m\,\text{sen}\,\theta$$

Despejando "sen θ":
$$\left(\frac{m-n}{2}\right).\frac{1}{\text{sen}\,\theta} = m\,\text{sen}\theta$$
$$\text{sen}^2\theta = \frac{m-n}{2m}$$

$$\therefore \quad \text{sen}\,\theta = \sqrt{\frac{m-n}{2m}}$$

**PROBLEMA 23** En la figura mostrada; si $AC = \tan x + 3\cot x$ y $BC = 4$, entonces halle el mínimo valor de $\tan\theta$. Nota: $x \in \langle 0; 90\rangle$

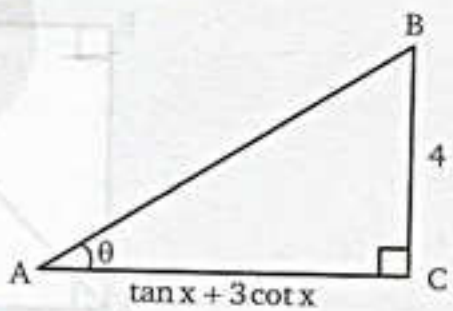



**Resolución:**

$\tan\beta + 2\sqrt{3}\cos(\beta + 15°) = ?$

Del gráfico: $\tan\theta = \dfrac{4}{\tan x + 3\cot x}$

Por condición: $(\tan\theta)_{máx.}$




Por la desigualdad de medias:

$\overline{MA}(\tan x; 3\cot x) \geq \overline{MG}(\tan x; 3\cot x$

$\dfrac{\tan x + 3\cot x}{2} \geq \sqrt{(\tan x)(3\cot x)}$

$\tan x + 3\cot x \geq 2\sqrt{3}$

$\rightarrow (\tan x + 3\cot x)_{mín.} = 2\sqrt{3}$

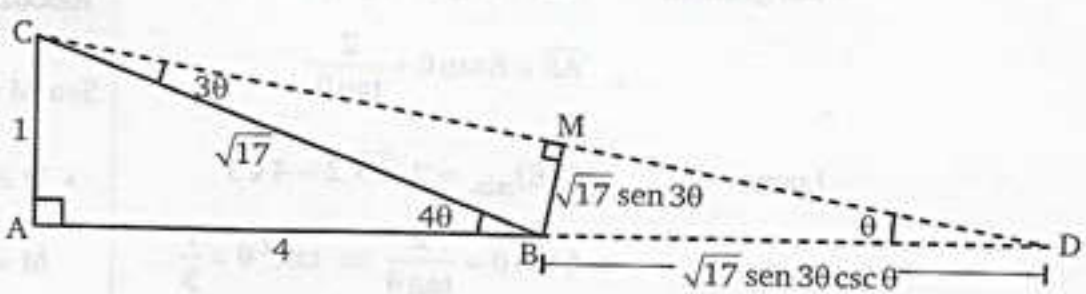
Así entonces: $(\tan\theta)_{máx.} = \dfrac{4}{2\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ (\tan\theta)_{máx.} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

**PROBLEMA 24** Si $\tan(4\theta) = \dfrac{1}{4}; \theta \in \left\langle 0; \dfrac{\pi}{8}\right\rangle$

Calcule el valor de: $M = (\sqrt{17}\,\text{sen}\,\theta\csc\theta - \cot\theta)$

**Resolución:** Dibujamos el $\triangle$ ABC




Prolongamos el lado BA hasta el punto D tal que:

$m\angle ADC = \theta \rightarrow m\angle ACD = 3\theta$

Por el teorema de Pitágoras, $BC = \sqrt{17}$

Trazamos la altura AH, tal que:

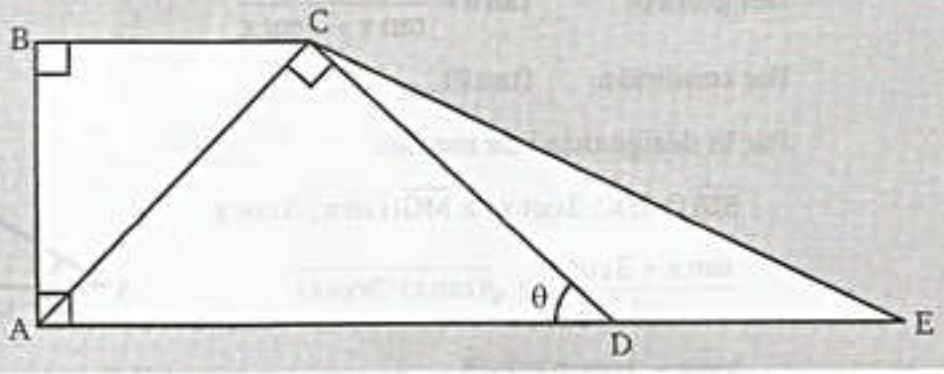
$$AH = \sqrt{17}\,\text{sen}\,3\theta \ \wedge \ AD = \sqrt{17}\,\text{sen}\,3\theta\csc\theta$$

$$\rightarrow \cot\theta = \sqrt{17}\,\text{sen}\,3\theta\csc\theta + 4$$

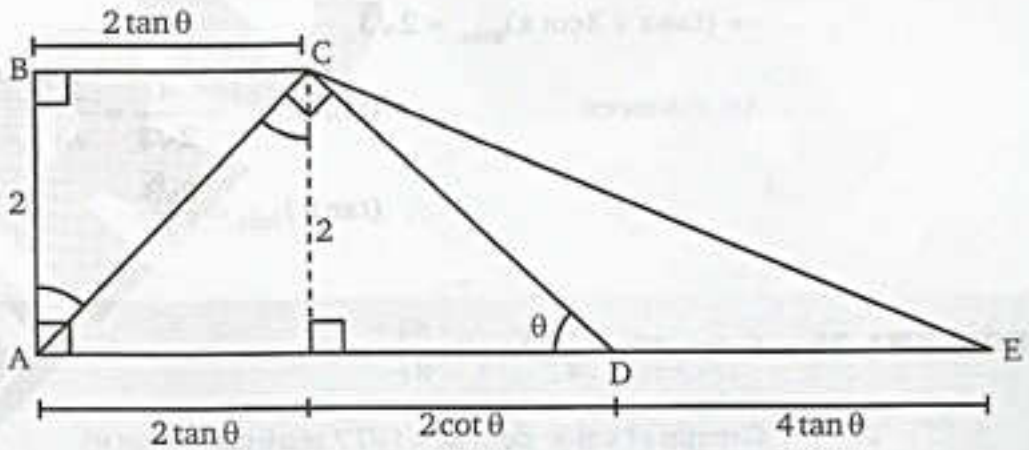
$$-4 = \sqrt{17}\,\text{sen}\,3\theta\csc\theta - \cot\theta$$

$$\therefore \ M = -4$$

**PROBLEMA 25** De la figura mostrada si AB = 2u, DE = 2BC halle tan θ, sabiendo además que AE es de longitud mínima.




**Resolución:**




Del gráfico: $\overline{AE} = 6\tan\theta + 2\cot\theta$

$$\overline{AE} = 6\tan\theta + \frac{2}{\tan\theta}$$

Luego: $(AE)_{\text{mín.}} = 2\sqrt{6\times 2} = 4\sqrt{3}$

$$\rightarrow 6\tan\theta = \frac{2}{\tan\theta} \Rightarrow \tan^2\theta = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \ \tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

**Recordar**

Sea $M = ax + \frac{b}{x}$; $a, b, x \in \mathbb{R}^+$

$\rightarrow M \geq 2\sqrt{ab}$

$M = 2\sqrt{ab}$, si : $ax = \frac{b}{x}$

team CALAPENSHKO


## PROBLEMAS PROPUESTOS

**1.** Si en un triángulo rectángulo ABC, recto en B se cumple:

$$\text{sen}A \cdot \cot A \cdot \text{sen}C = \frac{1}{16}$$

Halle: tan A

A) $\sqrt{11}$ B) $\sqrt{13}$ C) $\sqrt{15}$
D) $\sqrt{17}$ E) $\sqrt{19}$

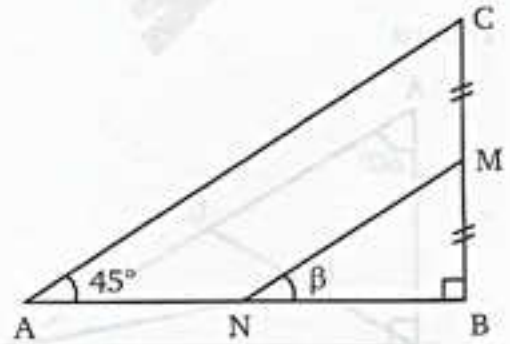
**2.** Si los lados de un triángulo rectángulo miden; "x", "2x + 2" y "2x + 3". Siendo x un número entero positivo, halle la tangente del mayor ángulo agudo.

A) 1, 6 B) 1, 8 C) 2, 2
D) 2, 4 E) 3, 2

**3.** En un triángulo rectángulo, el coseno de uno de sus ángulos agudos es 0,96.
Si su hipotenusa mide 50 m, halle el perímetro de dicho triángulo.

A) 112 m B) 224 m C) 96 m
D) 52 m E) 412 m

**4.** Del gráfico, halle: tanβ
Si: BN = 2AN



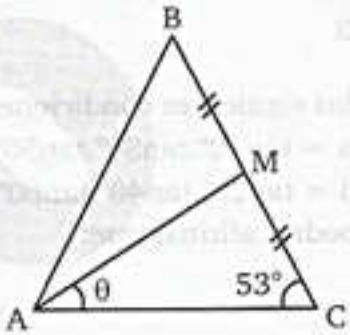

A) 0,25 B) 0,5 C) 0,6
D) 0,8 E) 0,75

**5.** Halle:

$$E = 4\text{sen}20° (\csc 20° + 3\sec 70°)$$

A) 12 B) 10 C) 8
D) 6 E) 16

**6.** Si en el gráfico: AB = BC.
Halle: tanθ




A) $\frac{2}{9}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{2}{3}$
D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{5}$

**7.** En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la bisectriz $\overline{AD}$ del ángulo A (D en $\overline{BC}$) tal que DC = 3BD.
Halle aproximadamente "$\cot\left(\frac{A}{4}\right)$"

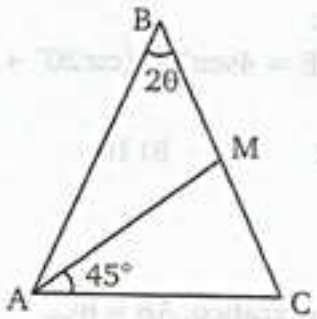
A) $\frac{\pi}{2}$ B) π C) $\frac{3\pi}{2}$
D) 2π E) $\frac{5\pi}{2}$

**8.** En un triángulo rectángulo, el cateto mayor es la media aritmética de los otros dos lados, halle la diferencia de las tangentes de los ángulos agudos.

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{5}{8}$
D) $\frac{9}{10}$ E) $\frac{7}{12}$

team CALAPENSHKO


**9.** Del gráfico mostrado, halle "csc θ"
Si: AB = BC y BM = MC




A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{6}$ C) $\sqrt{7}$
D) 3 E) $\sqrt{10}$

**10.** De las siguientes condiciones:
$\tan\alpha = \tan10°.\tan30°.\tan50°.\tan70°$ ....(i)
$\tan\beta = \tan20°.\tan40°.\tan60°.\tan80°$ ....(ii)
Se podría afirmar que:

A) $\alpha = \beta$ B) $\alpha + \beta = 90°$
C) $\alpha + \beta = 180°$
D) $\alpha - \beta = 90°$ E) $\alpha + \beta = 360°$

**11.** Considerando a "x" e "y" valores de los ángulos agudos que cumplen:

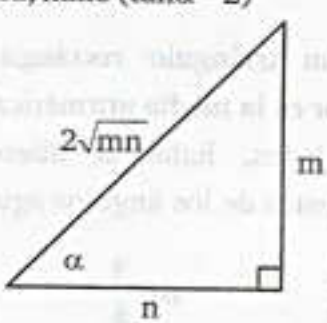
$\tan(60° - x) = \cot(x+30°) \cdot \tan(y+20°)$

Evalúe:

$$K = \frac{\operatorname{sen}(x+y+50°)\operatorname{sen}(5°+y)}{\cos(y-x-10°)}$$

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ E) $\sqrt{2}$

**12.** De la figura, halle $(\tan\alpha - 2)^2$

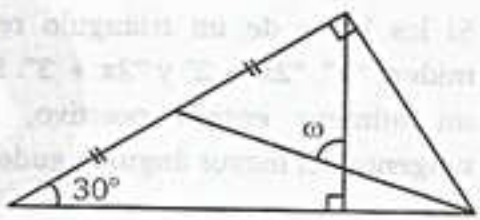



A) 1 B) 4 C) 2
D) 3 E) 0

**13.** Sobre el lado AC de un triángulo equilátero ABC se construye exteriormente un triángulo rectángulo ACD. Si $m\angle CAD = 30°$ y $m\angle CBD = x$, halle: $\tan^2 x$

A) 0, 08 B) 0, 12 C) 0, 16
D) 0, 18 E) 0, 25

**14.** De la figura, halle "tan ω"




A) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
D) $3\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

**15.** Si: $2\cos x + 3\tan y = 1 + 6\cos x \tan y$
halle:

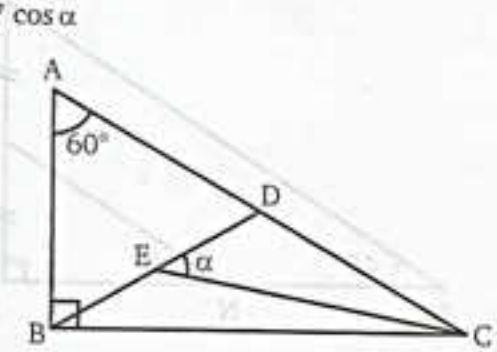
$$\tan(2y + 3°)\tan(x - 10°)$$

"x" e "y" son medidas de ángulos agudos.

A) 1 B) 2 C) $\sqrt{3}$
D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{6}$

**16.** Si: AD = DC y BE = ED, calcule:

$\sqrt{7}\cos\alpha$




A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

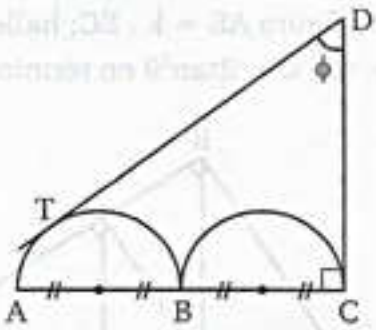
team CALAPENSHKO


**17.** Del gráfico mostrado, halle:

$$M = 4\operatorname{sen}\phi - 3\cos\phi$$

Si: AC = CD

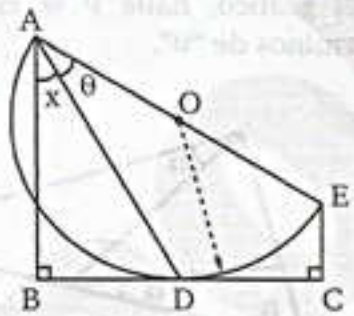
T: punto de tangencia




A) 1 B) 2 C) 3

D) 0, 5 E) 1, 5

**18.** Del gráfico, si BD = DC: Exprese el valor de "tanθ" en términos de "x" $\overline{AE}$ : diámetro




A) sen x B) cos x C) tan x

D) cot x E) sec x

**19.** En un triángulo rectángulo de hipotenusa "h" y uno de sus ángulos agudos "θ", se ubica interiormente un rectángulo cuyos dos lados adyacentes se encuentran sobre los catetos de dicho triángulo. Halle el área de la región rectangular, si una diagonal del rectángulo es perpendicular a la hipotenusa del triángulo.

A) $h^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

B) $h^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta$

C) $h^2\operatorname{sen}^3\theta\cos^3\theta$

D) $h^2\operatorname{sen}2\theta\cos2\theta$

E) $h^2(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)$

**20.** En un triángulo isósceles, el lado desigual mide "b" y el inradio "a", además los ángulos congruentes miden "α"

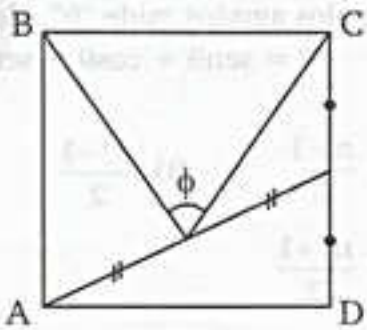
Simplifique:

$$U = \frac{2a\sec\alpha - b\tan\alpha}{2a\tan\alpha - b\sec\alpha}$$

A) $\frac{a}{b}$ B) $\frac{b}{a}$ C) $\frac{2a}{b}$

D) $\frac{2b}{a}$ E) $\frac{b}{2a}$

**21.** Siendo ABCD un cuadrado, halle "senϕ"




A) $\frac{5}{6}$ B) $\frac{6}{7}$ C) $\frac{9}{10}$

D) $\frac{10}{11}$ E) $\frac{12}{13}$

**22.** Siendo el perímetro de un triángulo ABC de 20 u y el inradio de dicho triángulo 4 u halle:

$$K = \cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}$$

A) 2 B) 2, 5 C) 3

D) 4, 5 E) 5

**23.** En un triángulo rectángulo ABC, recto en A; halle el valor de la bisectriz interior del ángulo recto si los lados b y c miden $3\sqrt{2}$ y $2\sqrt{2}$ respectivamente.

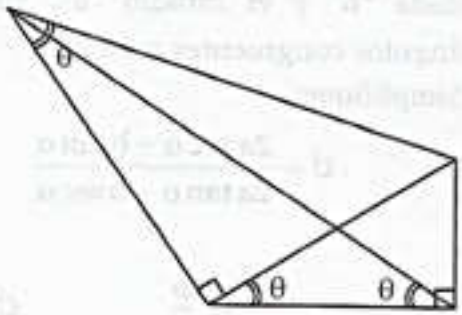
A) 2 B) 2, 2 C) 2, 4

D) 2, 6 E) 2, 8

team CALAPENSHKO



**24.** De la figura mostrada, halle "cotθ"



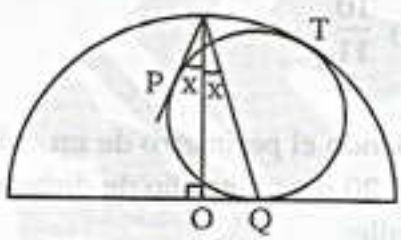

A) $\sqrt{2}$ B) 1, 5 C) $\sqrt{3}$
D) 2 E) $\sqrt{5}$

**25.** En un triángulo rectángulo, su perímetro es "n" veces la hipotenusa. Si uno de los ángulos agudos mide "θ". Halle:

$$P = \text{sen}\theta + \cos\theta + \text{sen}\theta\cos\theta$$

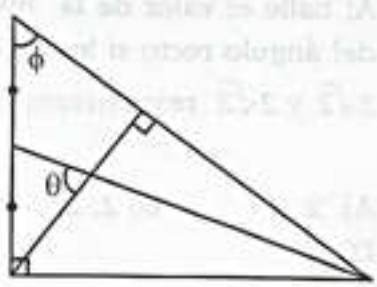
A) $\frac{n-1}{2}$ B) $\frac{n^2-1}{2}$ C) $\frac{n^2-2}{2}$
D) $\frac{n^2+1}{2}$ E) $\frac{n^2+2}{2}$

**26.** De la figura mostrada, O: centro, P , T y Q puntos de tangencia.
Halle: "senx"



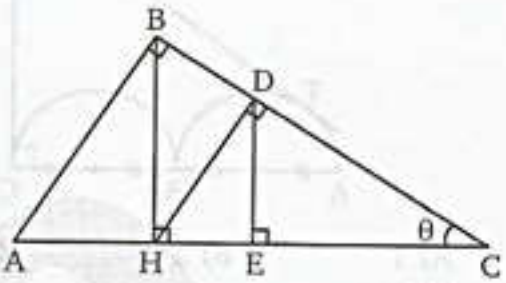

A) $\frac{2-\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}+1}{3}$
D) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$ E) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{7}$

**27.** En la figura, halle "tanθ" en función de ϕ



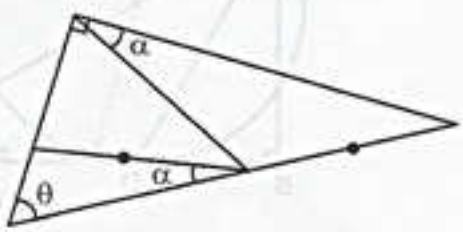

A) $2\tan\phi + \cot\phi$ B) $\tan\phi + \cot\phi$
C) $\tan\phi + 2\cot\phi$
D) $2\tan\phi$ E) $\tan2\phi - \cot\phi$

**28.** En la figura AE = k . EC; halle:
$N = \tan^4\theta + 2\tan^2\theta$ en términos de k




A) k B) 2k C) 3k
D) $k^2$ E) $2k^2$

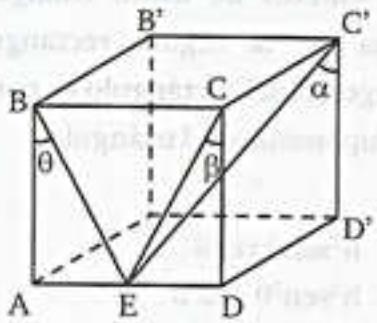
**29.** Del gráfico, halle $P = \csc\alpha - \tan\alpha$ en términos de "θ".




A) secθ B) cscθ C) tanθ
D) cotθ E) senθ

**30.** En el cubo mostrado; halle

$$P = \frac{\tan^2\alpha - \tan^2\theta}{\tan\beta}$$

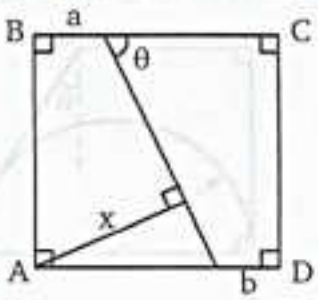



A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 1/2

team CALAPENSHKO



**31.** Siendo ABCD un cuadrado, halle "x" en términos de "a", "b" y "θ"



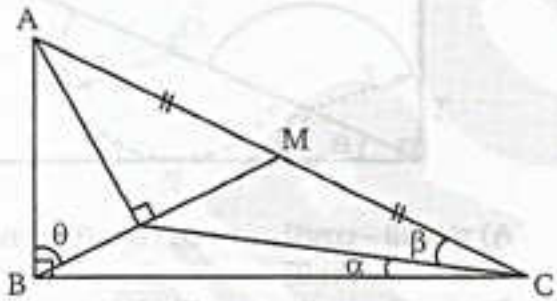

A) $\frac{a\tan\theta - b}{\sec\theta + \csc\theta}$ B) $b\tan\theta + a$

C) $\frac{b\tan\theta + a}{\sec\theta - \csc\theta}$

D) $\frac{a\tan\theta + b}{\sec\theta - \csc\theta}$ E) $a\tan\theta + b$

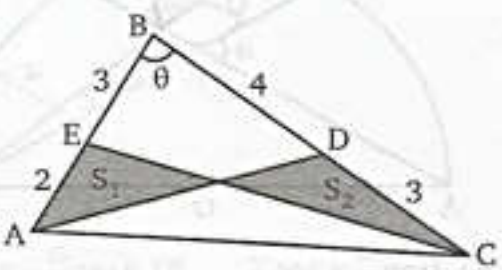
**32.** Del gráfico mostrado: $\text{sen}\theta = \cos\frac{\theta}{2}$

Calcule: $L = \frac{\cot\alpha - \cot\beta}{\cot\theta}$




A) 1 B) 2 C) 4
D) 6 E) 8

**33.** Del gráfico, halle: $S_2 - S_1$

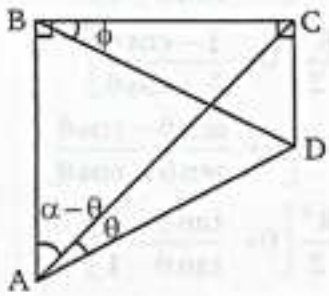



A) $\frac{1}{2}\text{sen}\theta$ B) $\frac{3}{2}\text{sen}\theta$ C) $\frac{4}{3}\text{sen}\theta$

D) $\frac{2}{3}\text{sen}\theta$ E) $\text{sen}\theta$

**34.** Del gráfico, señale el equivalente de:

$$P = \frac{\csc^2\alpha}{\cot\theta - \cot\alpha}$$




A) $\tan\phi$ B) $\cot\phi$ C) $\sec\phi$
D) $\csc\phi$ E) $\text{sen}\phi$

**35.** En un triángulo ABC, recto en C; se inscribe una circunferencia de radio "r" y se circunscribe una circunferencia de "R", además $m\angle CAB = \theta$; exprese $\frac{r}{R}$ en términos de θ.

A) $\text{sen}\theta\cos\theta$ B) $(1-\text{sen}\theta)(1-\cos\theta)$
C) $1 - \text{sen}\theta\cos\theta$
D) $\text{sen}\theta + \cos\theta - 1$ E) $1 + \text{sen}\theta - \cos\theta$

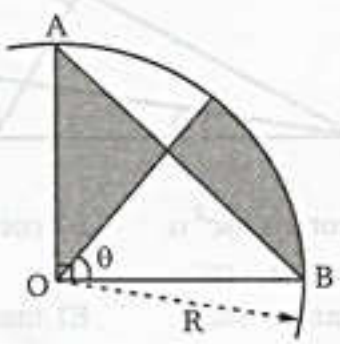
**36.** Considerando un triángulo ABC, exprese el área de la región triangular en términos de las medidas de los ángulos "A" y "B" además del lado "c"

A) $c^2(\tan A + \tan B)$ B) $c^2(\cot A + \cot B)$

C) $\frac{c^2}{2}(\tan A + \tan B)$

D) $\frac{c^2}{2(\tan A + \tan B)}$ E) $\frac{c^2}{2(\cot A + \cot B)}$

**37.** Del gráfico mostrado, halle al área de la región sombreada.



A) $\frac{R^2}{2}\left[\theta+\frac{\cot\theta-1}{\cot\theta+1}\right]$

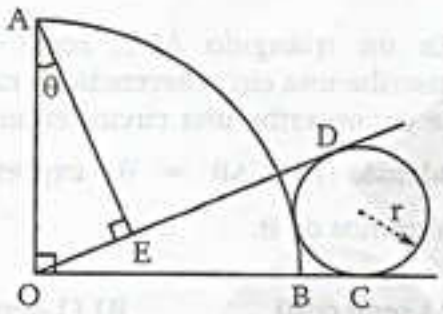
B) $R^2\left[\theta+\frac{\operatorname{sen}\theta+1}{\operatorname{sen}\theta-1}\right]$

C) $\frac{R^2}{2}\left[\theta+\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\right]$

D) $R^2\left[\theta+\frac{\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta+\cos\theta}\right]$

E) $\frac{R^2}{2}\left[\theta+\frac{\tan\theta+1}{\tan\theta-1}\right]$

**38.** Dado el sector circular AOB, C y D puntos de tangencia. Halle AE en términos de θ y r.




A) $r\cos\theta\left(\csc\frac{\theta}{2}-1\right)$

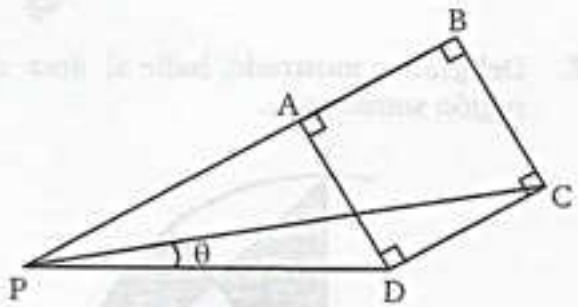
B) $r\cos\theta\left(\csc\frac{\theta}{2}+1\right)$

C) $r\operatorname{sen}\theta\left(\sec\frac{\theta}{2}-1\right)$

D) $r\operatorname{sen}\theta\left(\sec\frac{\theta}{2}+1\right)$

E) $r\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\left(\sec\frac{\theta}{2}-1\right)$

**39.** Del gráfico mostrado, halle el valor de la cot θ en términos de α, si: AB = BC y α = m∠APD

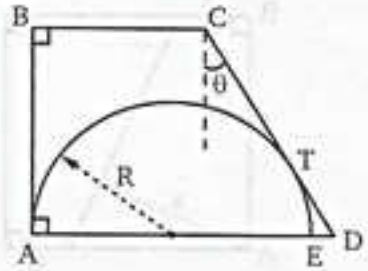



A) $\cot\alpha+\csc^2\alpha$ B) $\cot^2\alpha-\csc\alpha$

C) $\cot^2\alpha-\csc\alpha$

D) $\tan\alpha+\sec\alpha$ E) $\tan\alpha+\sec^2\alpha$

**40.** En la figura, halle la longitud de R en términos de a, b y θ. T es punto de tangencia. (AB = b y BC = a)

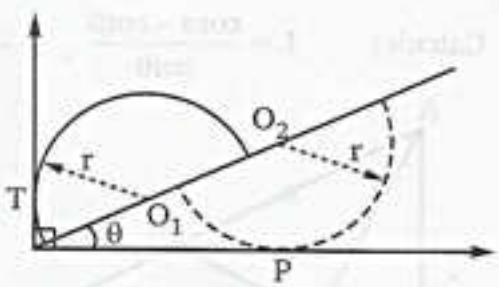



A) $\frac{a\operatorname{sen}\theta+b}{1+\tan\theta}$ B) $\frac{a\tan\theta+b}{1+\sec\theta}$

C) $\frac{b\tan\theta+a}{1+\sec\theta}$

D) $\frac{(1+\sec\theta)a}{b}$ E) $\frac{a\tan\theta}{b}$

**41.** Del gráfico mostrado, halle la longitud de $O_1O_2$ en términos de θ y r, siendo $O_1$ y $O_2$ centros, P y T puntos de tangencia.

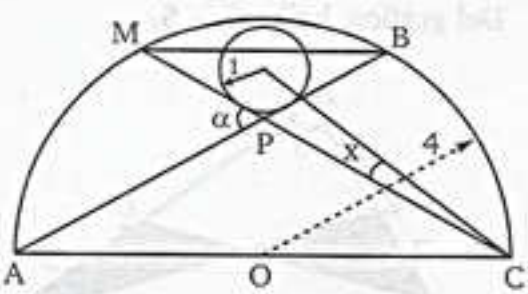



A) r(senθ − cosθ) B) r(cosθ − senθ)

C) r(cosθ − senθ)

D) r(cscθ − secθ) E) r(secθ − cscθ)

**42.** En la figura mostrada, exprese cotx en términos de α, siendo MP = BP.




A) $2\tan\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\alpha}{2}$ B) $4\sec\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\alpha}{2}$

C) $4\sec\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}$

D) $4\csc\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\alpha}{2}$ E) $2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\alpha}{2}$

**A todo el público en general:**

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

**Este libro no debe ser prostituito monetariamente**, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

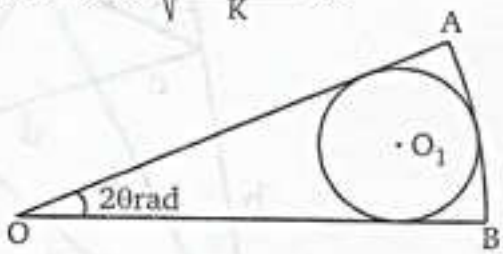
No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

**28 de agosto del 2020**

team CALAPENSHKO


**43.** Sea K la relación entre la longitud de la circunferencia de centro $O_1$ y la longitud del arco $\widehat{AB}$, cuyo centro es O entonces el equivalente de $\sqrt{\frac{\csc\theta - 1}{K}}$ es:




A) $\sqrt{\frac{\theta}{\pi}}\tan\frac{\theta}{2}$ B) $\sqrt{\frac{\theta}{2\pi}}\cot^2\theta$

C) $\sqrt{\frac{\theta}{2\pi}}\tan^2\theta$

D) $\sqrt{\frac{\theta}{\pi}}\cot\theta$ E) $\sqrt{\frac{\theta}{\pi}}\tan\theta$

**44.** El perímetro de un triángulo rectángulo ABC (recto en A) es 1 m. El equivalente de:

$$b^2\left(\frac{\sec B+1}{\sec B-1}\right)^{\frac{1}{2}} + c^2\left(\frac{\sec C+1}{\sec C-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

en término de a es:

A) $a^2-3a+1$ B) $a^2+3a+1$

C) $1+3a-a^2$

D) $1+a^2-a^2$ E) $1-a-a^2$

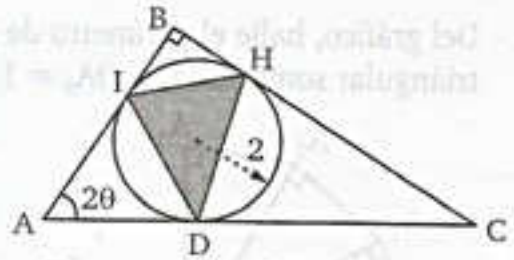
**45.** En un triángulo ABC (recto en C), halle:

$$(a^2+b^2)\operatorname{sen}(A-B)-(a^2-b^2)\operatorname{sen}(A+B)$$

A) –1 B) 0 C) 1
D) 2 E) –2

**46.** En el gráfico adjunto, siendo S el área de la región sombreada, además $\tan\theta = 2/3$, halle:

$$Y=\frac{S}{\operatorname{sen}\theta\cos(45°+\theta)}$$



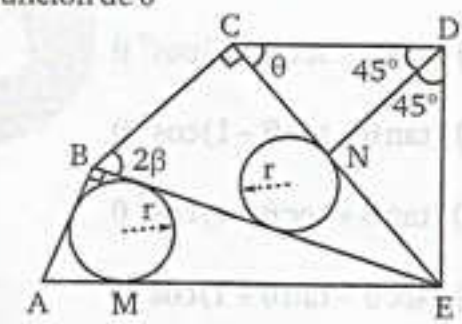

A) $30\sqrt{2}$ B) $15\sqrt{3}$ C) $15\sqrt{2}$

D) $30\sqrt{3}$ E) 30

**47.** De la figura ME = m, determine:

$$Y=\left(\frac{r+m}{r}\right)\operatorname{sen}2\beta\tan(45°-\beta)$$

en función de θ




A) $1-\cot\theta$ B) $1+\cot\theta$ C) $1+\tan\theta$

D) $1-\tan\theta$ E) $\tan\theta-1$

**48.** Dentro de un ángulo cuya medida es "2ϕ" se inscribe "n" circunferencias tangentes exteriormente una contra otra y a los lados del ángulo. Siendo los radios de dichas circunferencias $r_1$, $r_2$, $r_3$, ..... $r_n$ desde $r_1 < r_2 < r_3 < \ldots\ldots r_n$. Halle $r_n$ en términos de $r_1$.

A) $r_n = r_1\left(\frac{1-\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}\right)$

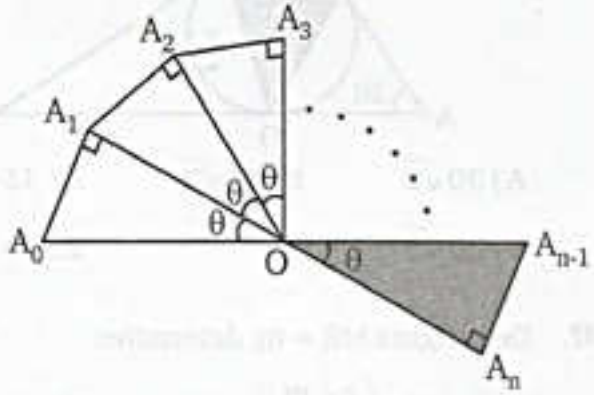
B) $r_n = r_1\left(\frac{1-\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}\right)$

C) $r_n = r_1\left(\frac{1+\operatorname{sen}\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}\right)$

D) $r_n = r_1\left(\frac{1-\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}\right)$

E) $r_n = r_1\left(\frac{1+\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}\right)$

**49.** Del gráfico, halle el perímetro de la región triángular sombreada, si $OA_0 = 1$




A) $(\tan\theta - \sec\theta + 1)\cos^n\theta$

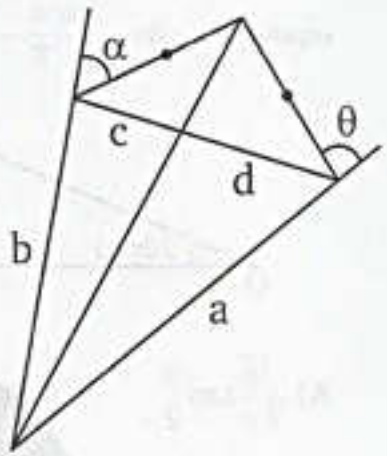
B) $(\tan\theta + \sec\theta - 1)\cos^n\theta$

C) $(\tan\theta - \sec\theta - 1)\cos^n\theta$

D) $(\tan\theta + \sec\theta + 1)\cos^n\theta$

E) $(\sec\theta - \tan\theta + 1)\cos^n\theta$

**50.** Del gráfico, halle: $\dfrac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta}$




A) $\dfrac{b.c}{a.d}$ B) $\dfrac{a.b}{c.d}$ C) $\dfrac{a.d}{b.c}$

D) $\dfrac{b.d}{a.c}$ E) $\dfrac{a.c}{b.d}$

team CALAPENSHKO

Capítulo 4

# Ângulos Verticales y Horizontales

**CAPACIDADES**

- Reconocer e identificar los elementos que definen el ángulo de elevación, ángulo de depresión y el ángulo de observación.
- Plantear los gráficos adecuados para la posterior resolución del problema mediante el uso de razones trigonométricas de un ángulo agudo.
- Resolver problemas que involucran ángulos verticales y horizontales.

## ROSA DE LOS VIENTOS O ROSA NÁUTICA

Es un círculo que tiene marcados alrededor los rumbos en que se divide la circunferencia del horizonte. En las cartas de navegación se representa por 32 rumbos (deformados) unidos por un extremo mientras el otro señala el rumbo sobre el círculo del horizonte.

Sobre el mismo se sitúa la flor de lis con la que suelen representar el Norte que se documenta a partir del siglo XVI.

También puede ser un diagrama que representa la intensidad media del viento en diferentes sectores en los que divide el círculo del horizonte.

ROSA DE LOS VIENTOS (1504)

### SUBDIVISIONES DE LA ROSA NÁUTICA

1. **LOS PUNTOS CARDINALES**
   Norte (N) – Sur (S) – Este (E) – Oeste (W u O)
   Para identificar mejor estos puntos, se puede usar nuestro cuerpo como referencia. Orientando nuestro frente hacia el Norte, estaría hacia atrás el Sur, a la derecha estaría el Este y la izquierda el Oeste. En inglés se suele ocupar W (West) para referirse al Oeste. Esto se utiliza para diferenciarlo del número cero.

2. **LOS CUATRO RUMBOS LATERALES**
   Noreste (NE) – Sureste (SE) – Suroeste (SO) – Noroeste (NO)

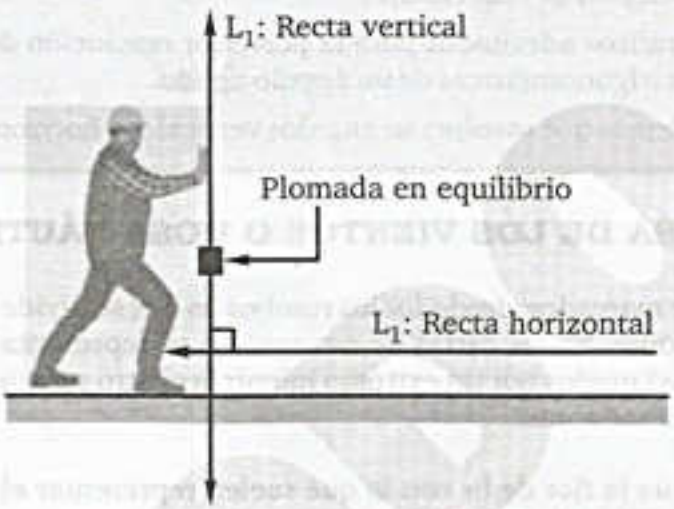
3. **LOS NOMBRES DE LOS VIENTOS**
   Estos nombres indican la procedencia del viento
   Norte -- Norte (ESP) o Tramontana (CAT)
   Este -- Levante (ESP) o Llevant (CAT)
   Sur -- Sur (ESP) o Migjorn (CAT)
   Oeste -- Poniente (ESP) o Ponent (CAT)
   Noreste -- Gregal (ESP&CAT)
   Sureste -- Jaloque (ESP) o Xaloc (CAT)
   Suroeste -- Lebeche (ESP) o Garbí O Llebeig (CAT)
   Noroeste -- Mistral (ESP) o Mestral (CAT)
   (*) ESP: Español CAT: Catalán

4. **LOS OCHO RUMBOS COLATERALES**
   NNE — Nornoreste
   ENE — Estenoreste
   ESE — Estesureste
   SSE — Sursureste
   SSO — Sursuroeste
   OSO — Oestesuroeste
   ONO — Oestenoroeste
   NNO — Nornoroeste

## INTRODUCCIÓN

En nuestra vida diaria observamos objetos e indicamos sus posiciones utilizando referencias que nos puedan permitir una mayor precisión al momento de ubicarlos. En el capitulo a estudiar consideraremos en un mismo plano tanto al observador como el objeto que deseamos observar. Luego necesitamos conocer algunos términos que vamos a utilizar tales como:

**LÍNEA VERTICAL.** La vertical de un lugar es la línea que coincide con la dirección que marca la plomada en equilibrio.



**LÍNEA HORIZONTAL.** Es toda perpendicular a la línea vertical.

**LÍNEA VISUAL.** Es aquella línea imaginaria que une los ojos del observador con un punto al objeto, el cual se está observando.

**PLANO VERTICAL.** Es todo aquel plano que contiene una línea vertical.

team CALAPENSHKO

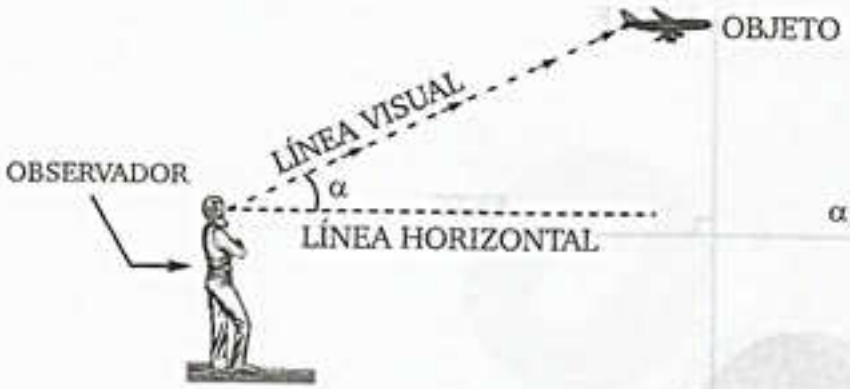


# ÁNGULOS VERTICALES

Los ángulos verticales son aquellos ángulos contenidos en un plano vertical y puede ser:

## ÁNGULO DE ELEVACIÓN

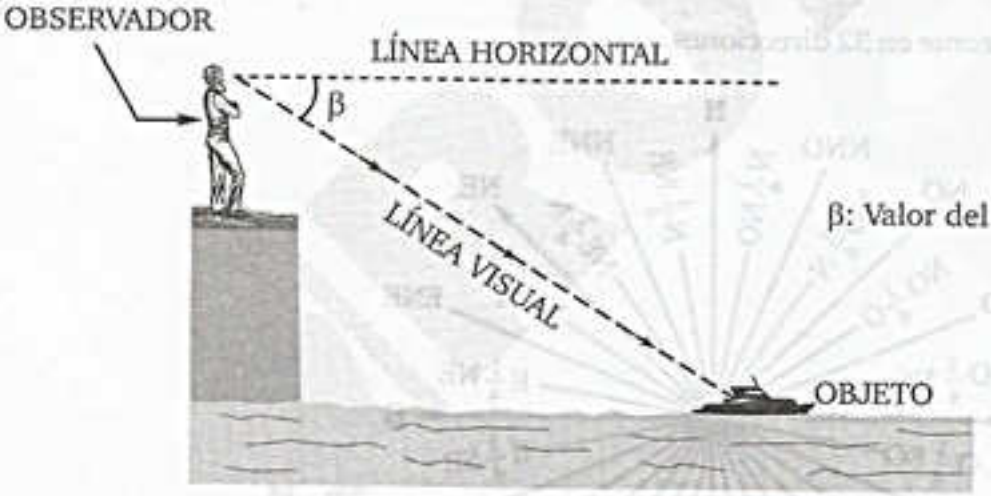
Es aquel ángulo formado por la línea horizontal que parte del ojo del observador y la línea visual, cuando el objeto observado se encuentra por encima de la línea horizontal.




α: Valor del ángulo de Elevación

## ÁNGULO DE DEPRESIÓN:

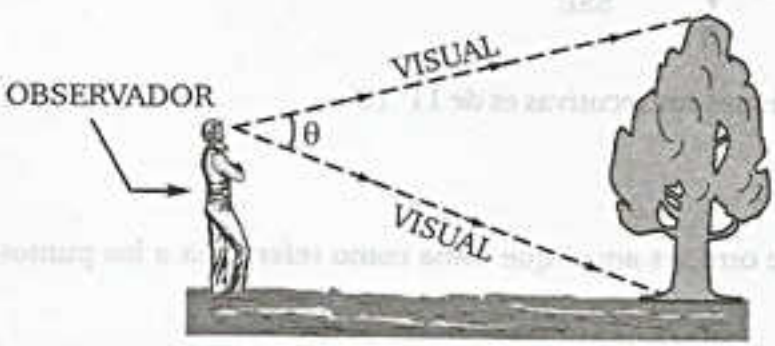
Es aquel ángulo formado por la línea horizontal que parte del ojo del observador y la línea visual, cuando el objeto observado se encuentra por debajo de la línea horizontal.




β: Valor del ángulo de Depresión

## ÁNGULO DE OBSERVACIÓN:

Es aquel ángulo formado por dos visuales que parten del mismo punto.




La gráfica muestra el valor del ángulo de observación "θ" con la cual la persona "ve" al árbol

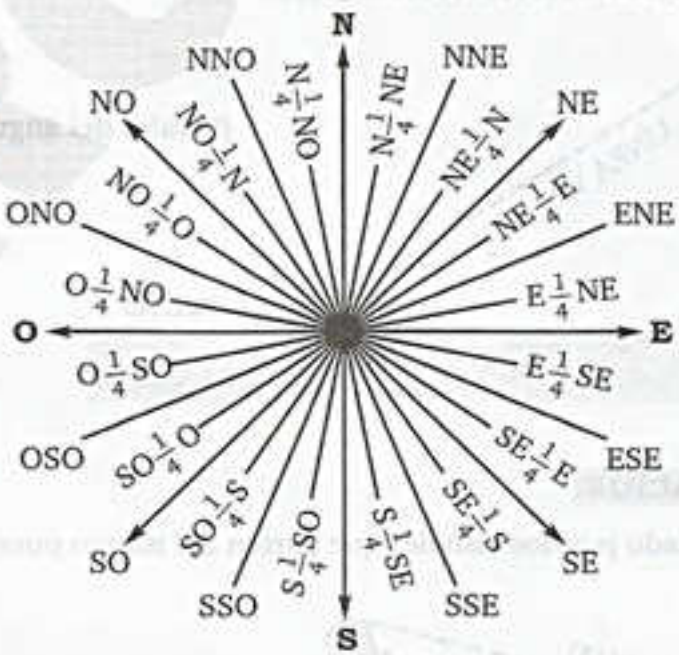
# ÁNGULOS HORIZONTALES

Son aquellos ángulos que se encuentran contenidos en un plano horizontal.

Para ubicar un punto con respecto de otro, usaremos como referencia a los puntos cardinales NORTE, SUR, ESTE y OESTE.

## LA ROSA NAUTICA

Es aquella división del horizonte en 32 direcciones.




El valor del ángulo formado por dos direcciones consecutivas es de 11° 15'.

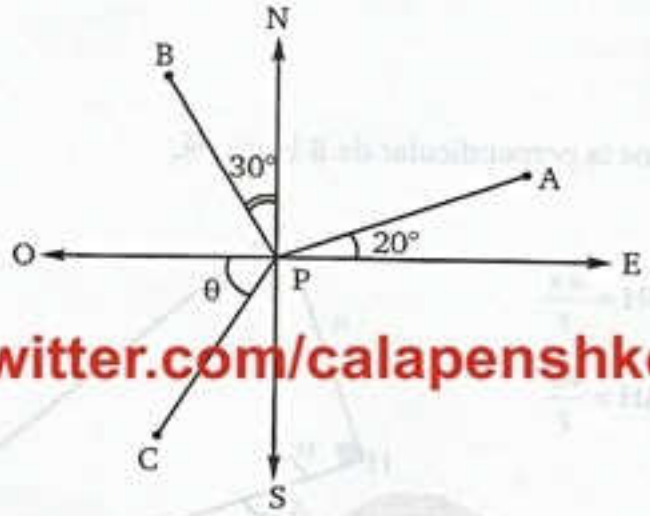
## DIRECCIÓN

La dirección de un punto con respecto de otro, es aquel que toma como referencia a los puntos cardinales (NORTE, SUR, ESTE y OESTE).

team CALAPENSHKO



**Ejemplo:**




twitter.com/calapenshko

Respecto del punto P:

A se encuentra en la dirección E20°N
B se encuentra en la dirección N30°O
C se encuentra en la dirección OθS

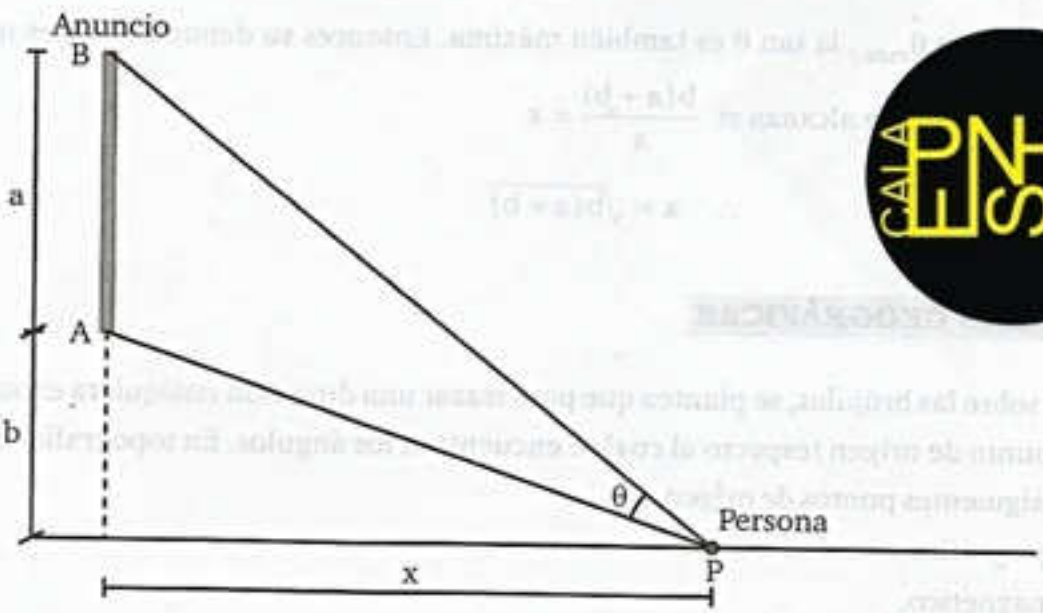
## RUMBO

Es la dirección que toma como referencia el NORTE o SUR solamente.

Así del ejemplo anterior; respecto de P:

B se encuentra en el rumbo 30° del NORTE AL OESTE

## OBSERVACIÓN

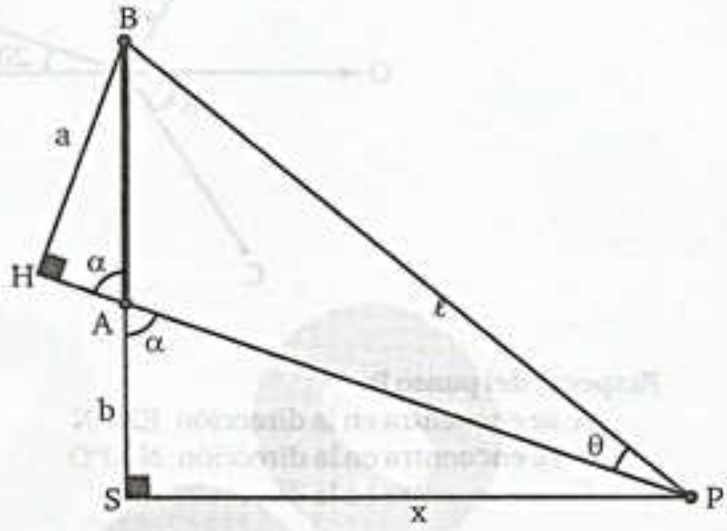



La distancia entre una persona y un anuncio de tal manera que el ángulo de observación que posee la persona es "máxima" es: $\sqrt{b(a+b)}$

**DEMOSTRACIÓN**

- $\ell^2 = b^2 + x^2$ .....(1)

Prolongamos $\overline{PA}$ y trazamos la perpendicular de B hacia $\overline{PA}$.




En los $\triangle$ASP y AHB:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{BH}{a} = \frac{x}{\ell} \Rightarrow BH = \frac{ax}{\ell}$$

$$\cos\alpha = \frac{AH}{a} = \frac{b}{\ell} \Rightarrow AH = \frac{ab}{\ell}$$

En el $\triangle$BHP:

$$\tan\theta = \frac{BH}{HP} = \frac{\frac{ax}{\ell}}{\frac{ab}{\ell} + \ell}$$

$$\Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{ax}{ab + \ell^2} \quad .....(2)$$

(1) en (2): $\tan\theta = \dfrac{ax}{ab + b^2 + x^2} \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{a}{\frac{b(a+b)}{x} + x}$

**PROPIEDAD:** Se cumple que: M.A. $\geq$ M.G. $\forall n \in \mathbb{R}^+$

Si: $n = 2$:

Se cumple: $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}; a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}$

Por lo tanto: $(a+b)_{mín.} = 2\sqrt{ab}$ se obtiene cuando $a = b$.

Ahora como se desea $\theta_{máx.}$, la tan $\theta$ es también máxima. Entonces su denominador es mínimo y por la propiedad el mínimo se alcanza si $\dfrac{b(a+b)}{x} = x$

$$\therefore \quad x = \sqrt{b(a+b)}$$

## COORDENADAS GEOGRÁFICAS

Al hablar sobre las brújulas, se plantea que para trazar una dirección cualquiera existe la necesidad de tomar un punto de origen respecto al cual se encuentran los ángulos. En topografía se suelen tomar en cuenta los siguientes puntos de origen.

- El norte geográfico y verdadero.
- El norte magnético.

Por convención los ángulos que vamos a medir a continuación se harán en el sentido en que están las manecillas del reloj a partir del punto de origen. Según el punto de origen que se tome, estos ángulos son y se denominan.

team CALAPENSHKO

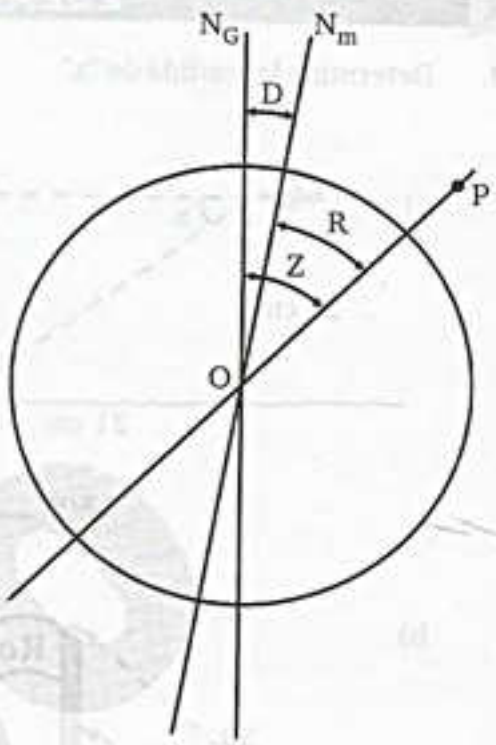


**AZIMUT VERDADERO O GEOGRÁFICO**

Es el ángulo formado por una dirección cualquiera y el norte geográfico. Se le representa por (Z).

**RUMBO O AZIMUT MAGNÉTICO**

Es el ángulo formado por una dirección cualquiera y el Norte Magnético (el que nos da la brújula). Se le representa por (R).



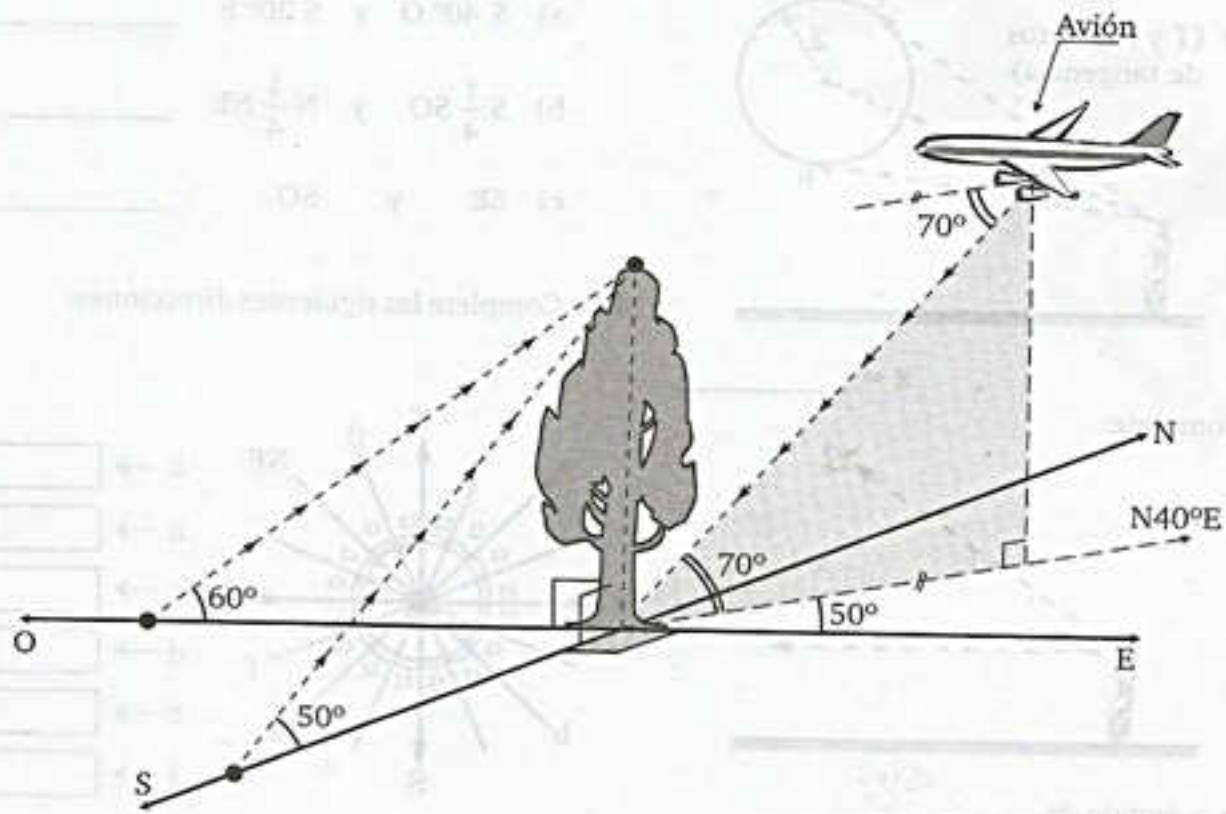

De manera que si tomamos un ángulo con la brújula, estamos formando un rumbo. Si marchamos por medio de direcciones tomadas por la brújula, estamos marchando por rumbos. La declinación (D) de un punto P no es más que la diferencia entre el azimut verdadero y el azimut magnético (ver figura).

$$D = Z - R, \text{ de donde } Z = D + R$$

Es decir, que el azimut verdadero geográfico es la suma del rumbo más la declinación; o lo que es lo mismo, para hallar el N geográfico no hay más que agregar la declinación al N magnético.

**NOTA**

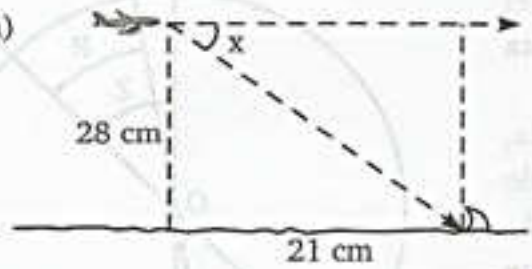
Se presentarán problemas que incluirán ambos ángulos (ángulos verticales y horizontales) en este caso se dibujará un diagrama tridimensional



## EJERCICIOS DE APLICACIÓN

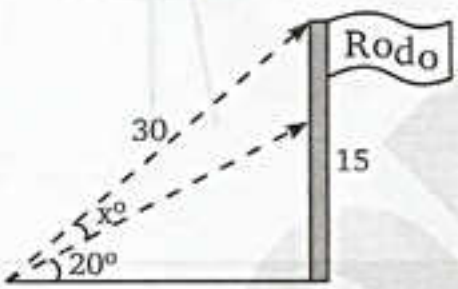
**1.** Determine la medida de "x"

a)



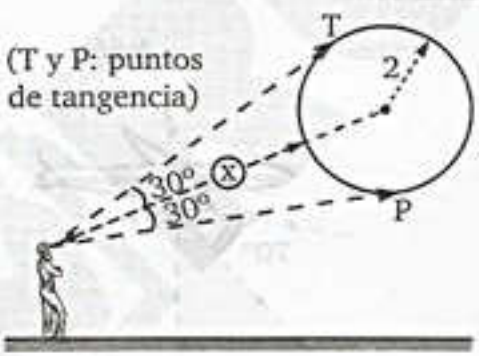

x = _____

b)



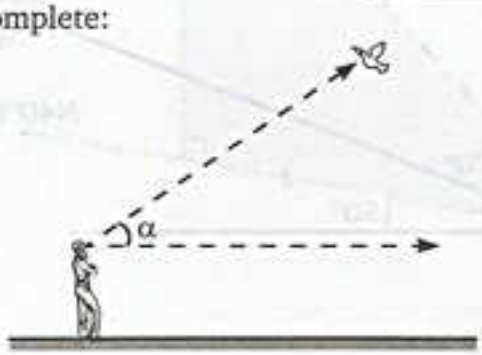

x = _____

c) (T y P: puntos de tangencia)



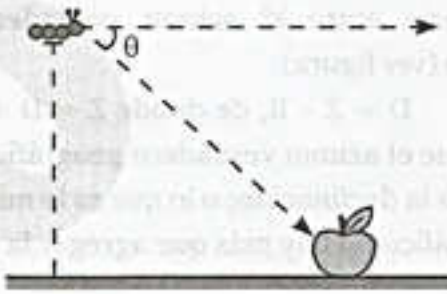

x = _____

**2.** Complete:




α = ángulo de _____

β = ángulo de _____




θ = ángulo de _____

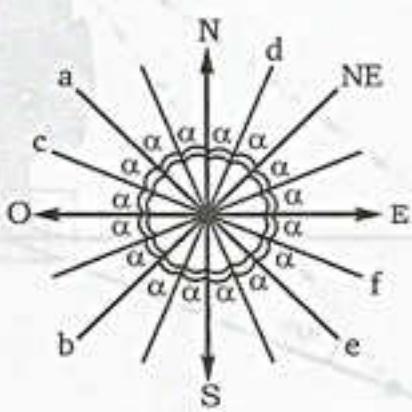
**3.** Determine el valor de los ángulos que forman las siguientes direcciones:

a) S 40° O y S 20° E _____

b) $S\frac{1}{4}SO$ y $N\frac{1}{4}NE$ _____

c) SE y SO _____

**4.** Complete las siguientes direcciones:



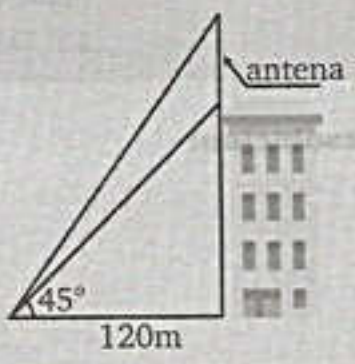

a → ☐
b → ☐
c → ☐
d → ☐
e → ☐
f → ☐

team CALAPENSHKO


## PROBLEMAS RESUELTOS

**PROBLEMA 1** El ángulo de elevación con que se observa la parte superior de un edificio, es de 45° como se muestra en la figura. Sobre el borde del edificio hay una antena, cuya parte superior se observa desde el mismo lugar, con un ángulo de elevación cuya tangente es 1,2. ¿Cuál es la longitud de la antena?

**ADMISIÓN UNMSM 2018 - I**



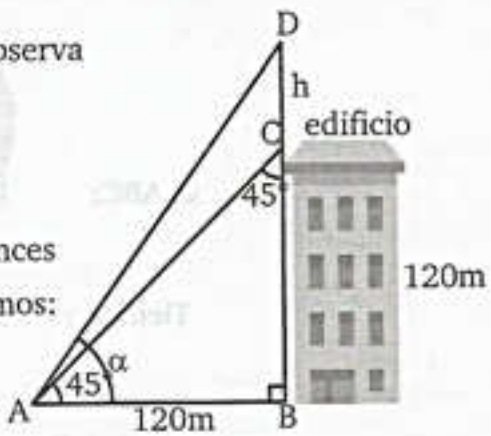

**Resolución:**

Sea $\alpha$ el ángulo de elevación con el cual se observa la antena de altura h.

$\tan\alpha = 1,2 \rightarrow \tan\alpha = \dfrac{12}{10}$ ...(I)

Como el $\triangle ABC$ es notable (45° y 45°), entonces la longitud BC = 120 m. En el $\triangle ABD$, tenemos:

$\tan\alpha = \dfrac{h+120}{120}$ ...(II)




De (I) y (II): $\dfrac{h+120}{120} = \dfrac{12}{10} \rightarrow h+120 = 144$

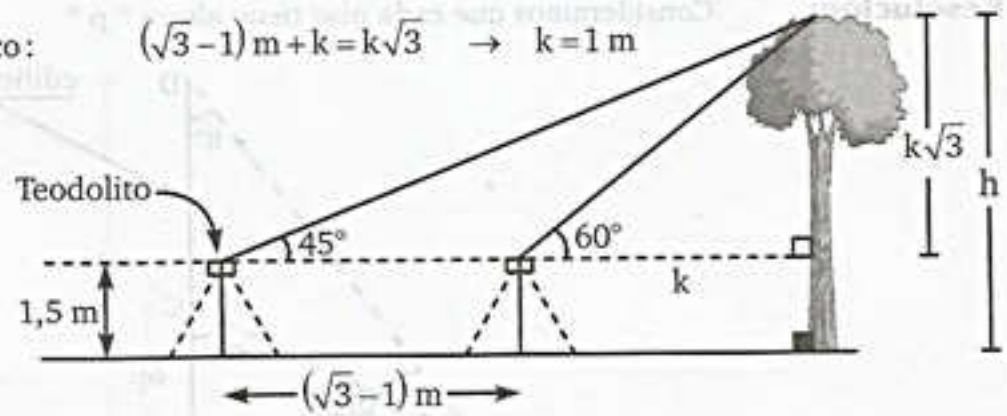
$\therefore \quad h = 24$

**PROBLEMA 2** Con un teodolito de 1,5m de altura se observa la cima de un árbol con un ángulo de elevación de 60°. Si el teodolito se aleja $\sqrt{3}-1$ m del árbol, siguiendo una tra-yectoria lineal en la dirección descrita por su posición inicial y el pie del árbol, el nuevo ángulo de elevación es 45°. Calcule la altura del árbol.

**ADMISIÓN UNMSM 2016 - II**

**Resolución:**

Del gráfico: $(\sqrt{3}-1)\,m + k = k\sqrt{3} \rightarrow k = 1\,m$




$\therefore \quad h = (\sqrt{3}+1,5)\,m$

**A todo el público en general:**

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

**Este libro no debe ser prostituito monetariamente**, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

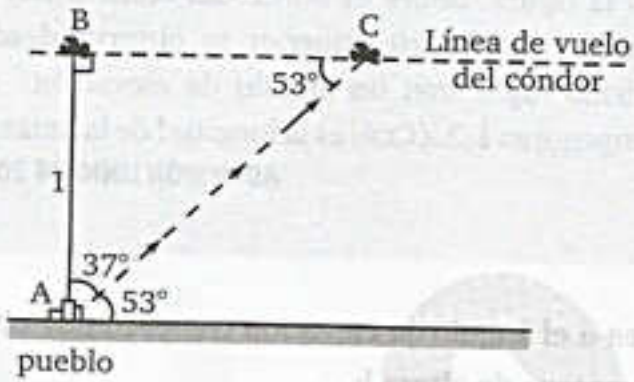
**28 de agosto del 2020**

team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 3** Un cóndor, vuela horizontalmente sobre un pueblo a 1km de altura, luego de 3 minutos es visto desde el mismo pueblo con un ángulo de elevación que mide 53°. Determine la rapidez del cóndor.

**Resolución:**




$\triangle ABC$: $BC = \tan 37° = \frac{3}{4}$ km

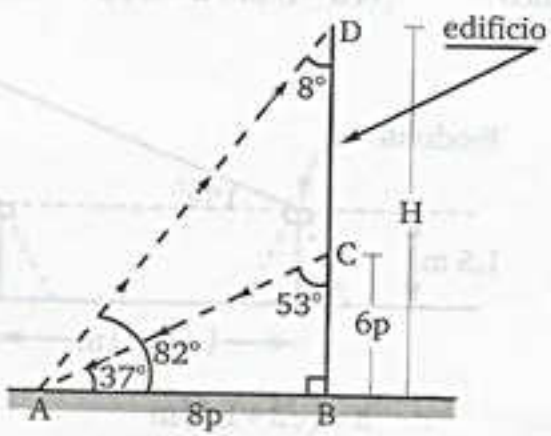
Tiempo : $3 \text{ min} = \frac{1}{20}$ hora

$$\text{Velocidad} = \frac{\text{espacio}}{\text{tiempo}} \Rightarrow V = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{20}} = 15$$

∴ **La rapidez del cóndor es de 15 km/h**

**PROBLEMA 4** Desde el sexto piso de un edificio, se observa un punto en el suelo con un ángulo de depresión que mide 37° y desde dicho punto se observa la azotea del edificio con un ángulo de elevación que mide 82°.¿ Cuantos pisos tiene el edificio?

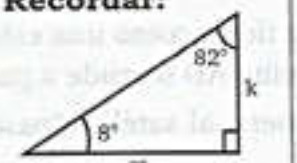
**Resolución:** Consideramos que cada piso tiene altura " p "



team CALAPENSHKO


$\triangle_{ABC}$ (37° y 53°) $\Rightarrow AB = 8p$

**Recordar:**




$\triangle_{ABD}$ (8° y 82°)

$$BD = AB \tan 82° \ldots\ldots \left(BD = H;\ AB = 8p;\ \tan 82° = \frac{7k}{k}\right)$$

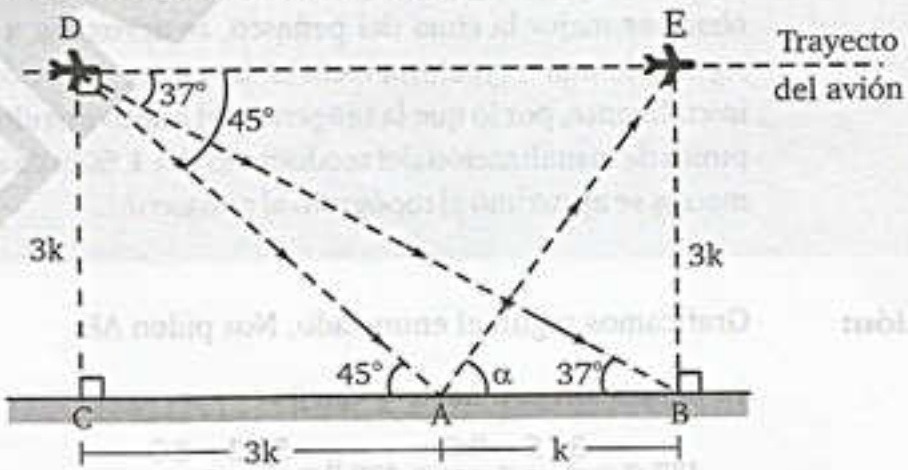
$$\Rightarrow H = 8p.\ \frac{7k}{k}$$

$$\Rightarrow H = 56p$$

$\therefore$ **El edificio tiene 56 pisos**

**PROBLEMA 5** Desde un avión que vuela horizontalmente, se observa que antes de pasar sobre dos puntos en tierra A y B, los valores de sus ángulos de depresión miden 45° y 37°respectivamente, cuando el avión esta sobre "B", es visto desde "A" con un ángulo de elevación de valor $\alpha$. ¿Cuanto vale tan $\alpha$?

**Resolución:** Del enunciado del problema, tenemos:




$\triangle_{BCD}$ (37° y 53°): $DC = 3k \Rightarrow CB = 4k$

$\triangle_{ACD}$ (45° y 45°): $AC = DC = 3k$

$\triangle_{ABE}$: $\tan\alpha = \frac{3k}{k}$

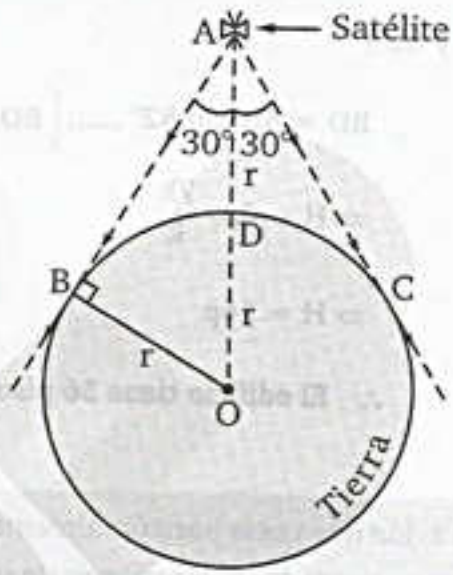
$\therefore$ $\tan\alpha = 3$

team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 6** Hallar la medida del ángulo de observación de la tierra, vista desde un satélite que se encuentra a una altura igual a la longitud del radio de la tierra.

**Resolución:** Se considera a la tierra como una esfera cuyo radio mide "r".
La altura del satélite AD se mide a partir de la superficie de la tierra, así la línea vertical que contiene al satélite "pasará" por el centro de la tierra, las visuales AB y AC son líneas tangentes a la tierra, luego $\overline{OB} \perp \overline{AB}$




$\triangle_{ABO}$(30° y 60°)

$\therefore$ **El ángulo de observación mide 60°**

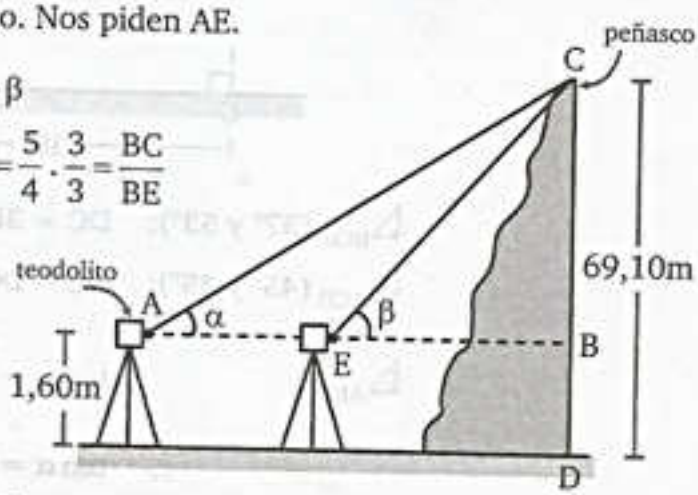
**PROBLEMA 7** Un topógrafo observa con un teodolito la cima de un peñasco de 69,10 m de altura con un ángulo de elevación cuya tangente es 3/4. Interesado en observar mejor la cima del peñasco, se aproxima a este una cierta distancia siguiendo una trayectoria recta en la misma dirección en la que se encontraba inicialmente, por lo que la tangente del nuevo ángulo de elevación es 5/4. Si el punto de visualización del teodolito está a 1,60m de altura del suelo, ¿cuántos metros se aproximó el topógrafo al peñasco? **ADMISIÓN UNMSM 2017 - I**

**Resolución:** Graficamos según el enunciado. Nos piden AE.

Le damos forma a $\tan\alpha$ y $\tan\beta$

$$\tan\alpha = \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{5} = \frac{BC}{AB} \wedge \tan\beta = \frac{5}{4}\cdot\frac{3}{3} = \frac{BC}{BE}$$

Luego: $BC = 15k$
$BE = 12k$
$AB = 20k \rightarrow AE = 8k$



team CALAPENSHKO


Del gráfico:

$$CD = 69,10$$
$$BC + BD = 69,10$$
$$15k + 1,60 = 69,10$$
$$15k = 67,5$$
$$k = 4,5$$

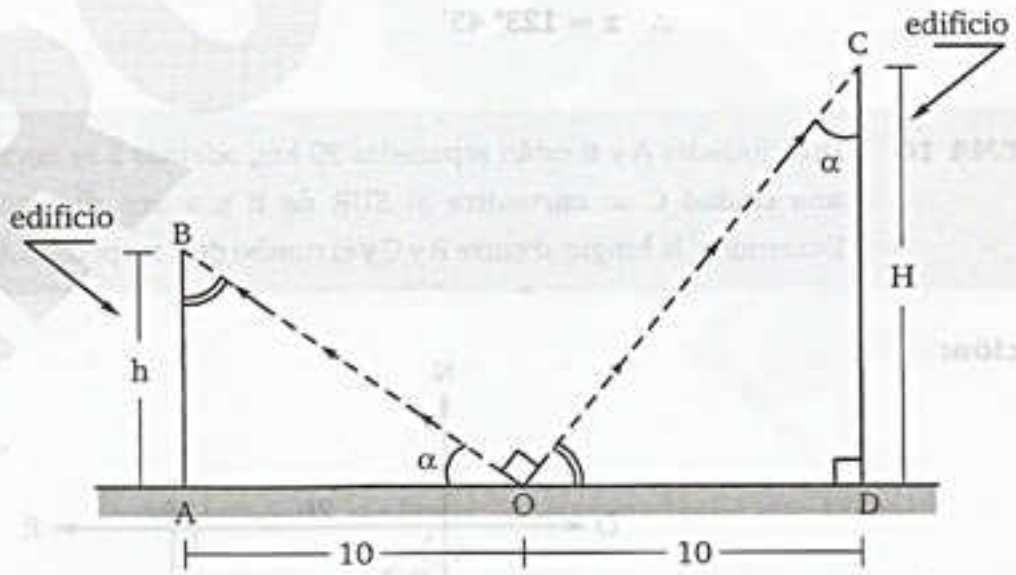
Finalmente:

$$AE = 8k$$
$$AE = 8(4,5)$$

$$\therefore \quad \mathbf{AE = 36\ m}$$

**PROBLEMA 8** Dos edificios separados por una calle de 20 m de ancho, son observados desde el punto medio de la calle con ángulos cuyos valores son complementarios. Determine el producto de sus respectivas alturas.

**Resolución:** Sean los edificios de alturas h y H.




$\triangle_{OAB}$: $h = 10 \tan \alpha$ ..... (1)

$\triangle_{ODC}$: $H = 10 \cot \alpha$ ..... (2)

(1) × (2): $hH = 10 \tan \alpha \,.\, 10 \cot \alpha$

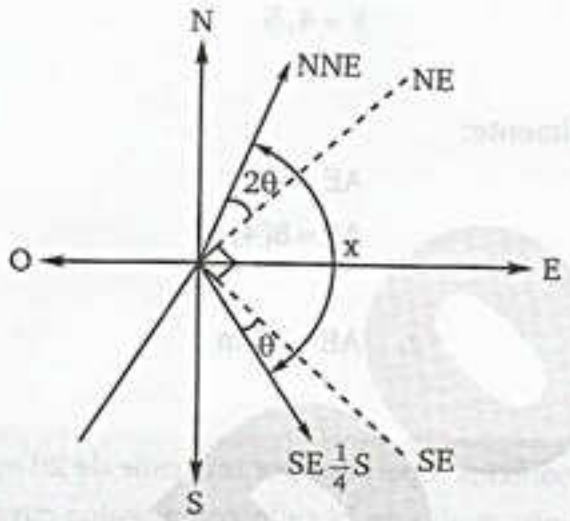
$$\therefore \quad \mathbf{hH = 100}$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 9** Calcular el menor valor del ángulo formado por las direcciones:

$$\text{NNE} \quad \text{y} \quad \text{SE}\frac{1}{4}\text{S}$$

**Resolución:** Graficamos las direcciones:



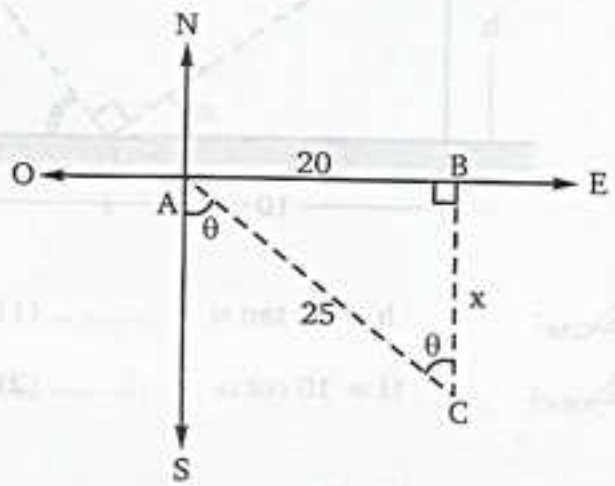

(*) $\theta$: $11°15'$

$$x = 90° + 3\theta$$
$$x = 90° + 33°45'$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 123°45'}$$

**PROBLEMA 10** Dos ciudades A y B están separadas 20 km, además B se encuentra al ESTE de A; una ciudad C se encuentra al SUR de B y a una distancia de 25 km de A. Determine, la longitud entre B y C y el rumbo de C respecto a A.

**Resolución:**




En el $\triangle_{ABC}$ aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$25^2 = 20^2 + x^2 \quad \rightarrow \quad x = 15$$

team CALAPENSHKO

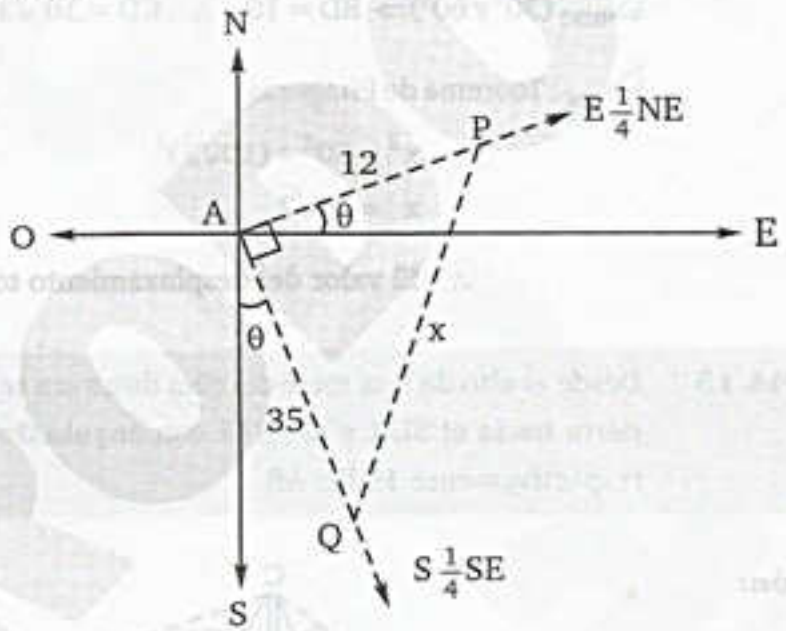

Luego el $\triangle_{ABC}$ es notable pues:

$$\tan\theta = \frac{20}{15} = \frac{4}{3} \Rightarrow \theta = 53°$$

$\therefore$ **La longitud de B a C es 15 km.**
**El rumbo de C respecto de A es S53°E.**

**PROBLEMA 11** Dos móviles P y Q parten de un mismo punto. P recorre 12 km con dirección E$\frac{1}{4}$NE y Q recorre 35 km con rumbo S$\frac{1}{4}$SE. Determine la longitud entre P y Q.

**Resolución:** A: punto de partida




$\theta$: 11°15'

Se observa que el ángulo PAQ es recto.

$\triangle_{PAQ}$: Teorema de Pitágoras

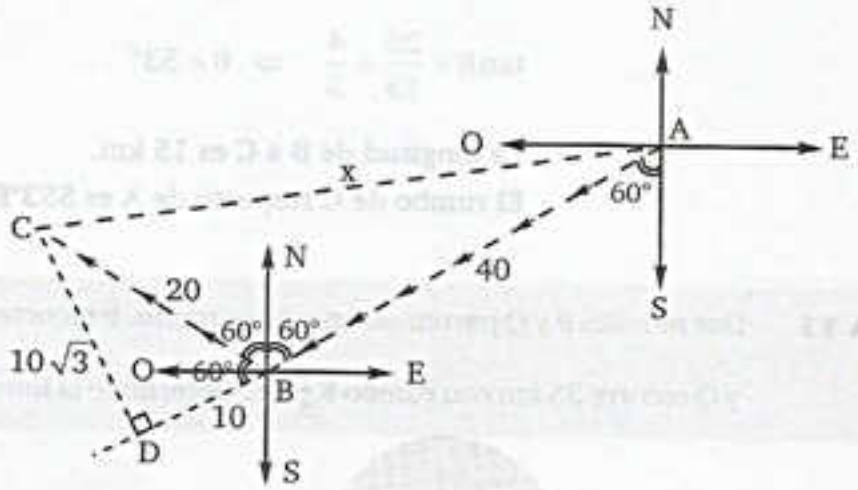
$$x^2 = 35^2 + 12^2 \Rightarrow x = 37$$

$\therefore$ **La longitud entre P y Q es de 37 km**

**PROBLEMA 12** Un móvil se desplaza 40 km según la dirección S60°O con respecto a un punto inicial, luego se desplaza 20 km según la dirección N60°O. Hallar el valor del desplazamiento total con respecto a su nueva ubicación.

team CALAPENSHKO


**Resolución:** A: punto de partida




$\triangle_{BDC}$ (30° y 60°) $\Rightarrow$ BD = 10 $\wedge$ CD = $10\sqrt{3}$

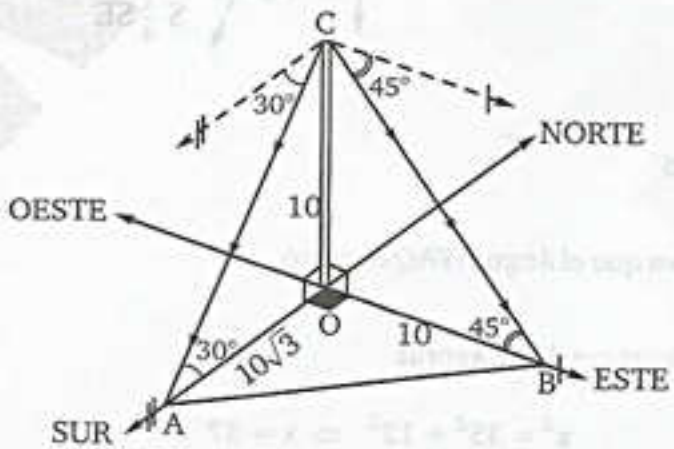
$\triangle_{ADC}$: Teorema de Pitágoras:

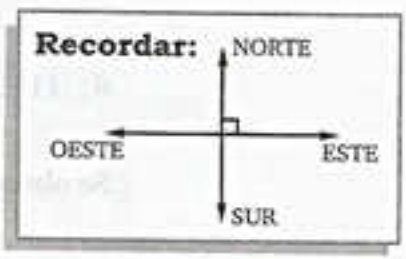
$$x^2 = 50^2 + (10\sqrt{3})^2$$
$$x = 20\sqrt{7}$$

$\therefore$ **El valor del desplazamiento total es $20\sqrt{7}$ km.**

**PROBLEMA 13** Desde el alto de una torre de 10m de altura se observan dos puntos A y B en tierra hacia el SUR y al ESTE con ángulo de depresión de valores 30° y 45° respectivamente. Halle: AB

**Resolución:**




PLANO VERTICAL:

$\triangle_{AOC}$ (30° y 60°): OC = 10 $\Rightarrow$ AO = $10\sqrt{3}$

$\triangle_{BOC}$ (45° y 45°): OC = 10 $\Rightarrow$ OB = 10

PLANO HORIZONTAL:

$\triangle_{AOB}$: OB = 10 $\wedge$ AO = $10\sqrt{3}$

$\therefore$ AB = 20

team CALAPENSHKO

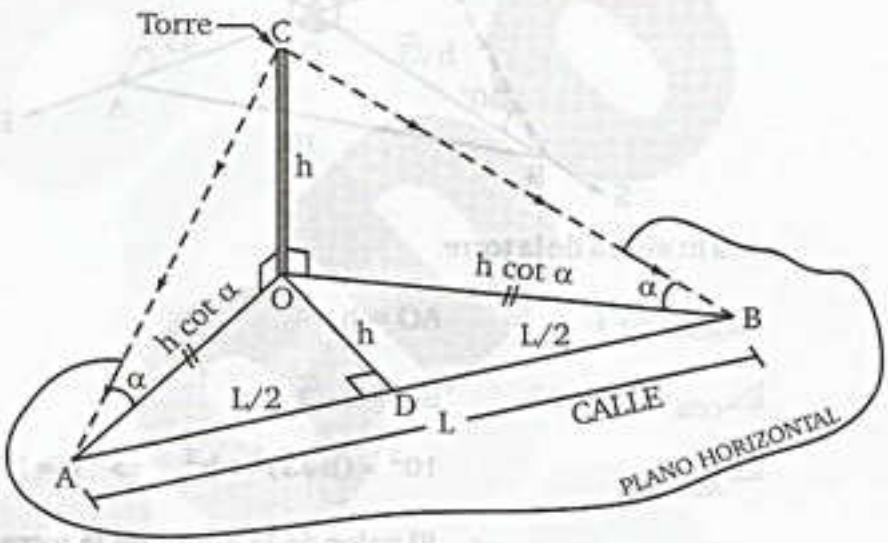

**PROBLEMA 14** Desde los extremos de una calle se observa lo alto de una torre con ángulos de elevación de valor "α" si la altura de la torre es igual a la distancia de la base de la torre hacia la calle. Determine el cociente entre la longitud de la calle y la altura de la torre.

**Resolución:** Interpretando el enunciado, tenemos:

Altura de la torre: h

Longitud de la calle: L

Piden: $\frac{L}{h}$




PLANO VERTICAL:

$\triangle_{AOC}$: $AO = h \cot \alpha$

$\triangle_{BOC}$: $BO = h \cot \alpha$

PLANO HORIZONTAL:

$\triangle_{AOB}$: Isósceles, trazamos $OD \perp AB$:

$$AD = DB = \frac{L}{2} \wedge OD = h \text{ ..... (Dato)}$$

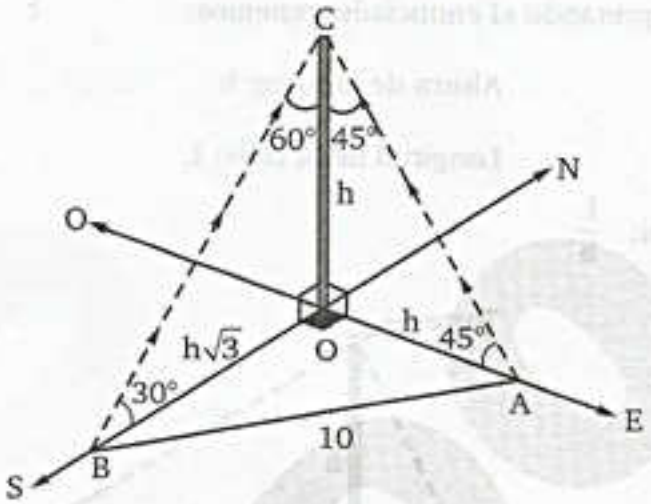
$\triangle_{ADO}$: Teorema de Pitágoras

$$\left(\frac{L}{2}\right)^2 + h^2 = (h\cot\alpha)^2 = h^2(\cot^2\alpha - 1) \Rightarrow \frac{L^2}{h^2} = 4(\cot^2\alpha - 1)$$

$$\therefore \frac{L}{h} = 2\sqrt{ctg^2\alpha - 1}$$

**PROBLEMA 15** Desde un punto situado al SUR de una torre, se observa la parte mas alta de ésta con un ángulo de elevación de 30° y desde otro punto situado al ESTE de la torre el ángulo de elevación es de valor de 45°. Hallar al altura de la torre, sabiendo que la distancia entre los dos puntos de observación mide 10 m.

**Resolución:**




Sea h: altura de la torre.

$\triangle_{AOC}$ (45°) $AO = h$

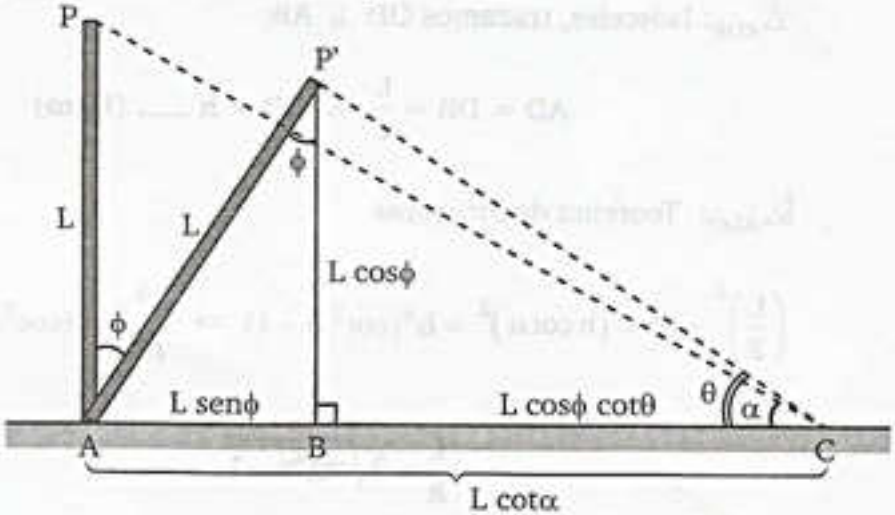
$\triangle_{COB}$ (30° y 60°) $BO = h\sqrt{3}$

$\triangle_{AOB}$: $10^2 = (h\sqrt{3})^2 + h^2 \Rightarrow h = 5$

$\therefore$ **El valor de la altura de la torre es 5 m.**

**PROBLEMA 16** Un poste vertical es visto desde un punto en tierra con un ángulo de elevación de valor "α". Por efecto del clima, este poste se desvía un ángulo de valor "ϕ" respecto a la vertical y hacia el lado del observador; de donde será nuevamente observado bajo un ángulo de valor "θ" (el poste no pierde su longitud). Calcule el valor de ϕ.

**Resolución:** Graficando: sea la altura del poste L



team CALAPENSHKO



Se observa del gráfico:

$$AB + BC = AC$$

Reemplazando : $L \operatorname{sen}\phi + L \cos\phi \cot\theta = L \cot\alpha$

$$\operatorname{sen}\phi + \cos\phi \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \cot\alpha$$

Operando : $\underbrace{\operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta + \cos\phi\cos\theta} = \cot\alpha \operatorname{sen}\theta$

Por variable compuesta : $\cos(\theta - \phi) = \cot\alpha \operatorname{sen}\theta$

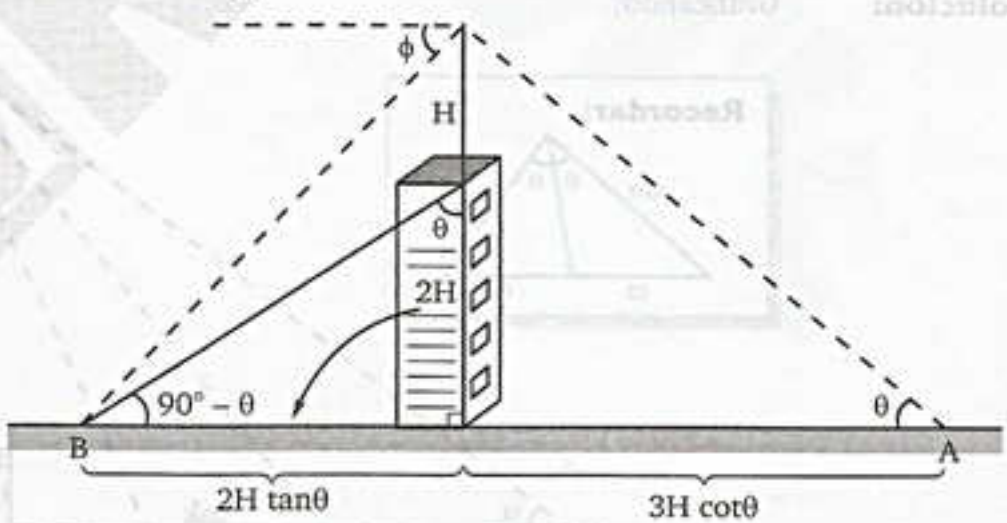
$$\theta - \phi = \text{arc}\cos(\cot\alpha \operatorname{sen}\theta)$$

$$\therefore \quad \phi = \theta - \text{arc}\cos(\cot\alpha \operatorname{sen}\theta)$$

**PROBLEMA 17** Se tiene un edificio y una antena en su parte alta; cuya longitud es igual a la mitad de la altura del edificio. Desde un punto "A" ubicado a un lado del edificio, se ve lo alto de la antena con un ángulo de elevación de valor "θ"; y desde otro punto "B" ubicado al otro lado del edificio se ve lo alto de él con un ángulo de elevación de valor "90 – θ". Determine el valor de la tangente del ángulo de depresión con que se ve el punto "B" desde lo alto de la antena; si la longitud de $\overline{AB}$ es mínima.

**Resolución:** Graficando; aplicando calculo de lado para cada triángulo rectángulo y además recordar por números reales la propiedad:

$$ax + \frac{b}{x} \geq 2\sqrt{ab} \quad ; \quad a > 0 \wedge b > 0$$




Dato : AB es mínimo

$$\overline{AB}_{Mín.} = 2H\tan\theta + 3H\cot\theta \geq 2\sqrt{2(H\tan\theta)(3H\cot\theta)}$$

Aplicando la propiedad:

$$\overline{AB}_{Mín.} = 2H\sqrt{6}$$

Se cumple : $2H\tan\theta = 3H\cot\theta$

$$2\tan\theta = 3\frac{1}{\tan\theta}$$

$$\tan^2\theta = \frac{3}{2}$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Piden del gráfico : $\tan\phi = \dfrac{3H}{2H\ .\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$

Racionalizando : $\tan\phi = \dfrac{3\sqrt{2}.\ \sqrt{3}}{2\ .\ 3}$

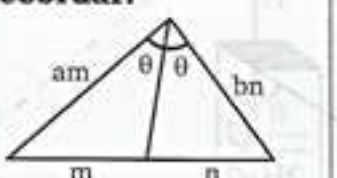
$$\therefore\ \tan\phi = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

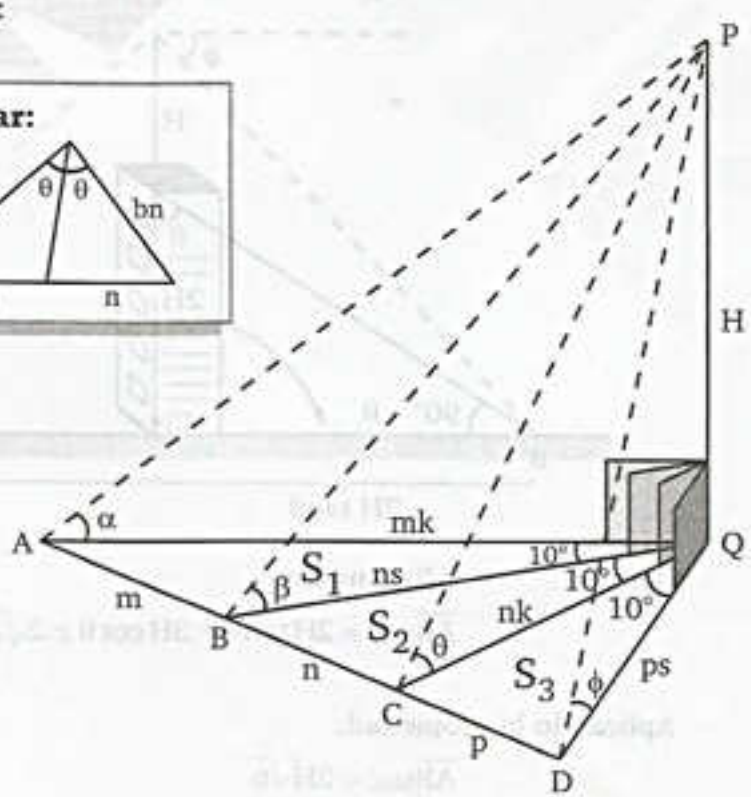
**PROBLEMA 18** Desde cuatro puntos colineales de la superficie A, B, C y D, se divisa lo alto de una torre $\overline{PQ}$ ("Q" en el piso) con ángulos de elevación que miden $\alpha$, $\beta$, $\theta$ y $\phi$ respectivamente. Si: $\angle AQB = \angle BQC = \angle CQD = 10°$ y $\text{sen}\,10° \approx 0{,}173648$.
Calcule:

$$J = \frac{\tan\alpha\tan\phi}{\tan\beta\tan\theta} + \frac{\tan\alpha}{\tan\theta} + \frac{\tan\phi}{\tan\beta}$$

**Resolución:** Graficando:

**Recordar:**



team CALAPENSHKO


Se observa del gráfico:

$$\tan\alpha = \frac{H}{mk}\ ;\ \tan\beta = \frac{H}{ns}\ ;\ \tan\theta = \frac{H}{nk}\ ;\ \tan\phi = \frac{H}{ps}$$

Reemplazando en "J" :

$$J = \frac{\left(\frac{H}{mk}\right)\left(\frac{H}{ps}\right)}{\left(\frac{H}{ns}\right)\left(\frac{H}{nk}\right)} + \frac{\left(\frac{H}{mk}\right)}{\left(\frac{H}{nk}\right)} + \frac{\left(\frac{H}{ps}\right)}{\left(\frac{H}{ns}\right)}$$

$$J = \frac{n^2}{mp} + \frac{n}{m} + \frac{n}{p}$$

**Sabemos:**

$$S = \frac{ab}{2}\operatorname{sen}\theta$$

Pero; se observa del $\Delta_{AQD}$:

$$S_1 + S_2 + S_3 = S_{\Delta AQD}$$

Operando: $\frac{mnks}{2}\operatorname{sen}10° + \frac{n^2ks}{2}\operatorname{sen}10° + \frac{npks}{2}\operatorname{sen}10° = \frac{mpks}{2}\operatorname{sen}30°$

$$\operatorname{sen}10°(mn + n^2 + np) = mp\left(\frac{1}{2}\right)$$

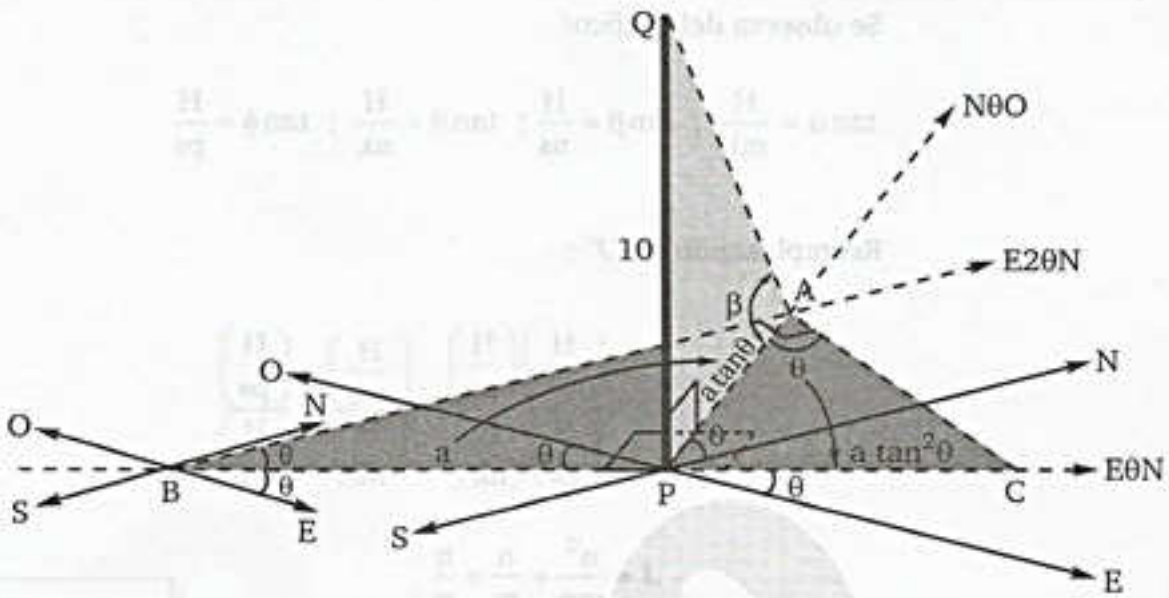
$$\frac{mn}{mp} + \frac{n^2}{mp} + \frac{np}{mp} = \frac{1}{2}\csc 10°$$

$$\underbrace{\frac{n^2}{mp} + \frac{n}{m} + \frac{n}{p}} = \frac{1}{2}\csc 10°$$

$$J = \frac{1}{2}(5{,}7588)$$

$$\therefore\ J = 2{,}8794$$

**PROBLEMA 19** Desde el pie de altura de un poste de 10 m de altura, parten 3 niños A, B y C en las direcciones NθO, OθS y θ al NORTE del ESTE respectivamente, en cierto instante la suma de las longitudes recorridas por B y C es 30 m. Sabiendo además que en dicho momento A, B y C determinan un triángulo rectángulo recto en "A" y "A" es visto desde "B" en la dirección 2θ al NORTE del ESTE; calcule el valor del ángulo de elevación con que "A" observa la parte más alta del poste.




Sea : $BP = a$

Del gráfico : $AP = a\tan\theta \Rightarrow PC = a\tan^2\theta$

Dato : $BP + PC = 30$

Reemplazando : $a + a\tan^2\theta = 30$

$$a(1+\tan^2\theta) = 30$$

$$a\sec^2\theta = 30$$

$$a = 30\cos^2\theta \quad \text{.....(1)}$$

Calculemos "β" : $\tan\beta = \dfrac{10}{a\tan\theta}$ .....(2)

(1) en (2) : $\tan\beta = \dfrac{10}{30\cos^2\theta \cdot \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}} = \dfrac{1}{3 \cdot \operatorname{sen}\theta\cos\theta}$ .....(3)

**Recordar:**

$$\operatorname{sen}2\theta = 2\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta = \frac{\operatorname{sen}2\theta}{2} \quad \text{.....(4)}$$

(4) en (3) : $\tan\beta = \dfrac{1}{3 \cdot \dfrac{\operatorname{sen}2\theta}{2}} = \dfrac{2}{3 \cdot \operatorname{sen}2\theta} = \dfrac{2}{3} \cdot \csc 2\theta$

$$\therefore \quad \beta = \arctan\left(\frac{2}{3}\csc 2\theta\right)$$

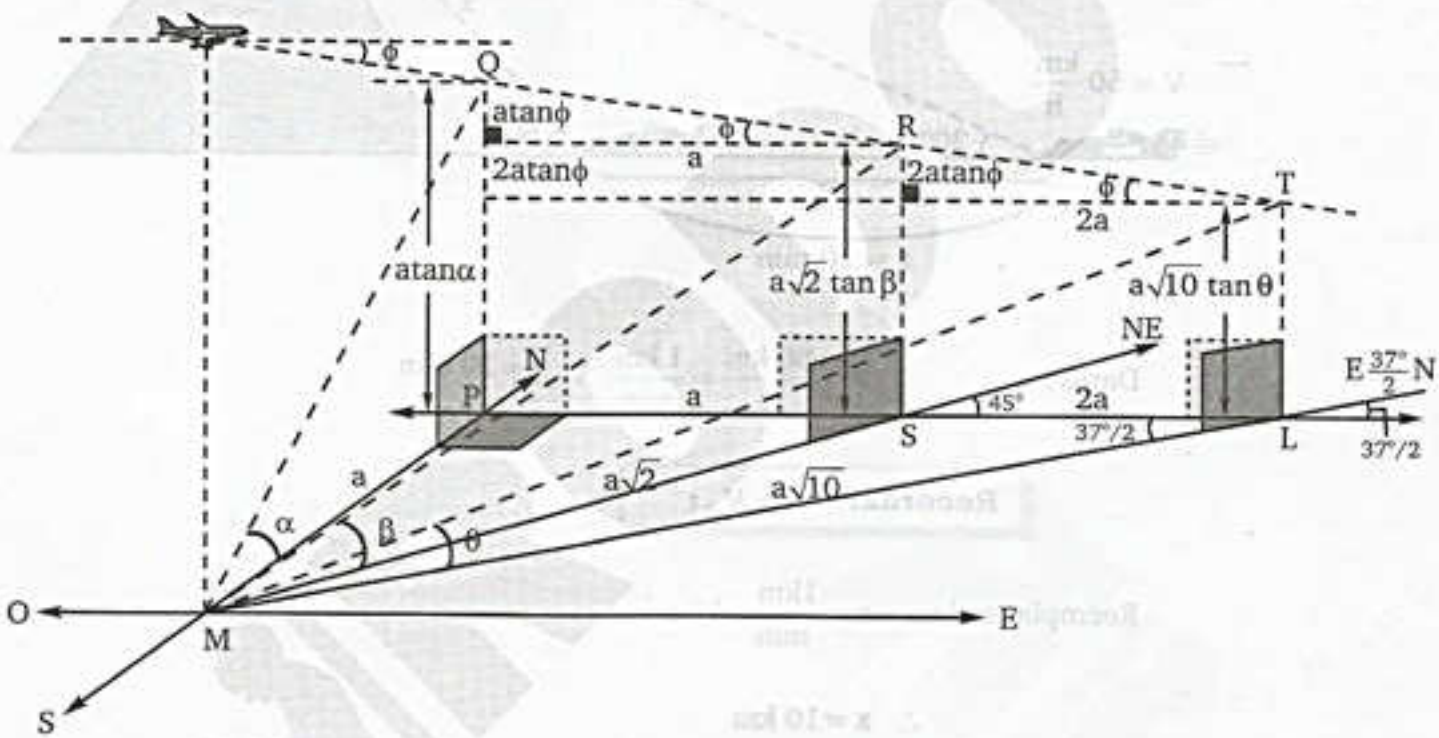
team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 20** Un avión viaja de OESTE a ESTE con una cierta declinación de valor "$\phi$" respecto a la horizontal. En un cierto momento desde "M" (en el suelo) se observa al avión al NORTE con un ángulo de elevación que mide "$\alpha$", luego al NE con un ángulo de elevación de valor "$\beta$" y finalmente al $E\frac{37°}{2}N$ con un ángulo de elevación de valor "$\theta$". Determine un equivalente de la expresión:

$$A = \sqrt{(\tan\alpha - \sqrt{2}\tan\beta)(\tan\alpha - \sqrt{10}\tan\theta)}$$

En términos de $\phi$

**Resolución:**




Sea : $MP = a$

Luego : $PQ = a\tan\alpha$ ; $RS = a\sqrt{2}\tan\beta$ ; $TL = a\sqrt{10}\tan\theta$

Del gráfico se nota que:

- $a\tan\alpha = a\sqrt{2}\tan\beta + a\tan\phi \rightarrow \tan\alpha - \sqrt{2}\tan\beta = \tan\phi$
- $a\tan\alpha = a\sqrt{10}\tan\theta + 3a\tan\phi \rightarrow \tan\alpha - \sqrt{10}\tan\theta = 3\tan\phi$

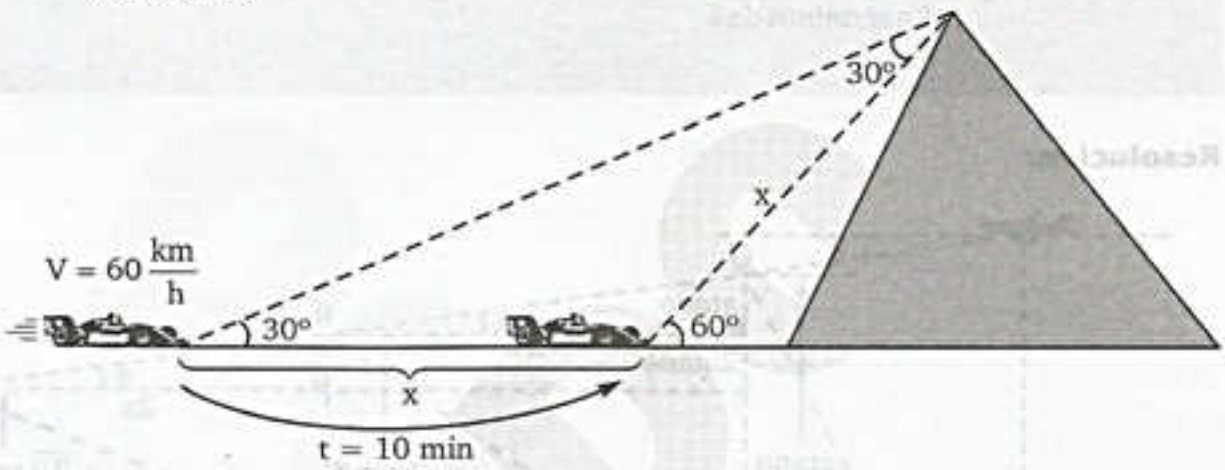
Luego reemplazando en "A":

$$A = \sqrt{(\tan\phi)(3\tan\phi)}$$

$$\therefore \quad \mathbf{A = \sqrt{3}\tan\phi}$$

**PROBLEMA 21** Un automovilista viaja en una carretera plana, hacia una montaña a 60 km/h. En un instante observa la cima de la montaña con un ángulo de elevación que mide 30° y 10 minutos más tarde vuelve a observar la cima con un ángulo de elevación de 60° de valor. Determine la distancia en km a la cima de la montaña, cuando se encuentra en el segundo instante.

**Resolución:** Graficando:




Datos : $V = \frac{60\ km}{h} = \frac{1\ km}{min}$ ; $t = 10\ min$

**Recordar:** $e = V \cdot t$

Reemplazando : $x = \frac{1km}{min} \cdot 10\ min$

$\therefore\ \mathbf{x = 10\ km}$

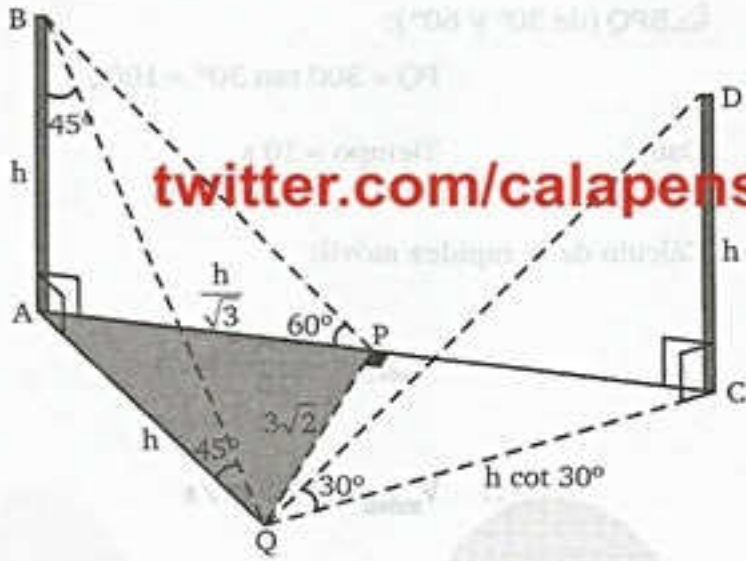
**PROBLEMA 22** Dos edificios AB y CD tienen la misma altura. Una persona se ubica entre dichos edificios de tal manera que su posición está en la línea recta AC que une sus bases. Dicha persona observa el extremo B con un ángulo de elevación que mide 60°, si luego de caminar rectilíneamente $3\sqrt{2}$ m en una dirección perpendicular a la recta AC, observa los extremos B y D con ángulos de elevación de valores: 45° y 30° respectivamente, entonces la distancia de su posición inicial al extremo C es:

**Resolución:** Sea $PQ = 3\sqrt{2}$ m

En el $\triangle_{BAQ}$ es isósceles $\Rightarrow AQ = AB = h$

En el $\triangle_{BAP} \Rightarrow AP = AB \cot 60° \Rightarrow AP = \frac{h}{\sqrt{3}}$

team CALAPENSHKO


twitter.com/calapenshko

$\triangle_{APQ}$: $AQ^2 = h^2 = \left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2 + (3\sqrt{2})^2 \Rightarrow h = 3\sqrt{3}$

$\triangle_{DCQ}$: $QC = h \cot 30° = 3\sqrt{3}(\sqrt{3}) \Rightarrow QC = 9$

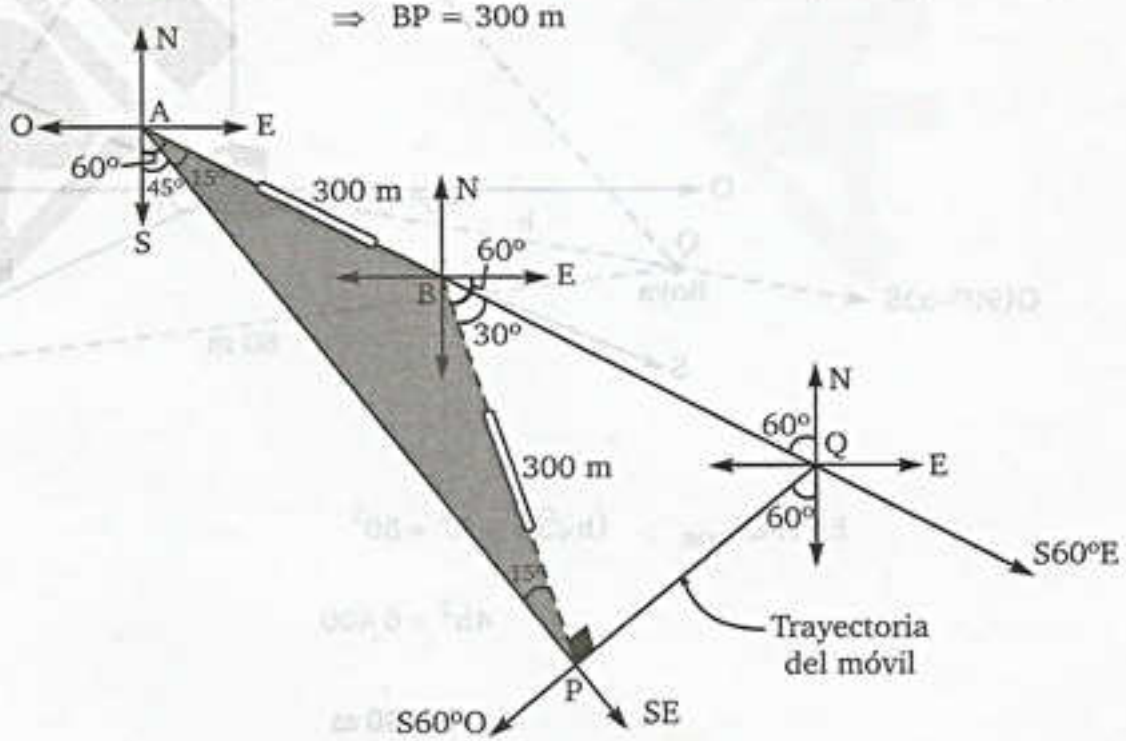
$\triangle_{PCQ}$: $PC^2 = QC^2 - QP^2$

Reemplazando datos: **PC = $3\sqrt{7}$ m**

**PROBLEMA 23** En un instante dado, dos personas observan un móvil en un punto Q, en el rumbo S60°E, luego de 10 segundos lo ven en las direcciones SE y E60°S. Si el rumbo que toma el móvil de Q es S60°C. Determine la rapidez del móvil, sabiendo además que la longitud entre las personas es 300 m.

**Resolución:** Sean A y B puntos donde se encuentran los observadores; ΔABP (isósceles)

$\Rightarrow$ BP = 300 m



team CALAPENSHKO



$\triangle$BPQ (de 30° y 60°):

$$PQ = 300 \tan 30° = 100\sqrt{3}$$

Dato : Tiempo = 10 s

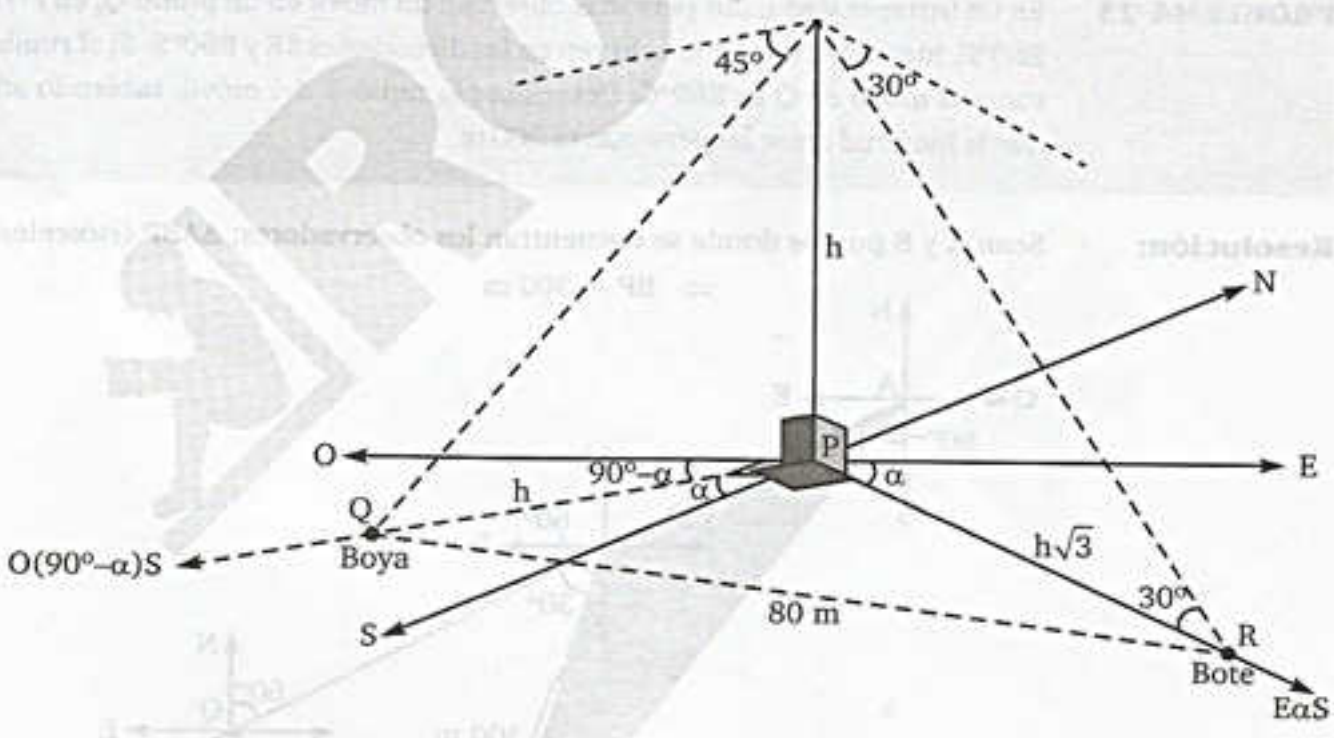
Cálculo de la rapidez móvil:

$$V_{móvil} = \frac{100\sqrt{3}}{10} m/s$$

$$\therefore \quad \mathbf{V_{móvil} = 17{,}3\ m/s}$$

**PROBLEMA 24** Desde lo alto de un acantilado; se observa en la dirección O(90° – α)S a una boya, bajo un ángulo de depresión que mide 45° y en la dirección EαS a un bote con un ángulo de depresión que mide 30°. Si la distancia que separa a la boya y el bote es 80 m, determinar (en m) la altura del acantilado.

**Resolución:** Graficando:




En el $\triangle_{PQR}$ : $(h\sqrt{3})^2 + h^2 = 80^2$

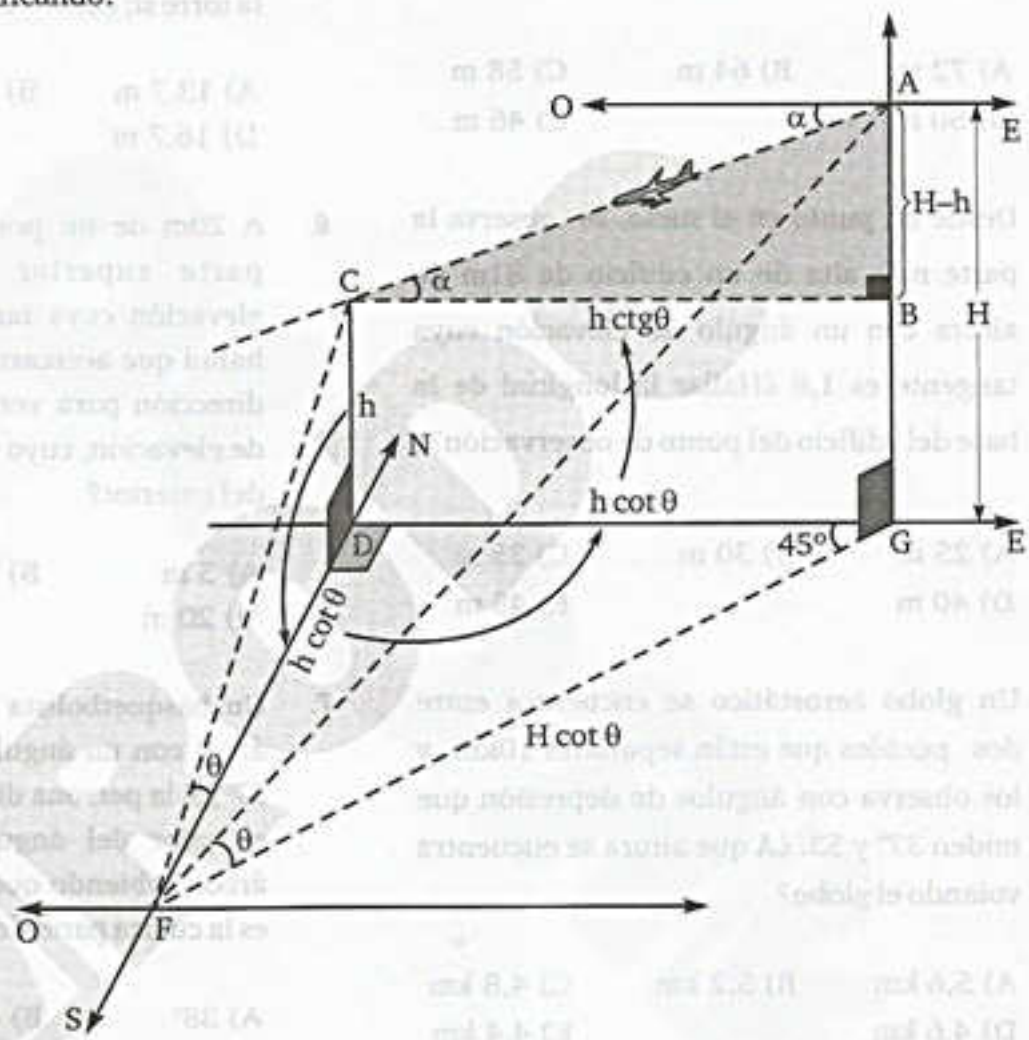
$$4h^2 = 6\,400$$

$$\therefore \quad \mathbf{h = 40\ m}$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 25** Un avión cae con un ángulo de inclinación de valor "α" debajo de la horizontal en la dirección EO. Calcule el valor de la tangente (tan α) para que un observador vea el avión primero hacia el NE y luego hacia el norte con el mismo ángulo de elevación que mide "θ"

**Resolución:** Graficando:




En $\triangle_{FDG}$ : Isósceles

$$FD = FG \cdot \operatorname{sen}45^\circ \Rightarrow h\cot\theta = H\cot\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \therefore H = \sqrt{2}\,h$$

En $\triangle_{CBA}$ : $$\tan\alpha = \frac{AB}{CB} = \frac{H-h}{h\cot\theta} = \frac{h(\sqrt{2}-1)}{h\cot\theta}$$

$$\therefore \tan\alpha = (\sqrt{2}-1)\tan\theta$$

team CALAPENSHKO


## PROBLEMAS PROPUESTOS

**1.** Desde lo alto de un acantilado de 21 m de altura, se observa una boya en el mar con un ángulo de depresión de valor de 16°. Halle aproximadamente la longitud, de la boya al pie de altura del acantilado.

A) 72 m B) 64 m C) 58 m
D) 50 m E) 46 m

**2.** Desde un punto en el suelo, se observa la parte mas alta de un edificio de 81m de altura con un ángulo de elevación cuya tangente es 1,8 ¿Hallar la longitud de la base del edificio del punto de observación?

A) 25 m B) 30 m C) 35 m
D) 40 m E) 45 m

**3.** Un globo aerostático se encuentra entre dos pueblos que están separadas 10km y los observa con ángulos de depresión que miden 37° y 53. ¿A que altura se encuentra volando el globo?

A) 5,6 km B) 5,2 km C) 4,8 km
D) 4,6 km E) 4,4 km

**4.** Un faro de 20m de altura se encuentra al borde de un acantilado. Desde un bote en el mar las elevaciones de la parte superior e inferior de la torre con ángulos de elevación de valores "$\alpha$" y "$\beta$"
Siendo $\tan\alpha = \frac{1}{3}$ y $\tan\beta = \frac{1}{5}$ ; Hallar la altura del acantilado

A) 20 m B) 25 m C) 30 m
D) 15 m E) 40 m

**5.** Una persona de 1.7 m de altura, observa la parte de una torre con un ángulo de elevación de valor "$\theta$", si la persona se acerca 45 m hacia la torre, el valor del ángulo de elevación es $\phi$. Hallar la altura de la torre si: $\cot\theta - \cot\phi = 3$.

A) 13.7 m B) 19.7 m C) 15.7 m
D) 16.7 m E) 21.7 m

**6.** A 20m de un poste, se ve el foco de la parte superior con un ángulo de elevación cuya tangente es 0,5. ¿Cuánto habrá que acercarnos al poste en la misma dirección para ver el foco con un ángulo de elevación, cuyo valor es el complemento del anterior?

A) 5 m B) 10 m C) 15 m
D) 20 m E) 24 m

**7.** Un basquetbolista observa la copa de un árbol con un ángulo de elevación de valor 37°, si la persona dista 8 m del árbol. Hallar el valor del ángulo de observación del árbol, sabiendo que la altura de la persona es la cuarta parte del árbol en mención.

A) 38° B) 43° C) 51°
D) 58° E) 64°

**8.** Un pato que se encuentra sobre una laguna, se percata de la presencia de un cazador a 1 4 m. El ave alza vuelo en línea recta con un ángulo que mide 53°, alejándose. El cazador hace un tiro certero con un ángulo de 37° de valor. Halle la distancia de vuelo del ave antes de caer muerta.

A) 20 m B) 25 m C) 30 m
D) 35 m E) 40 m

team CALAPENSHKO


**9.** Desde la parte superior de un poste de 12 m de altura, se observan los puntos A y B, ubicados en un plano horizontal con ángulo de depresión de valores 45° y 37° respectivamente. Halle el valor de la mayor distancia entre A y B.

A) 15 m B) 18 m C) 20 m
D) 24 m E) 28 m

**10.** Desde el mirador de un cerro se ve hacia una misma dirección dos puntos A y B en tierra con ángulos de depresión de valores 30° y 45°. Si la distancia entre los puntos A y B es 300 m, hallar la altura del cerro.

A) 389 m B) 411 m C) 525 m
D) 452 m E) 372 m

**11.** Un árbol se encuentra sobre una ladera la cual tiene una inclinación de 23° con la horizontal. A una distancia de 30 m colina abajo desde el pie del árbol, el valor del ángulo de elevación hasta su parte superior es de 53°. Halle la altura del árbol.

A) 20 m B) 25 m C) 15 m
D) 35 m E) 30 m

**12.** Un avión se encuentra volando horizontalmente a 180 km/h. En cierto instante, el piloto ve una señal en tierra con un ángulo de depresión de valor 30°. Un minuto después, estando sobre la señal, el piloto observa a 2000 m un aerostato a un ángulo de elevación de valor de 45° ¿A qué altura está volando el aerostato en ese instante?

A) 1,57 km B) 3,14 km C) 4,71 km
D) 5,36 km E) 6,28 km

**13.** Un avión en picada, es observado desde un punto de tierra con un ángulo de elevación de valor de 60° y una visual de 800 m, luego de pasar sobre dicho punto de observación, es observado nuevamente desde dicho punto con un de ángulo de elevación de valor de 30° y una visual de 600 m. Halle el valor del ángulo de inclinación, con respecto la horizontal cae dicho avión?

A) 8° B) 16° C) 21°
D) 23° E) 30°

**14.** Una cuerda elástica se mantiene unida a un poste y a tierra manteniendo el poste verticalmente. Al mediodía un movimiento telúrico hace que el poste sufra una inclinación proyectando una sombra la cual es la mitad del poste. Si antes y después del temblor el valor del ángulo formado por la cuerda y la tierra eran de 53° y θ, halle aproximadamente el valor de "tan θ"

A) 0,43 B) 0,52 C) 0,61
D) 0,69 E) 0,73

**15.** A medianoche, desde un observatorio situado sobre la línea ecuatorial, se ve arriba de ella un ovni estático en el espacio. Si debido al movimiento de rotación de la tierra, desde el observatorio se deja de ver al ovni a las 4:00 h ¿Halle la altura del ovni?
Considere a "R" como radio de la tierra.

A) $\frac{R}{4}$ B) $\frac{R}{2}$ C) $3\frac{R}{4}$
D) R E) $3\frac{R}{2}$

16. Un padre y su hijo se encuentra de pie uno frente al otro. El padre ve la parte superior de su hijo con un ángulo de depresión de valor de "$\phi$". El hijo ve al padre bajo un ángulo recto. Si la estatura del padre es H", halle la longitud de separación entre el padre y el hijo.

A) H. sen $\phi$
B) H. cos $\phi$
C) H. $\text{sen}^2\,\phi$
D) H. $\cos^2\phi$
E) H. sen $\phi$. cos$\phi$

17. Desde un satélite de comunicación se ve a la tierra bajo un ángulo de valor "$\theta$". Considerando a la tierra como una esfera de radio "R". ¿ A qué altura se encuentra el satélite?

A) R. cot($\theta$/2)
B) R . sec($\theta$/2)
C) R . csc($\theta$/2)
D) R . [sec($\theta$/2) – 1]
E) R . [csc($\theta$/2) – 1]

18. En el polo norte una foca observa un iglú, que tiene la forma de semiesfera de radio "r" con un ángulo de valor "$\alpha$". Halle la distancia que se debe de acercar la foca al iglú para verla con un ángulo de valor "$\beta$"

A) r . (sen$\alpha$ – sen$\beta$)
B) r . (cos$\alpha$ – cos$\beta$)
C) r . (tan$\alpha$ – tan$\beta$)
D) r . (sec$\alpha$ – sec$\beta$)
E) r . (csc$\alpha$ – csc$\beta$)

19. Una persona ubicada a cierta distancia de la base de un pedestal de 12 m de altura; que soporta una estatua de 13 m de altura; observa lo alto de la estatua con un ángulo de elevación, la cual es el doble del valor del ángulo de elevación, con el cual observaría la parte superior del pedestal. Halle la distancia de la persona al pedestal.

A) 13 m B) 24 m C) 36 m
D) 48 m E) 60 m

20. Sobre una colina que desciende de ESTE a OESTE y cuyo ángulo de inclinación mide "$\theta$", se encuentra un poste de longitud "L" cuya desviación respecto de la línea vertical es "$\alpha$" hacia el OESTE. Determine la longitud de la sombra proyectada por el poste al mediodía.

A) L . sen$\alpha$ . cos$\theta$
B) L . sen$\alpha$ . tan$\theta$
C) L . tan$\alpha$ . cot $\theta$
D) L . cos$\alpha$ . csc $\theta$
E) L . sen$\alpha$ . sec$\theta$

21. Un niño se encuentra en el centro de su jardín que tiene la forma de un triángulo equilátero y observa uno de sus vértices con un ángulo de depresión de valor 30°; luego de caminar hacia uno de los vértices, observa otro vértice con un ángulo de depresión de valor "$\phi$". Halle tan $\phi$.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

22. Las caras de la pirámide de Kefrén en el valle del Nilo están inclinadas aproximadamente 53° respecto de la horizontal. A una distancia de 84 m directamente a partir de la base, el ángulo de la elevación a la cúspide de la pirámide mide 37°. ¿Cuánto vale la extensión de la cara desde la base hasta el vértice de la pirámide?

A) 140 m B) 150 m C) 160 m
D) 170 m E) 180 m

team CALAPENSHKO



**23.** Un observador ve el ascenso de un globo verticalmente, la 1.ª, 2.ª y 3.ª observación lo hace con ángulo de elevación que miden $\theta$, $2\theta$ y $3\theta$ respectivamente. Si en la 1.ª y 2.ª observación sus alturas miden 30 m y 80 m respectivamente. Halle la altura de la 3.ª observación.

A) 180 m B) 200 m C) 250 m
D) 300 m E) 330 m

**24.** Desde la base de una colina inclinada con un ángulo de valor "$\phi$" respecto a la horizontal, una persona observa la parte superior de una torre de altura "h" con ángulo de elevación que mide $2\phi$. ¿Qué distancia debe de ascender la persona sobre la colina para que el nuevo ángulo de elevación mida "$3\phi$"?

A) $h\,\text{sen}\phi$ B) $\frac{h}{2}\cos\phi$ C) $h\tan\phi$
D) $2h\cot\phi$ E) $\frac{h}{2}\csc\phi$

**25.** Desde la azotea de un edificio, se observa a una persona que se acerca hacia este con un ángulo de depresión que mide "$\alpha$" y cuando la persona ha recorrido una distancia igual a la altura del edificio, es observado con un ángulo de depresión cuyo valor es el complemento del valor de "$\alpha$". Calcular: $\tan\alpha$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\sqrt{5}$ C) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
D) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

**26.** Desde un punto situado a una altura "h" sobre el nivel de una laguna, se observa un globo con un ángulo de elevación que mide "$\alpha$" y su imagen reflejada en la laguna con un ángulo de depresión de valor "$\theta$". Halle la altura del globo sobre el nivel de la laguna

A) $h\tan\alpha\tan\theta$
B) $h\cot\alpha\cot\theta$
C) $h(\tan\alpha+\tan\theta)$
D) $h\left(\frac{\tan\theta+\tan\alpha}{\tan\theta-\tan\alpha}\right)$
E) $h\left(\frac{\tan\theta-\tan\alpha}{\tan\theta+\tan\alpha}\right)$

**27.** Un avión que esta por aterrizar observa en su misma trayectoria la pista de aterrizaje, se observa hacia delante el extremo más lejano y cercano de la pista con ángulos de depresión de valores: "$\alpha$" y "$\beta$". Si el avión se encuentra descendiendo con un ángulo "$\theta$" ($\alpha<\theta<\beta$) y vuela una distancia que mide "d" para tocar la pista, ¿luego la longitud de la pista es?

A) $d\,.\,\text{sen}\theta\,.\,(\tan\alpha-\tan\beta)$
B) $d\,.\,\text{sen}\theta\,.\,(\tan\alpha+\tan\beta)$
C) $d\,.\,\text{sen}\theta\,.\,(\cot\alpha-\cot\beta)$
D) $d\,.\,\cos\theta\,.\,(\tan\alpha+\tan\beta)$
E) $d\,.\,\cos\theta\,.\,(\cot\alpha-\cot\beta)$

**28.** Una niña corta un árbol a "x" metros de su base y observa que la punta que cae forma un ángulo que mide $\theta$ con la horizontal; pero si lo cortase un metro más arriba, la parte que cae forma un ángulo de valor "$\phi$" con la horizontal. Si la pequeña decide calcular la altura del árbol con estos datos. ¿Qué altura obtendría?

A) $\frac{\sec\theta+\sec\phi}{\sec\theta-\sec\phi}$
B) $\frac{\csc\theta+\csc\phi}{\csc\theta-\csc\phi}$
C) $\frac{\sec\theta\csc\phi}{\sec\theta+\csc\phi}$
D) $\frac{(\sec\phi+1)(\sec\theta+1)}{\sec\phi-\sec\theta}$
E) $\frac{(\csc\theta+1)(\csc\phi+1)}{\csc\theta+\csc\phi}$

**29.** Entre dos torres de alta tensión separadas por una distancia "d", se encuentra un cable unida al extremo de cada torre, el cual describe una porción de circunferencia de radio "R". Halle la longitud del cable.

A) $R \cdot \arcsen\left(\frac{d}{2R}\right)$

B) $R \cdot \arcsen\left(\frac{d}{R}\right)$

C) $2R \cdot \arcsen\left(\frac{d}{2R}\right)$

D) $R \cdot \arccos\left(\frac{d}{2R}\right)$

E) $2R \cdot \arccos\left(\frac{d}{R}\right)$

**30.** Una persona ubicada en la orilla de un río ve un árbol plantado exactamente sobre la ribera opuesta (frente a él) con un ángulo de elevación de valor de 60°; luego la persona se desplaza 40 m bordeando la ribera del río, de donde observa nueva mente el árbol bajo un ángulo de elevación de 30°. Halle la altura del árbol.

A) $10\sqrt{2}$ m B) $10\sqrt{3}$ m C) $10\sqrt{5}$ m
D) $10\sqrt{6}$ m E) 10 m

**31.** Sobre una línea horizontal que pasa por el pie de un árbol, dos campesinos en ambos lados del árbol, observan la parte superior de éste, con ángulos de elevación donde el valor de uno es doble del otro. Si la menor visual mide 8 m. Halle la altura del árbol, si la tangente del menor ángulo de elevación es 0,5

A) 3,2 m B) 6,4 m C) 1,6 m
D) 3 m E) 4 m

**32.** En la parte más alta de un edificio hay un mástil de bandera de 4 m de altura. Una persona observa desde el suelo la parte superior del mástil con un ángulo de elevación que mide "$\alpha$" y el extremo inferior con un ángulo de elevación que mide "$\beta$". Halle la altura del edificio, si se cumple: $5\tan\alpha = 6\tan\beta$.

A) 12 m B) 15 m C) 18 m
D) 20 m E) 24 m

**33.** Una persona observa la parte más alta de una torre de 12 m, con un ángulo de elevación que mide "$\theta$", si avanza 13 m, lo observa con un ángulo de elevación que mide "$2\theta$". Halle:

$$W = 2\cot\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sqrt{13}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

**34.** Un niño que esta descendiendo por una colina inclinada, que con respecto al plano horizontal forma un ángulo de valor "$\theta$", observa un objeto en el plano horizontal con un ángulo de depresión que mide "$\phi$". A la mitad del descenso, el valor del ángulo de depresión con que se ve el objeto es "$\alpha$". Halle el valor de: $N = (2\cot\phi - \cot\alpha)\tan\theta$

A) 0,5 B) 1 C) 1,5
D) 2 E) 2,5

**35.** Se tienen dos torres que miden 50 m y 40 m, la separación entre ellas es de 60 m, si desde un punto entre dichas torres en tierra, se observa con ángulos de elevación las partes superiores y además la longitud de las visuales es del mismo valor, entonces halle la distancia del punto a la torre menor.

A) 20 m B) 22,5 m C) 30 m
D) 40 m E) 42,5 m

team CALAPENSHKO

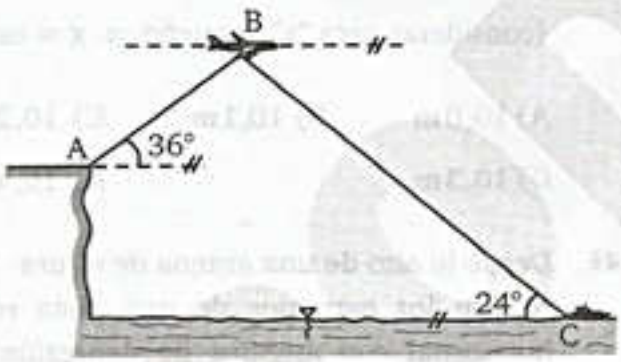

**36.** Un ovni en tierra, divisa lo alto de una montaña con ángulo de elevación que mide "$\alpha$", luego asciende en forma de un cuadrante de radio R. Cuando está a una altura R, observa nuevamente la misma parte superior con ángulo de elevación de valor "$\theta$" ($\theta > \alpha$) y a una distancia visual "d". Halle:

$$P = \frac{d(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta \cdot \tan\alpha)}{\tan\alpha - 1}$$

A) R B) 2R C) $\frac{R}{2}$

D) $R\sqrt{2}$ E) $\frac{R}{4}$

**37.** Del gráfico, haller la cotangente del ángulo ACB, siendo BC = 4AB.




A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$

D) $4\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{2}$

**38.** Un hombre de 1,70 m de altura, situado al NORTE de un poste de alumbrado público observa, que su sombra proyectada mide 6,8 m, luego de caminar 34 m se encuentra al ESTE del poste y su sombra proyectada es 5,1 m. Halle la altura del poste.

A) 10 m B) 10,2 m C) 8,5 m

D) 9,1 m E) 9,7 m

**39.** Un avión cae con un ángulo de inclinación de valor "$\alpha$" debajo de la horizontal, en la dirección EO. Hallar el valor de la "tan$\alpha$" para que un observador vea al avión hacia el NE y luego hacia al NORTE con el mismo ángulo de elevación de valor "$\theta$"

A) $2\tan\theta$ B) $(\sqrt{2}-1)\tan\theta$

C) $\tan\theta$

D) $(\sqrt{2}+1)\tan\theta$ E) $\sqrt{3}\cot\theta$

**40.** Tres reflectores A, B y C al ras del suelo (colineales), iluminan un monumento con ángulos de elevación de valores $\alpha$, $\beta$ y $\theta$ respectivamente. Si la base del monumento forma un ángulo recto con A y C, además el segmento que une la base del monumento con el reflector B es bisectriz del ángulo recto, halle:

$$M = \frac{\tan\alpha + \tan\theta}{\tan\beta}$$

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$

D) 2 E) 3

**41.** Desde un punto A se observa a un punto B en la dirección N60°O, desde B se observa a C en la dirección N75°E y a 10 km. Halle la distancia que separa al punto A del punto C, si A se ubica al S30°O de C.

A) 5 km B) $5\sqrt{3}$ km C) $5\sqrt{2}$ km

D) $10\sqrt{2}$ km E) 10 km

**42.** Dos móviles "P" y "Q" parten del mismo punto; el primero con dirección NE $\frac{1}{4}$N y el segundo con dirección NO $\frac{1}{4}$ O, si ambos avanzan la misma distancia. Diga en que dirección se encuentra "P" respecto de "Q".

A) NE $\frac{1}{4}$E B) E $\frac{1}{4}$NE C) N $\frac{1}{4}$NE

D) NE $\frac{1}{4}$N E) N $\frac{1}{4}$NO

**43.** Desde el centro de una pista circular un móvil se desplaza en la dirección E$\theta$N hasta encontrar la pista. Desde este punto observa la parte más nórdica de la pista en la dirección N50°O. Halle el valor de "$\theta$".

A) 10° B) 20° C) 30°

D) 15° E) 40°

**44.** Desde un avión se ve con ángulo de depresión de valor "x" un punto en el SUR, después de recorrer una trayectoria horizontal "d" hacia el ESTE, ve el punto anterior con un ángulo de depresión de valor "y". Determine la altura a la que se encuentra el avión.

A) $d(\cot^2 x + \cot^2 y)$

B) $d(\cot^2 y - \cot^2 x)^{-1/2}$

C) $d(\tan x - \cot y)$

D) $d(\tan^2 y - \tan^2 x)^{1/2}$

E) $d \cot x \sec y$

**45.** Un avión cae con un ángulo de inclinación "$\alpha$" por debajo de la horizontal, de ESTE a OESTE. ¿Cuál debe ser el valor de tan $\alpha$, para que un observador vea el avión primero hacia el NE y luego hacia el NORTE con el mismo ángulo de elevación $\theta$?

A) $(\sqrt{2}-2)\cot\theta$ B) $(\sqrt{2}+1)\tan\theta$

C) $(\sqrt{2}-1)\cot\theta$

D) $(\sqrt{2}-1)\tan\theta$ E) $(\sqrt{2}+1)\cot\theta$

**46.** Desde dos puntos sobre un plano inclinado se observa cuesta arriba la parte alta de un poste con ángulos de elevación de valores: 30° y 20° respectivamente. Si la distancia entre dichos puntos es 100 m. Halle la altura del poste (el ángulo de inclinación del plano respecto a la horizontal mide 10°).

Dato: cos 80° = 0.17.

A) 34 m B) 35 m C) 36 m

D) 37 m E) 38 m

**47.** El diámetro aparente (ángulo de observación del Sol) es aproximadamente 32'. ¿Qué diámetro debe tener una moneda para poder tapar exactamente al sol?, si la distancia del ojo a la moneda es de 1,5 m. Dato: tan 16' = 0,00465

A) 1,40 cm B) 1,39 cm C) 1,38 cm

D) 1,37 cm E) 1,36 cm

**48.** Un asta de bandera que se encuentra en la azotea de un edificio de altura 100m, subtiende un ángulo de 0,04 rad de valor; desde un punto en tierra que dista 200 m de la base del edificio. Hallar aproximadamente la longitud del asta.

(considerar para "x" pequeño $\Rightarrow$ x = tan x)

A) 10,0 m B) 10,1 m C) 10,2 m

D) 10,3 m E) 10,4 m

**49.** Desde lo alto de una antena de altura "H" se ven los extremos de una pista recta horizontal con ángulos de depresión de valores: "$\alpha$" y "$\beta$".Si las visuales anteriores son perpendiculares; hallar la longitud de la pista.

A) $H\sqrt{\csc\alpha + \csc\beta}$ B) $H\sqrt{\csc\alpha - \csc\beta}$

C) $H\sqrt{\csc\beta - \csc\alpha}$

D) $H\sqrt{\csc^2\alpha + \csc^2\beta}$ E) $H\sqrt{\csc^2\alpha - \csc^2\beta}$

**50.** Un avión desciende con un ángulo de inclinación "$\theta$" en la dirección NORTE – OESTE. Calcule el valor de "sec $\theta$" para que un observador en tierra vea al avión primero hacia el NE y luego hacia el NORTE con ángulos de elevación complementarios a "$\theta$"

A) $\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $\sqrt{2}$

D) $\sqrt[3]{2}$ E) $\sqrt[4]{2}$

team CALAPENSHKO

Capítulo 5

# Razones Trigonométricas de Ángulos en Posición Estándar

**CAPACIDADES**

- Definir correctamente las razones trigonométricas para ángulos trigonométricos.
- Reconocer el valor de las razones trigonométricas de los ángulos cuadrantales
- Establecer las propiedades que verifican los ángulos coterminales y aprovechar estas, para el calculo de las razones con ángulos mayores a una vuelta

## JOHANN MÜLLER REGIOMONTANO

Se puede decir que Regiomontano Campirano fue verdaderamente un niño prodigio. Dio muestras desde sus comienzos de un enorme talento mostrando a muy temprana edad una habilidad sorprendente para las matemáticas. Como muestra de esto, a la edad de once años ya ingresó a la Universidad de Leipzig para estudiar dialéctica, permaneció en los estudios universitarios desde 1447 hasta 1450. Posteriormente ingresó a la Universidad de Viena (1450) y allí conoció al que sería su profesor y amigo Peuerbach.

BUSTO DE REGIOMONTANO
UNIVERSIDAD DE VIENA

Entre los años 1471 y 1472 actuó como un impresor en su propia casa de Nuremberg. Probablemente fuera el primer impresor de literatura científica, su primera obra como impresor fue el libro de su ex profesor Peurbach sobre la teoría de los movimientos planetarios siendo la siguiente impresión en el año 1474 en el que edita su propio "Kalendarium" y su "Ephemerides". Estos libros fueron re-editados muchas veces y cabe destacar la influencia que pudieron llegar a tener sobre Cristóbal Colón y Américo Vespucio, ya que es muy posible que emplearan las "Ephemerides" para medir las longitudes en el "Nuevo Mundo" que tendrían que descubrir.

Obra

La obra escrita de Regiomontano se puede englobar en tratados de matemática, centrados en lo que hoy se denomina trigonometría (Se considera un fundador de esta parte de la matemática) y tratados sobre astronomía. Entre ellas tenemos:

1. De Triangulis Omnimodis
   Regiomontanus estructuró su obra de una forma muy similar a los elementos de Euclides. De triangulis se compone de cinco libros, en el primero da las definiciones básicas: cantidad, ratio, igualdad, círculos, arcos, cuerdas, y la función seno. Proporciona algunos axiomas que proporcionarán el sustento de los 56 teoremas que enunciará. En el segundo de los libros establece la Ley del seno y la emplea en la resolución de algunos problemas con triángulos. Los libros III, IV y V tratan de trigonometría esférica centrando el tema para las posteriores obras de astronomía.

2. Tablas de Senos
   En su estancia en Hungría, Regiomontanus calcula dos tablas de senos. La primera la realiza en 1467 y emplea una división sexagesimal de los ángulos, la otra escrita en Buda calcula los senos de un ángulo empleando una división decimal.

team CALAPENSHKO



## INTRODUCCIÓN

En el capítulo 1 hemos empezado el estudio de la trigonometría definiendo el ángulo de manera diferente a los planteado en geometría, reconociendo así la posibilidad de generar ángulos de cualquier medida, no obstante en el capítulo 2 abordamos sólo definiciones de la razones trigonométricas aplicables sólo a ángulos agudos.

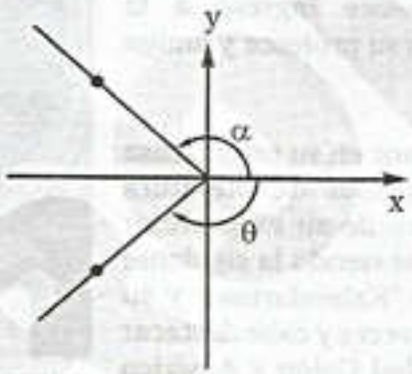
En el presente capítulo, sobre la base de los conceptos y definiciones establecidas en Geometría Analítica (plano cartesiano, punto en el plano, distancia entre dos puntos, etc.) Definiremos las razones trigonométricas de los ángulos en posición estándar.

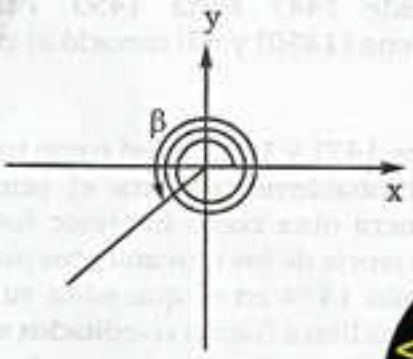
# RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS EN POSICIÓN ESTÁNDAR

## ÁNGULOS EN POSICIÓN ESTÁNDAR

También llamado ángulo en posición canónica o normal, es un ángulo trigonométrico cuyo vértice está en el origen de coordenadas rectangulares y su lado inicial coinciden con el semi-eje positivo de abscisas.

**Ejemplo:**

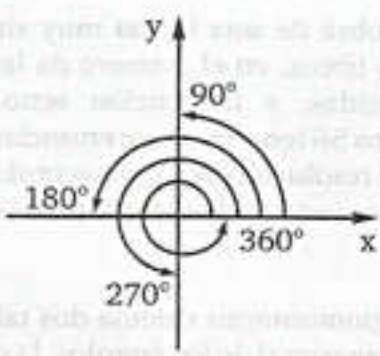



- $\alpha > 0 \wedge \alpha \in$ II C
- $\theta < 0 \wedge \theta \in$ III C
- $\beta > 0 \wedge \beta \in$ IIIC

## ÁNGULOS CUADRANTALES

Son aquellos ángulos trigonométricos que ubicados en posición estándar, su lado final coinciden con algunos de los semi-ejes del plano cartesiano.

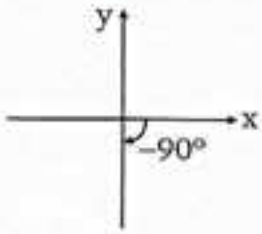



Del gráfico tenemos que entre los cuadrantales tenemos: $0;\ \frac{\pi}{2};\ \pi;\ \frac{3\pi}{2};\ 2\pi$

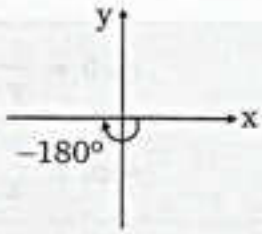
team CALAPENSHKO



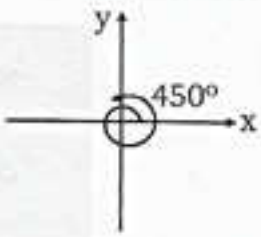
También son ángulos cuadrantales:




;




;




; etc.

**En general:**

$$90°n \text{ ó } \frac{\pi}{2}n\,,\ n \in \mathbb{Z}$$

Para ángulos positivos y menores que una vuelta.

- $0 < \alpha < \pi/2 \Rightarrow \alpha \in$ IC
- $\pi/2 < \alpha < \pi \Rightarrow \alpha \in$ IIC
- $\pi < \alpha < 3\pi/2 \Rightarrow \alpha \in$ IIIC
- $3\pi/2 < \alpha < 2\pi \Rightarrow \alpha \in$ IVC

## ÁNGULOS COTERMINALES

Son ángulos trigonométricos, con el mismo vértice, lado inicial y lado final respectivamente.

**Ejemplo:**

α y β son coterminales

**En general:**

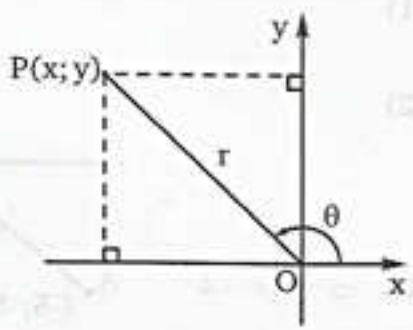
– La diferencia de las medidas de dos ángulos coterminales es un número entero de vueltas, es decir:

$$\alpha - \beta = 360° \cdot n \ ;\ n \in \mathbb{Z}$$

También:

$$RT(\alpha) = RT(\beta)$$

## RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS EN POSICIÓN ESTÁNDAR




$$r = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$

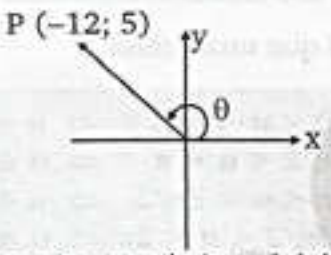
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Donde: x : abscisa
y : ordenada
r : radio vector

**Definiciones:** Las razones trigonométricas de ángulos en posición estándar se definen:

| | |
|---|---|
| $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$ | $\csc\theta = \frac{r}{y}$ |
| $\cos\theta = \frac{x}{r}$ | $\sec\theta = \frac{r}{x}$ |
| $\tan\theta = \frac{y}{x}$ | $\cot\theta = \frac{x}{y}$ |

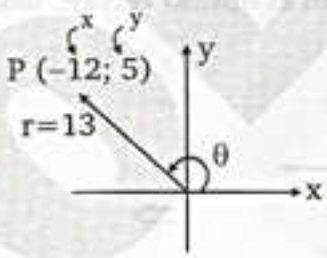
**Ejemplo:** Del gráfico




Calcular las razones trigonométricas del ángulo que mide θ.

**Resolución:** Calculamos el radio vector (r): $r = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} \Rightarrow r = 13$

Así tenemos:

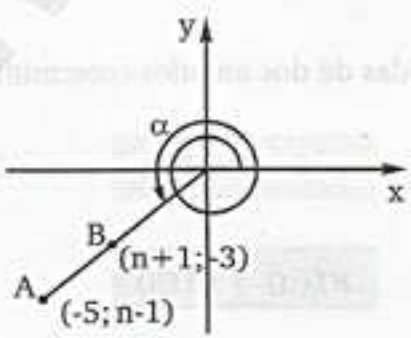



$\operatorname{sen}\theta = \frac{5}{13}$ $\quad \cos\theta = \frac{-12}{13}$

$\tan\theta = \frac{5}{-12}$ $\quad \cot\theta = \frac{-12}{5}$

$\sec\theta = \frac{13}{-12}$ $\quad \csc\theta = \frac{13}{5}$

**Ejemplo:** Del gráfico mostrado, calcule $M = \csc\alpha + \sec\alpha$

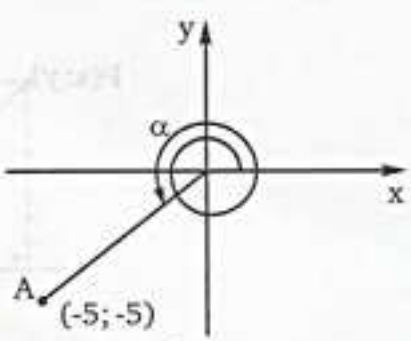



**Resolución:** De A: $\tan\alpha = \frac{n-1}{-5}$ ..... (1)

De B: $\tan\alpha = \frac{-3}{n+1}$ ..... (2)

Igualando (1) y (2):

$$\frac{n-1}{-5} = \frac{-3}{n+1} \Rightarrow n^2 = 16 \Rightarrow n = -4$$



team CALAPENSHKO

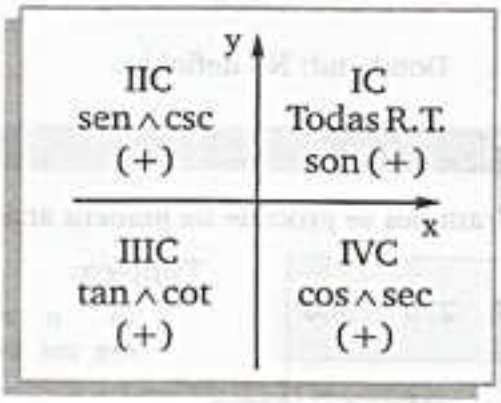


Reemplazando en el punto A: (-5; -5)

Lo pedido: $M = \csc\alpha + \sec\alpha = \left(\frac{5\sqrt{2}}{-5}\right) + \left(\frac{5\sqrt{2}}{-5}\right)$

$\therefore \mathbf{M = -2\sqrt{2}}$

## Signos de la razones trigonométricas en los cuadrantes




(C: cuadrante)

**Ejemplo:** * $120° \in$ IIC $\Rightarrow \operatorname{sen} 120° > 0$ * $240° \in$ IIIC $\Rightarrow \cos 240° < 0$

* $315° \in$ IVC $\Rightarrow \tan 315° < 0$ * $-60° \in$ IVC $\Rightarrow \cos(-60°) > 0$

**Ejemplo:** ¿A qué cuadrante pertenece $\alpha$, si $\operatorname{sen}\alpha\sqrt{\tan\alpha} < 0$ ?

**Resolución:** Se observa que:

- $\operatorname{sen}\alpha < 0 \Rightarrow \alpha \in$ IIIC $\vee$ IV
- $\tan\alpha > 0 \Rightarrow \alpha \in$ IC $\vee$ IIIC

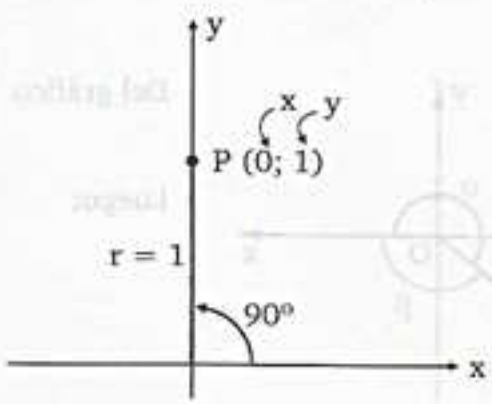
$\therefore \alpha \in$ IIIC

## RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS CUADRANTALES

Las razones trigonométricas de los ángulos cuadrantales se obtienen, así:

**Ejemplo:** Hallar las razones trigonométricas del ángulo de 90°.

**Resolución:** Ubicamos un punto P del lado final del ángulo de 90° en posición normal.



Así tenemos:

$$\operatorname{sen} 90^\circ = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \cos 90^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\tan 90^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{0} = \text{n d} \qquad \cot 90^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\sec 90^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{0} = \text{n d} \qquad \csc 90^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{1} = 0$$

Donde nd: No definido.

**NOTA**

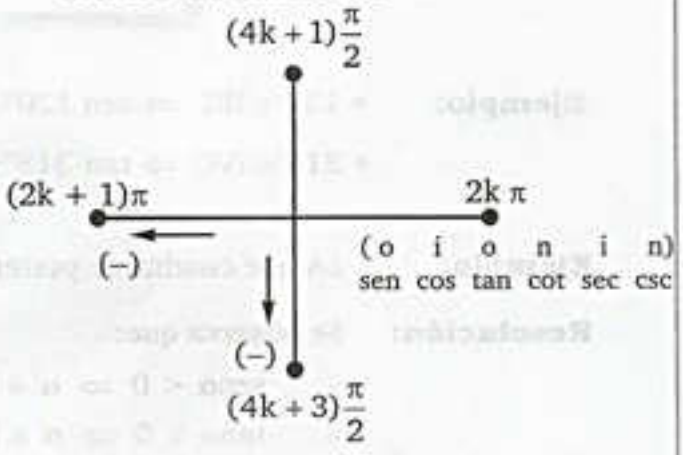
Para los otros ángulos cuadrantales se procede de manera análoga, obteniendose:

| R.T. \ ∠ | 0° | 90° | 180° | 270° | 360° |
|---|---|---|---|---|---|
| sen | 0 | 1 | 0 | −1 | 0 |
| cos | 1 | 0 | −1 | 0 | 1 |
| tan | 0 | nd | 0 | nd | 0 |
| cot | nd | 0 | nd | 0 | nd |
| sec | 1 | nd | −1 | nd | 1 |
| csc | nd | 1 | nd | −1 | n.d. |

nd: (no definido)

También:

(i o n o n i)
sen cos tan cot sec csc

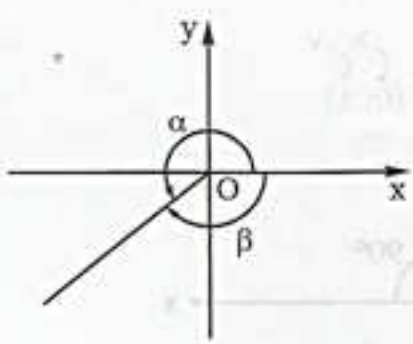



* $k \in \mathbb{Z}$
* i = 1, n: no definido

## RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COTERMINALES

**CASO PARTICULAR:**

$\alpha \wedge \beta$: son ángulos en posición estándar y también son coterminales




Del gráfico $R.T(\alpha) = R.T(\beta)$

Luego:

$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta$

$\cos\alpha = \cos\beta$

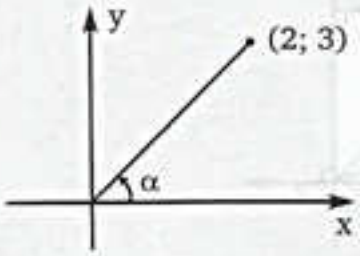
$\tan\alpha = \tan\beta$

team CALAPENSHKO

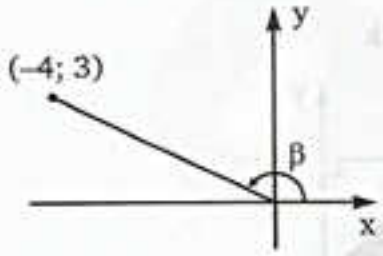

## EJERCICIOS DE APLICACIÓN

**1.** Calcule las seis razones trigonométricas de los ángulos mostrados:

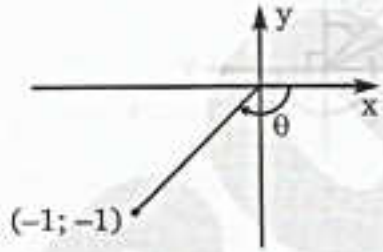
a)



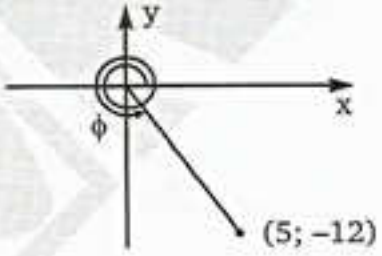

b)




c)




d)




**2.** Indicar verdadero (V) o falso (F) a cada proposición:

( ) $\operatorname{sen} 200° > 0$
( ) $\tan 300° > 0$
( ) $\cos 100° < 0$
( ) $\sec 290° > 0$
( ) $\cot 80° < 0$
( ) $\csc 200° < 0$

**3.** Determine el cuadrante o los cuadrantes al cual pertenece al valor del ángulo α en cada caso:

a) $\operatorname{sen}\alpha > 0 \wedge \cos\alpha < 0$
b) $\tan\alpha > 0 \wedge \sec\alpha < 0$
c) $\operatorname{sen}\alpha \cot\alpha > 0$
d) $\cos\alpha \csc\alpha < 0$
e) $\tan\alpha \sqrt{\operatorname{sen}\alpha} > 0$
f) $\sqrt{\cos\alpha + \sec\alpha} > 0$
g) $\tan\alpha + \cot\alpha < 0$
h) $\operatorname{sen}\alpha |\cos\alpha| > 0$

**4.** Coloque el signo de relación (> ; < ; =) correspondiente en cada cuadro:

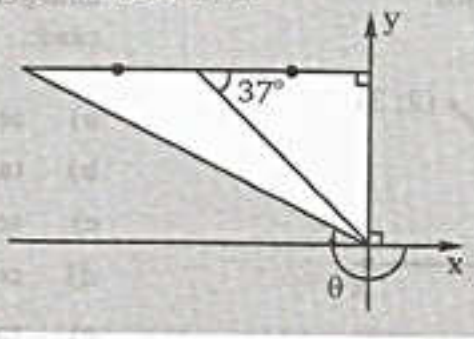
a) $\operatorname{sen} 90°$ ☐ $\cos 90°$
b) $\tan 0°$ ☐ $\sec 180°$
c) $\operatorname{sen} 360°$ ☐ $\tan 180°$
d) $\csc 270°$ ☐ $\cot 90°$
e) $\tan 240°$ ☐ $\operatorname{sen} 0°$
f) $\cos 120°$ ☐ $\tan 0°$
g) $\cos(-45°)$ ☐ $\cos 180°$
h) $\operatorname{sen} 300°$ ☐ $\cos 270°$

**5.** Indique verdadero (V) o falso (F):

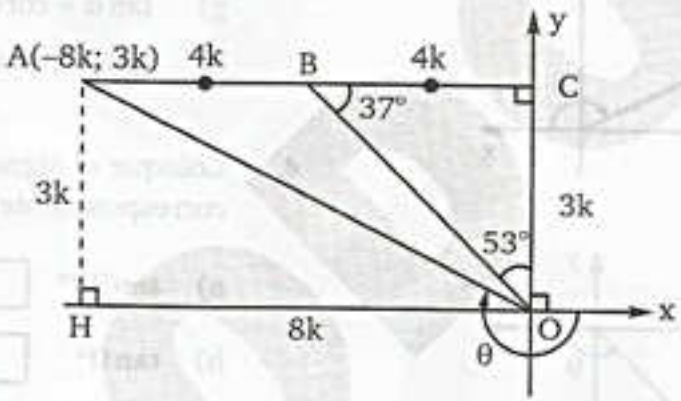
( ) Si $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2} \wedge \alpha \in \text{IIC} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
( ) Si $\tan\beta = \frac{4}{3} \wedge \beta \in \text{IC} \Rightarrow \operatorname{sen}\beta = \frac{4}{5}$
( ) Si $\cos\theta = -\frac{12}{13} \wedge \theta \in \text{IIIC} \Rightarrow \tan\theta = \frac{5}{12}$
( ) Si $\csc\phi = -\frac{\sqrt{5}}{2} \wedge \phi \in \text{IVC} \Rightarrow \cot\phi = -2$

## PROBLEMAS RESUELTOS

**PROBLEMA 1** Del gráfico calcular: $E = 8\tan\theta + 1$




**Resolución:** En el $\triangle BCO$: $OC = 3k \wedge BC = 4k$




Trazamos la altura AH

Luego las coordenadas de A es $(-8k; 3k)$

Lo pedido: $E = 8\tan\theta + 1$

Reemplazando: $E = 8\left(\frac{3k}{-8k}\right) + 1$

$\therefore \quad \mathbf{E = -2}$

**PROBLEMA 2** Si: $9\tan^2\theta - 16 = 0$ ; además: $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

Calcule: $M = \csc\theta + \cot\theta$

**Resolución:** Se observa que $\theta \in IIC$:

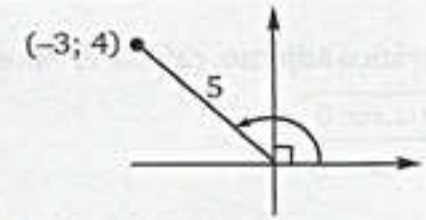
Del dato: $\tan^2\theta = \frac{16}{9} \Rightarrow \tan\theta = -\frac{4}{3}$

Luego: $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{4}{-3}$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow r = 5$

team CALAPENSHKO


En el gráfico:




Lo pedido : $M = \csc\theta + \cot\theta = \frac{5}{4} + \frac{-3}{4}$

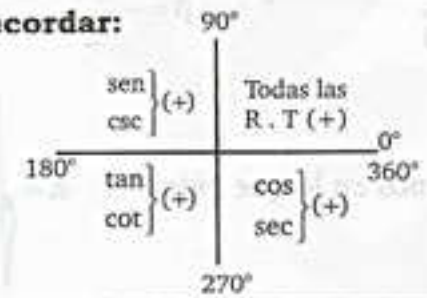
$\therefore \quad \mathbf{M = \frac{1}{2}}$

**PROBLEMA 3** Indicar el signo de A en el IC, IIC, IIIC y IVC, si

$$A = \frac{3 - \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta \,.\, \cot\theta}$$

**Resolución:**

**Recordar:**




Si: $\theta \in$ IC $\Rightarrow$ $\begin{cases} \operatorname{sen}\theta : + \\ \cos\theta : + \\ \cot\theta : + \end{cases}$ $\rightarrow$ Reemplazando : $A = \frac{3-(+)}{(+)(+)} = \frac{+}{+} = +$

Si: $\theta \in$ IIC $\Rightarrow$ $\begin{cases} \operatorname{sen}\theta : + \\ \cos\theta : - \\ \cot\theta : - \end{cases}$ $\rightarrow$ Reemplazando: $A = \frac{3-(+)}{(-)(-)} = \frac{+}{+} = +$

Si : $\theta \in$ IIIC $\Rightarrow$ $\begin{cases} \operatorname{sen}\theta : - \\ \cos\theta : - \\ \cot\theta : + \end{cases}$ $\rightarrow$ Reemplazando: $A = \frac{3-(-)}{(-)(+)} = \frac{+}{-} = -$

Si: $\theta \in$ IVC $\Rightarrow$ $\begin{cases} \operatorname{sen}\theta : - \\ \cos\theta : + \\ \cot\theta : - \end{cases}$ $\rightarrow$ Reemplazando: $A = \frac{3-(-)}{(+)(-)} = \frac{+}{-} = -$

$\therefore$ **La Respuesta es: (+); (+) ; (–); (–)**

**A todo el público en general:**

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

**Este libro no debe ser prostituito monetariamente**, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

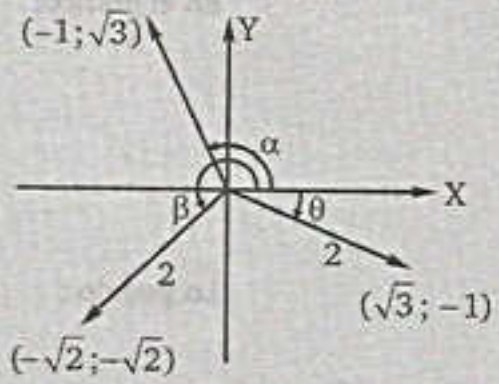
No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

**28 de agosto del 2020**

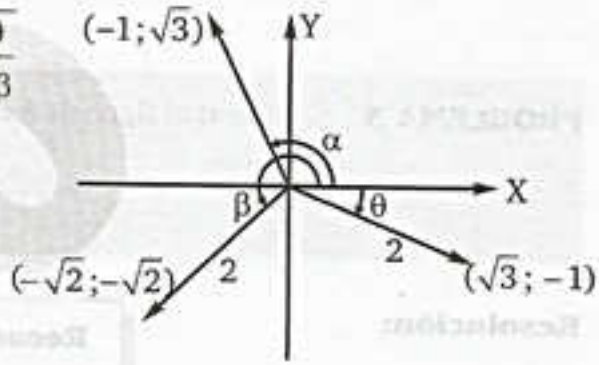
**PROBLEMA 4** A partir del gráfico adjunto, calcule el valor de $E=\sqrt[3]{\dfrac{\tan\alpha.\sec\theta}{\operatorname{sen}\theta.\operatorname{sen}^2\beta}}$.

**ADMISIÓN UNMSM 2017 - I**




**Resolución:**

Nos piden: $E=\sqrt[3]{\dfrac{\tan\alpha\,.\sec\theta}{\operatorname{sen}\theta\,.\operatorname{sen}^2\beta}}$




Del gráfico:

* $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}$ * $\operatorname{sen}\theta=-\dfrac{1}{2}$

* $\sec\theta=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ * $\operatorname{sen}\beta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Reemplazamos en lo que piden: $E=\sqrt[3]{\dfrac{(-\sqrt{3})\times\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)}{\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}}$

$\therefore\ E=\sqrt[3]{8}=2$

**PROBLEMA 5** Si $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ son ángulos cuadrantales positivos y menores que una vuelta, y que verifican las siguientes relaciones: $\sqrt{\operatorname{sen}\alpha-1}=\sqrt{-\cos\beta-1}=\cot\gamma$ calcule el máximo valor de: $\alpha+\beta+\gamma$.

**ADMISIÓN UNMSM 2017 - I**

**Resolución:**

Por dato:

* $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ son ángulos cuadrantales positivos y menores que una vuelta.
* $\sqrt{\operatorname{sen}\alpha-1}=\sqrt{-\cos\beta-1}=\cot\gamma$

Entonces: $\operatorname{sen}\alpha-1\geq 0\rightarrow\operatorname{sen}\alpha\geq 1$ pero: $-1\leq\operatorname{sen}\alpha\leq 1$

de ambas relaciones $\operatorname{sen}\alpha=1\ \rightarrow\ \alpha=90°$

Luego: $-\cos\beta-1\geq 0\rightarrow\cos\beta\leq -1$ pero: $-1\leq\cos\beta\leq 1$

de ambas relaciones $\cos\beta=-1\ \rightarrow\ \beta=180°$

Además: $\cot\gamma=\sqrt{\operatorname{sen}\alpha-1}\rightarrow\cot\gamma=\sqrt{1-1}\rightarrow\cot\gamma=0\ \rightarrow\ \gamma=90°;270°$

Máximo valor de: $\alpha+\beta+\gamma=90°+180°+270°$

$\therefore\ \alpha+\beta+\gamma=540°<>3\pi\text{ rad}$

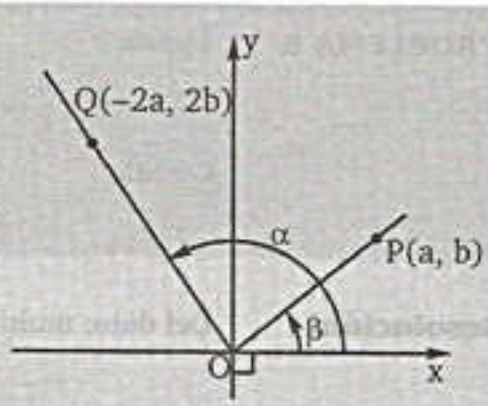
team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 6** De la figura calcule:

$$M=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}+b.\cot\alpha.\sec\beta+1$$

**ADMISIÓN UNMSM 2016 - II**




**Resolución:**

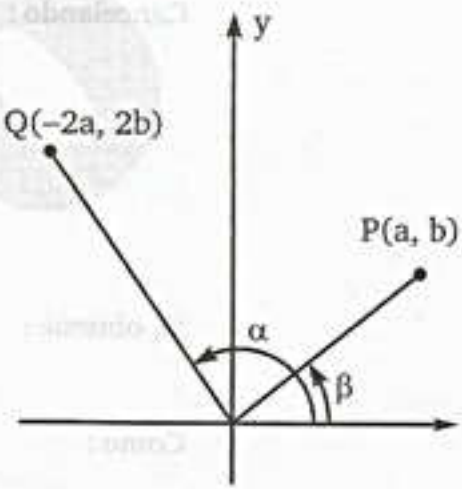
$$M=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}+b\,.\cot\alpha\,.\sec\beta+1$$

$\alpha \wedge \beta$: ángulos canónicos:

$\alpha: \rightarrow x=-2a$ $\quad$ $\beta: \rightarrow x=a$

$y=2b$ $\quad$ $y=b$

$R=2\sqrt{a^2+b^2}$ $\quad$ $R=\sqrt{a^2+b^2}$




$$M=\frac{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\frac{-2a}{2\sqrt{a^2+b^2}}}+b\,.\left(\frac{-2\,a}{2\,b}\right).\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}+1$$

$$M=-1-\sqrt{a^2+b^2}+1=-\sqrt{a^2+b^2}$$

**PROBLEMA 7** Sabiendo que $\tan\theta>0$ ; $(\sec\theta)^{-\sec\theta}=4$

Calcule: "$\operatorname{sen}\theta$"

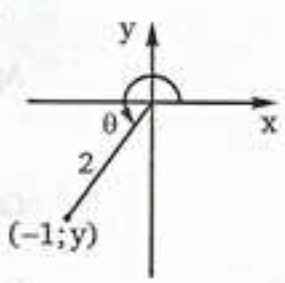
**Resolución:**

De la condición : $(\sec\theta)^{-\sec\theta}=4$

Podemos dar la forma siguiente en el segundo miembro :

$$(\sec\theta)^{-\sec\theta}=(-2)^2$$

$$(\sec\theta)^{-\sec\theta}=(-2)^{-(-2)} \Rightarrow \sec\theta=-2$$




Como : $\tan\theta>0 \Rightarrow \theta \in$ III C

Luego : $\sec\theta=\frac{2}{-1}=\frac{r}{x}$

Sabemos : $r^2=x^2+y^2$

$$(2)^2=(-1)^2+y^2 \Rightarrow y^2=3 \Rightarrow y=-\sqrt{3}$$

Lo pedido : $\operatorname{sen}\theta=\frac{y}{r}$

$$\therefore\ \operatorname{sen}\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

**PROBLEMA 8** Siendo:

$$\frac{4}{5}\operatorname{sen}\phi=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}+\frac{1}{70}+\frac{1}{130} \quad ; \quad |\cos\phi|=-\cos\phi$$

Calcule:

$$K=2\operatorname{sen}\phi+3\cos\phi$$

**Resolución:** Del dato; multiplicando por (3) a ambos miembros:

$$\frac{12}{5}\operatorname{sen}\phi=\frac{3}{4}+\frac{3}{28}+\frac{3}{70}+\frac{3}{130}$$

Cancelando :

$$\frac{12}{5}\operatorname{sen}\phi=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\frac{1}{13}$$

$$\frac{12}{5}\operatorname{sen}\phi=1-\frac{1}{13}$$

$$\frac{12}{5}\operatorname{sen}\phi=\frac{12}{13}$$

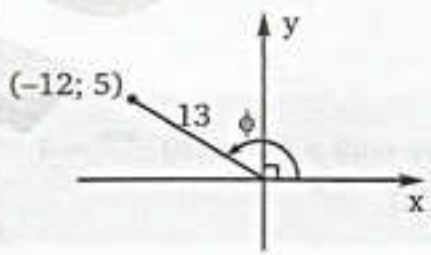
Se obtiene :

$$\operatorname{sen}\phi=\frac{5}{13} \quad \wedge \quad |\cos\phi|=-\cos\phi$$

Como :

$$\operatorname{sen}\phi>0 \quad \wedge \quad \cos\theta<\phi$$

$$\Rightarrow \phi \in \text{IIC}$$




Luego :

$$\operatorname{sen}\phi=\frac{5}{13}=\frac{y}{r}$$

Aplicando :

$$x^2+y^2=r^2$$

$$x=\pm 12$$

Como :

$$\phi \in \text{IIC} \rightarrow x=-12$$

Lo pedido :

$$K=2\operatorname{sen}\phi+3\cos\phi$$

Reemplazando :

$$K=2\left(\frac{5}{13}\right)+3\left(\frac{-12}{13}\right)$$

$$\therefore K=-2$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 9** Si:

$$\tan\theta = \cfrac{3}{2+\cfrac{3}{2+\cfrac{3}{2+\cfrac{3}{2+\ddots}}}}$$

Además: $|\operatorname{sen}\theta| = -\operatorname{sen}\theta$

$|\cos\theta| = \cos\theta$

Calcule:

$$W = \sqrt{5}\sec\theta - \sqrt{2}\tan\theta$$

**Resolución:**

i) Del dato: $|\operatorname{sen}\theta| = -\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \operatorname{sen}\theta < 0$

$|\cos\theta| = \cos\theta \Rightarrow \cos\theta > 0$

Entonces: $\theta \in$ IVC

ii) Del dato se observa: $\tan\theta = \cfrac{3}{2+\cfrac{3}{2+\cfrac{3}{2+\ddots}}}$ (el denominador completo es $\tan\theta$)

Luego:

$$\tan\theta = \frac{3}{2+\tan\theta}$$

$$\tan^2\theta + 2\tan\theta = 3$$

$$\tan^2\theta + 2\tan\theta - 3 = 0$$

Factorizando: $(\tan\theta + 3)(\tan\theta - 1) = 0 \Leftrightarrow \tan\theta + 3 = 0 \wedge \tan\theta - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \tan\theta = -3 \quad \wedge \tan\theta = 1$

Como: $\theta \in$ IVC $\Rightarrow \tan\theta = -3$

- $\tan\theta = \dfrac{-3}{1} = \dfrac{y}{x}$
- $r = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow r = \sqrt{10}$

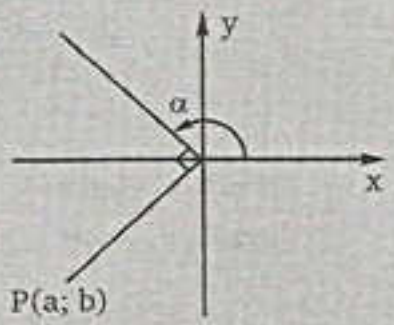
Lo pedido: $W = \sqrt{5}\sec\theta - \sqrt{2}\tan\theta \Rightarrow W = \sqrt{5}\left(\dfrac{\sqrt{10}}{1}\right) - \sqrt{2}\left(\dfrac{-3}{1}\right)$

$\therefore\ W = 8\sqrt{2}$

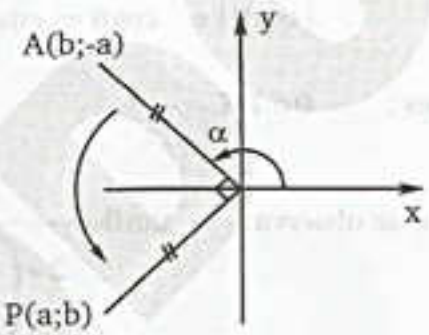
twitter.com/calapenshko

**PROBLEMA 10** En la figura mostrada las coordenadas del punto P son (a,b).Calcular el valor de:

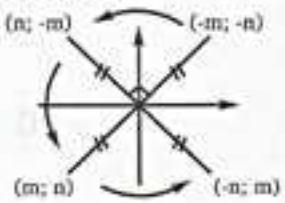
$$J = a + b\tan\alpha$$




**Resolución:** Del gráfico: Desde "P" girando en sentido antihorario hasta hallar las coordenadas de "A"




**Recordar:**




$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{-a}{b}$$

Reemplazando en "J":

$$J = a + b\tan\alpha = a + b\left(\frac{-a}{b}\right)$$

$$J = a - a$$

$$\therefore \ \mathbf{J = 0}$$

**PROBLEMA 11** Si : x, y, z: son coterminales.

Calcular: $E = \cos x + \cos y + \cos z$

si ademas : $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ ; $\tan y = \frac{\sqrt{3}}{3}$

**Resolución:** Si son ángulos coterminales entonces se cumple la siguiente propiedad:

$$RT(x) = RT(y) = RT(z)$$

Del dato : $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ ; $\tan y = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

team CALAPENSHKO



Reconociendo para un angulo coterminal : $x = 30°$

Luego; aplicando la propiedad en "E":

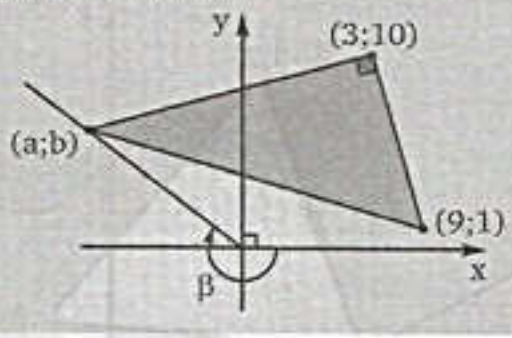
$$E = \cos x + \cos x + \cos x$$

$$E = 3\cos x$$

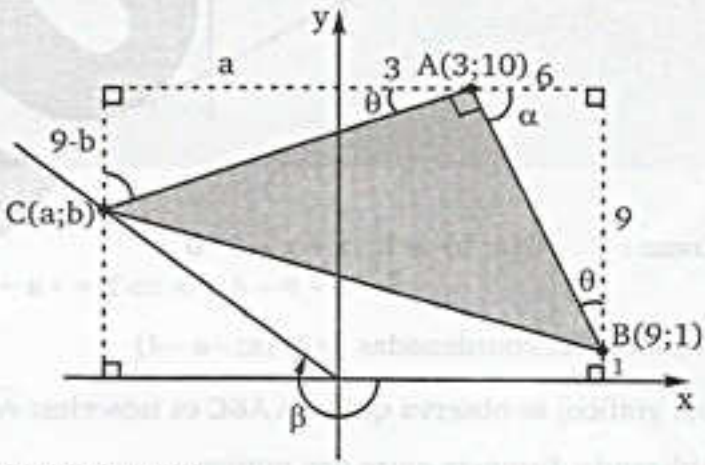
Reemplazando : $E = 3\cos 30°$

$$\therefore\ E = 3\frac{\sqrt{3}}{2}$$

**PROBLEMA 12** En el gráfico, el área de la región triangular sombreada es igual a 60 $u^2$. Calcular: $R = 2a\tan\beta + 3b\cot\beta$




**Resolución:** El gráfico inicial trazamos por A, B y C paralelas a las ejes coordenados




Del gráfico se observa:

$$\tan\theta = \frac{6}{9} = \frac{9-b}{a+3} \rightarrow 2a + 3b = 21 \ \ldots\ldots(1)$$

El área del $\Delta$ sombreado :

$$S = \frac{D-I}{2} \ \wedge\ S = 60$$

$$(+)\left\{\begin{array}{c|c|c} 3 & 9 \times 1 & \\ 10a & 3 \times 10 & 90 \\ 9b & a \times b & 3b \\ & 9 \times 1 & a \end{array}\right\}(+)$$

$$\underline{\quad I \quad} \qquad \underline{\quad D \quad}$$

Reemplazando: $60 = \dfrac{90 + 3b + a - 10a - 9b - 3}{2}$

$3a + 2b = -11$ .....(2)

Resolviendo (1) ∧ (2):

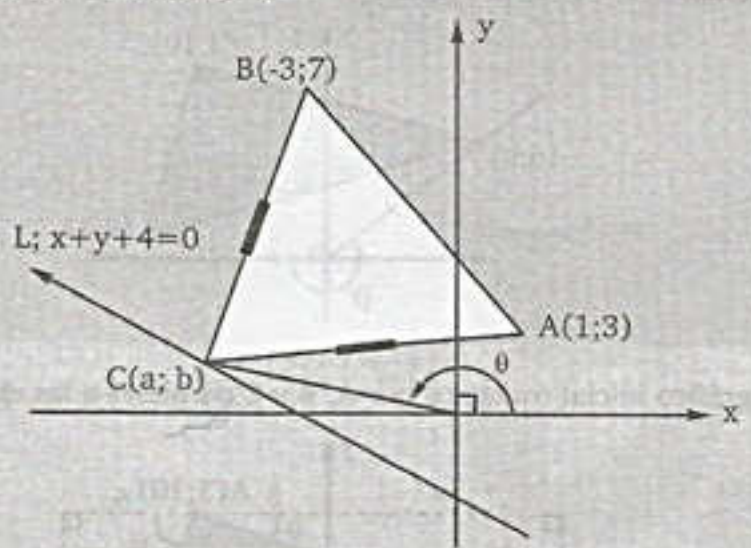
$a = -15 \ \wedge \ b = 17$

Piden: $R = 2a\tan\beta + 3b\cot\beta$

Reemplazando: $R = 2(-15)\left(\dfrac{17}{-15}\right) + 3(17)\left(\dfrac{-15}{17}\right)$

$\therefore \ \mathbf{R = -11}$

**PROBLEMA 13** Del gráfico; hallar: tanθ




**Resolución:**

Como: $C(a; b) \in L: x + y + 4 = 0$

$\Rightarrow a + b + 4 = 0 \Rightarrow b = -a - 4$ .....(1)

Entonces las coordenadas de C (a; − a − 4)

Del gráfico; se observa que el Δ ABC es isósceles: $\overline{AC} = \overline{BC}$

Aplicando distancia entre dos puntos

$$\sqrt{(a-1)^2 + (-a-4-3)^2} = \sqrt{(a+3)^2 + (-a-4-7)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y operando:

$$a^2 - 2a + 1 + a^2 + 14a + 49 = a^2 + 6a + 9 + a^2 + 22a + 121$$

$$16a = -80$$

$$a = -5$$

En (1): $b = 1$

Luego: $C(-5; 1) \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{y}{x}$

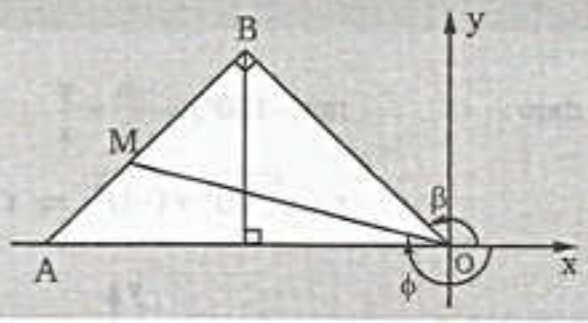
$\therefore \ \mathbf{\tan\theta = -\dfrac{1}{5}}$

team CALAPENSHKO



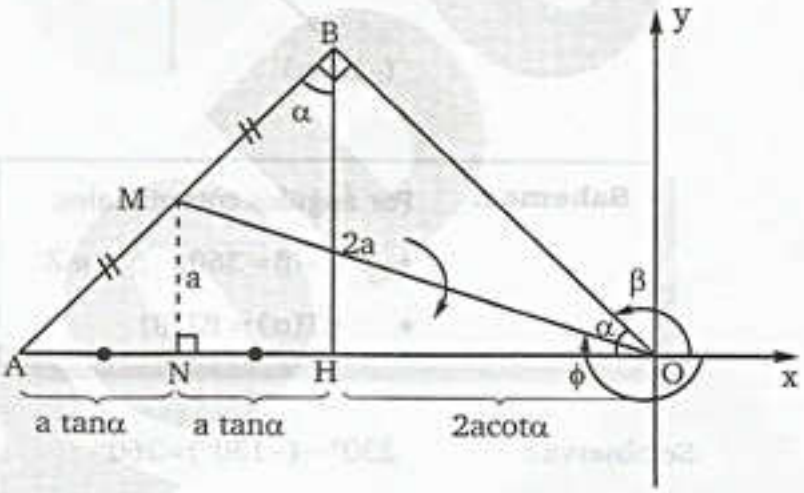
**PROBLEMA 14** Del gráfico; M es punto medio de $\overline{AB}$, determine el valor de:

$$P = \frac{\cot\phi - \tan\beta}{\cot\beta}$$




**Resolución:** Separando el $\triangle ABO$; aplicando resolución de triángulo rectángulo

Sea: $m\angle AOB = \alpha \wedge MN = a$




Se observa que las coordenadas de B y M son:

- $B(-2a\cot\alpha;\ 2a)$

$$\tan\beta = \frac{2a}{-2a\cot\alpha}$$

$$\begin{cases}\tan\beta = -\tan\alpha \\ \cot\beta = -\cot\alpha\end{cases} \quad .....(1)$$

- $M(-(a\tan\alpha + 2a\cot\alpha);\ a)$

$$\cot\phi = \frac{-(a\tan\alpha + 2a\cot\alpha)}{a}$$

$$\cot\phi = -\tan\alpha - 2\cot\alpha \quad .....(2)$$

Remplazando : $$P = \frac{-\tan\alpha - 2\cot\alpha - (-\tan\alpha)}{-\cot\alpha}$$

$$P = \frac{-2\cot\alpha}{-\cot\alpha}$$

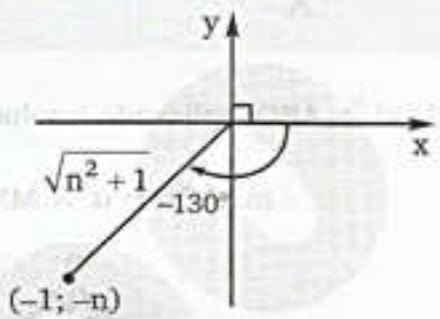
$$\therefore\ \mathbf{P = 2}$$

**PROBLEMA 15** Si: $\tan(-130°)=n$; Calcule:

$$K=1-\sqrt[5]{\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\operatorname{sen}230°+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\cos 590°}$$

**Resolución:** Del dato: $\tan(-130°)=\frac{-n}{-1}=\frac{y}{x}$

$$r=\sqrt{(-n)^2+(-1)^2} \Rightarrow r=\sqrt{n^2+1}$$




**Sabemos:** Por ángulos coterminales:

- $\alpha-\beta=360n \;;\; n\in Z$
- $RT(\alpha)=RT(\beta)$

Se observa: $230°-(-130°)=360°$

$590°-(-130°)=720°$

Luego:

- $\operatorname{sen}230°=\operatorname{sen}(-130°) \Rightarrow \operatorname{sen}230°=\frac{-n}{\sqrt{n^2+1}}$ .....(1)
- $\cos 590°=\cos(-130°) \Rightarrow \cos 590°=\frac{-1}{\sqrt{n^2+1}}$ .....(2)

Reemplazando (1) y (2) en "P":

$$K=1-\sqrt[5]{\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\left(\frac{-n}{\sqrt{n^2+1}}\right)+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\left(\frac{-1}{\sqrt{n^2+1}}\right)}$$

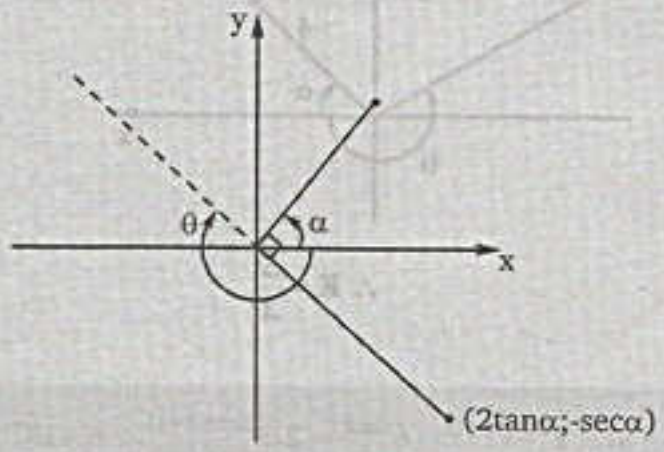
$$K=1-\sqrt[5]{\frac{-n^2}{n^2+1}+\frac{-1}{n^2+1}}=1-\sqrt[5]{-1}=1-(-1)$$

$\therefore K=2$

team CALAPENSHKO

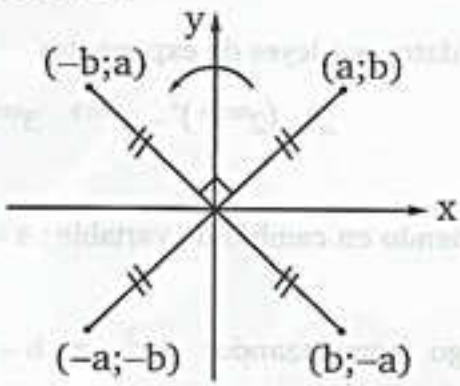

**PROBLEMA 16** Del gráfico, calcule:

$$K = \tan^2\theta + \csc^2\alpha$$

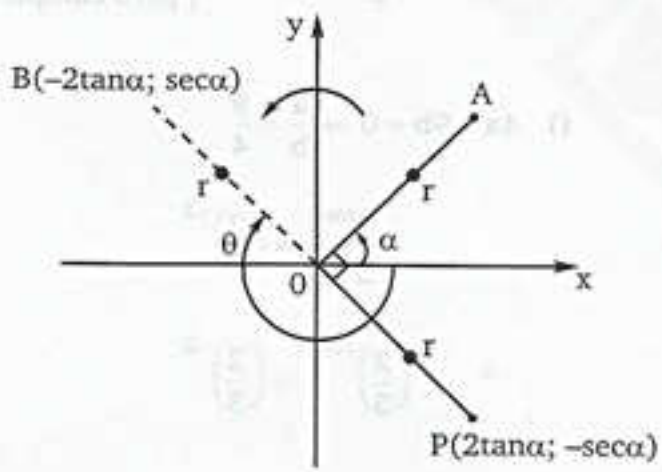



**Resolución:**

**Recordar:**



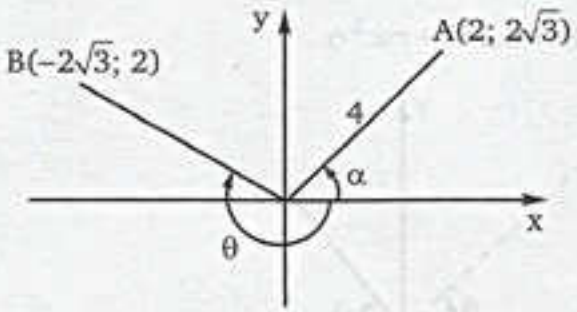

Sea: $OP = OA = OB = r$




Del gráfico : $\tan\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{\sec\alpha}$

$\sec\alpha = 2$

Luego:




$$\therefore K = \frac{5}{3}$$

Lo pedido:

$$K = \tan^2\theta + \csc^2\alpha$$

$$K = \left(\frac{2}{-2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{4}{2\sqrt{3}}\right)^2$$

$$K = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}$$

**PROBLEMA 17** Si: $2^{2(\tan\phi+1)} - 6^{\tan\phi} = 2.3^{2(\tan\phi+1)}$ ; $\phi \in$ IIC

Calcule: $E = \sqrt{5}\,\text{sen}\,\phi$

**Resolución:** Del dato; por leyes de exponentes

$$2^2 \,.\, (2^{\tan\phi})^2 - 2^{\tan\phi} \,.\, 3^{\tan\phi} = 2 \,.\, 3^2 \,.\, (3^{\tan\phi})^2$$

Haciendo en cambio de variable: $a = 2^{\tan\phi}$; $b = 3^{\tan\phi}$

Luego reemplazando: $4a^2 - a \,.\, b - 18b^2 = 0$

Aplicando aspa simple:

$$(4a - 9b)(a + 2b) = 0 \begin{cases} \text{habra dos soluciones;} \\ \text{pero cumple para:} \end{cases}$$

i) $4a - 9b = 0 \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{9}{4}$

$$\frac{2^{\tan\phi}}{3^{\tan\phi}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\tan\phi} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$$

**Recordar:**

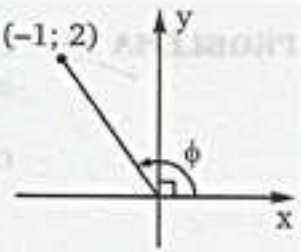
Si las bases son iguales los exponentes también:
entonces. $\tan\phi = -2$ ; $\phi \in$ IIC

team CALAPENSHKO



Luego: $\tan\phi = \frac{2}{-1} = \frac{y}{x}$

$\rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow r = \sqrt{5}$

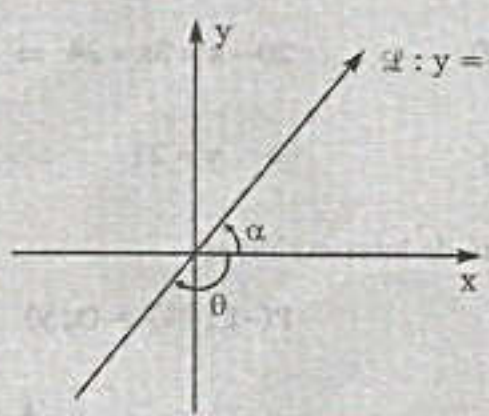



Nos piden: $E = \sqrt{5}\,\text{sen}\,\phi = \sqrt{5}\left(\frac{y}{r}\right) = \sqrt{5}\,.\,\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\therefore E = \sqrt{5}\,\text{sen}\,\phi = 2$

**PROBLEMA 18** De la gráfica mostrada, calcule el valor de:

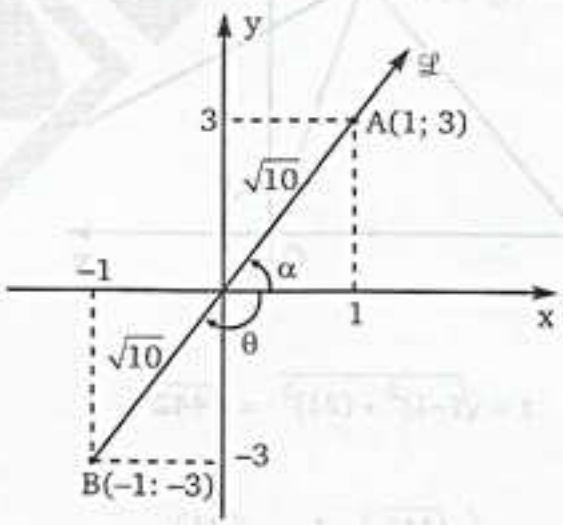
$F = \sqrt{10}\,\text{sen}\,\alpha - \tan\theta$




**Resolución:** Tomando los puntos A y B sobre ℒ en el IC ∧ IIIC

$A \in \mathcal{L}$ : si $x = 1 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow A(1; 3)$

$B \in \mathcal{L}$ : si $x = -1 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow B(-1; -3)$




Hallando r:

$r = \sqrt{1^2 + 3^2}$

$r = \sqrt{10}$

Del gráfico :

* $\text{sen}\,\alpha = \frac{y}{r} = \frac{3}{\sqrt{10}}$

* $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-3}{-1} = 3$

Nos piden : $F = \sqrt{10}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) - (3)$

$\therefore \; F = 0$

**PROBLEMA 19** El lado final del ángulo que mide θ en posición normal, pasa por el punto de intersección de las rectas:

$$y = 20 - x \quad \wedge \quad y = 3x + 24$$

Calcule:

$$F = \frac{\sec\theta}{\sqrt{442}} + \tan\theta$$

**Resolución:** El punto de intersección entre las rectas se obtiene al resolver el sistema:

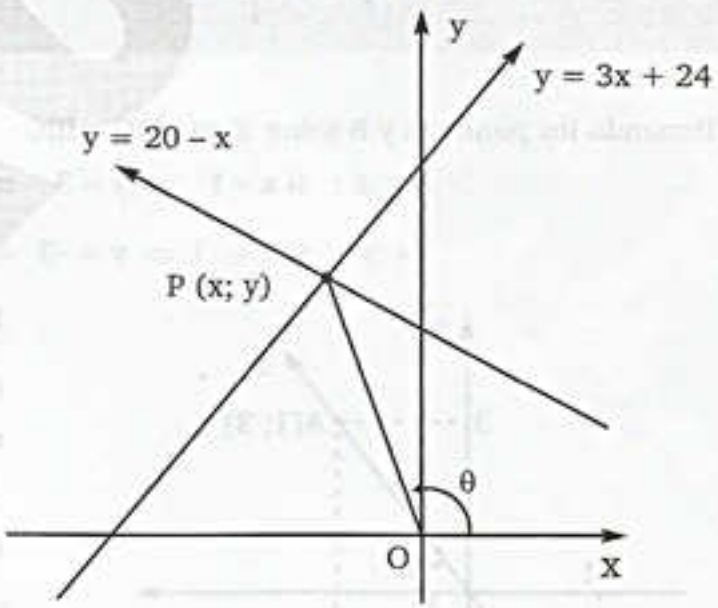
$$\begin{cases} y = 20 - x & \ldots\ldots (1) \\ y = 3x + 24 & \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

(1) = (2): $\quad 20 - x = 3x + 24 \Rightarrow x = -1$

En (1): $\quad \Rightarrow y = 21$

El punto de intersección es:

$$P(-1\,;\,21) = (x; y)$$




Luego: $\quad r = \sqrt{(-1)^2 + (21)^2} = \sqrt{442}$

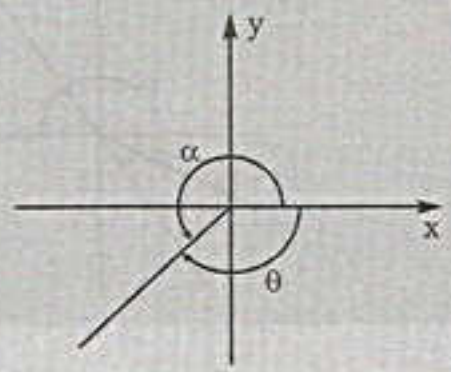
$$\Rightarrow F = \left(\frac{\sqrt{442}}{-1}\right)\frac{1}{\sqrt{442}} + \left(\frac{21}{-1}\right)$$

$$\therefore \quad \mathbf{F = -22}$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 20** En la figura, se cumple: $\operatorname{sen}\alpha = \frac{-15}{17}$

Calcular: $M = \tan\alpha + \tan\theta + \tan(\alpha - \theta)$

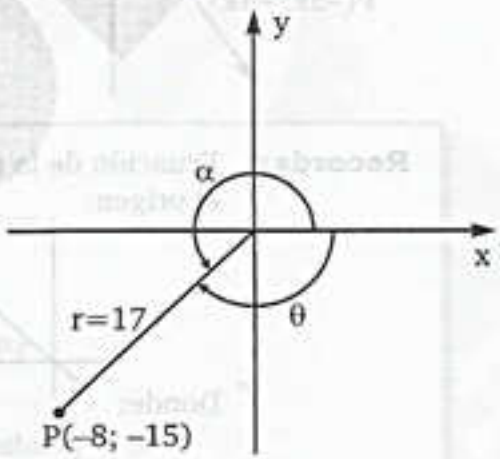



**Resolución:**

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{-15}{17} = \frac{y}{r} \Rightarrow \begin{cases} y = -15 \\ r = 17 \end{cases}$$

Usando : $r = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow x = -8$

$P(-8; -15) \in$ IIIC




* $\alpha$ y $\theta$ ángulos coterminales:

$$\Rightarrow \tan\alpha = \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-15}{-8} = \frac{15}{8}$$

Además : $\alpha - \theta = 360^\circ$

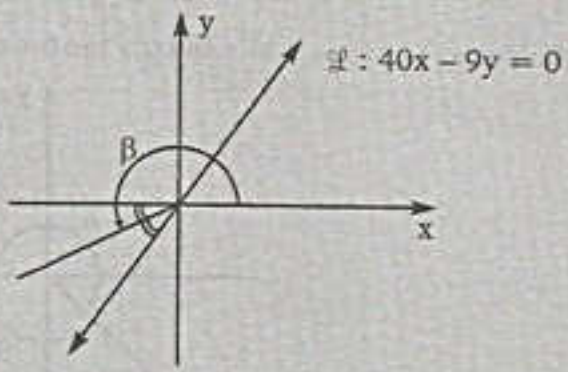
Así tenemos : $M = \tan\alpha + \tan\theta + \tan(\alpha - \theta)$

$$M = \frac{15}{8} + \frac{15}{8} + \underbrace{\tan 360^\circ}_{0}$$

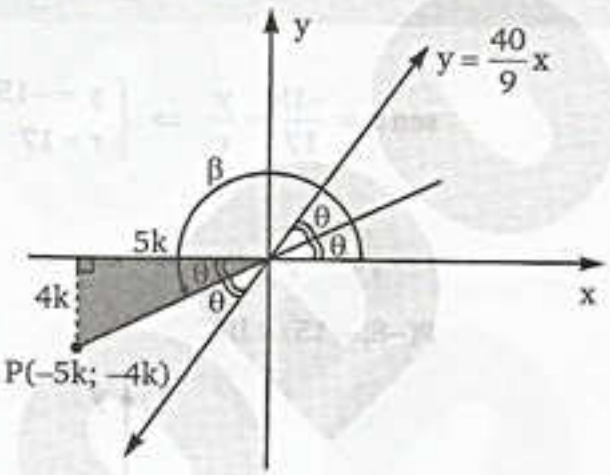
$$\therefore \quad \mathbf{M = \frac{15}{4}}$$

team CALAPENSHKO

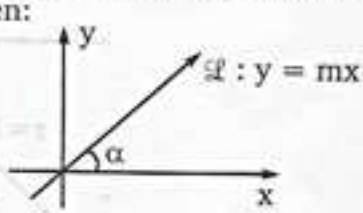

**PROBLEMA 21** De la figura mostrada, calcule: $\tan\beta$




**Resolución:**




**Recordar:** Ecuación de la recta que pasa por el origen:

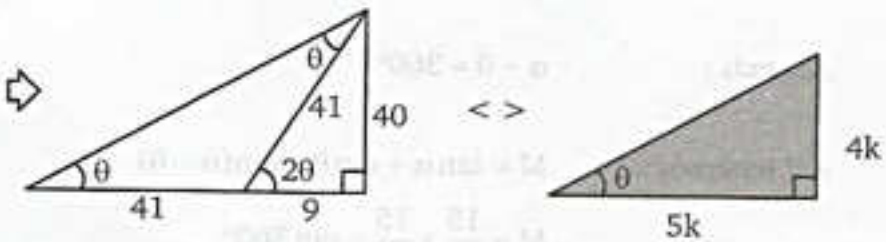



Donde:

m = pendiente de la recta

$\Rightarrow$ $m = \tan\alpha$

De $\mathfrak{L}$: $m = \frac{40}{9} = \tan 2\theta$



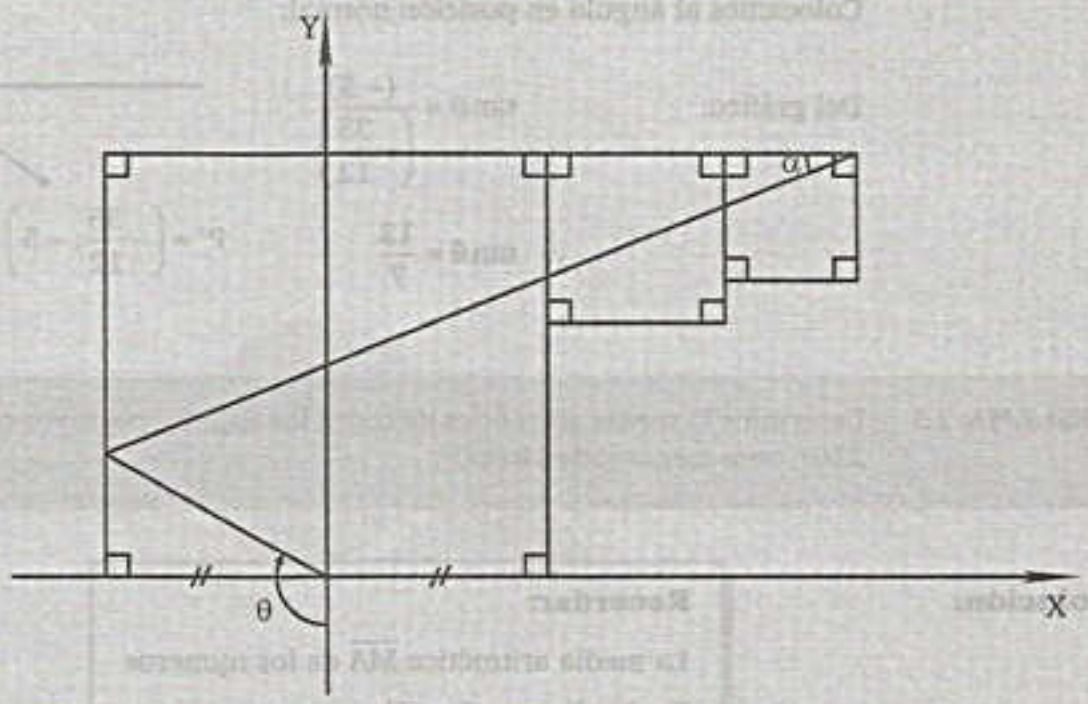

Del gráfico: $\tan\beta = \frac{-4k}{-5k}$

$$\therefore \tan\beta = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

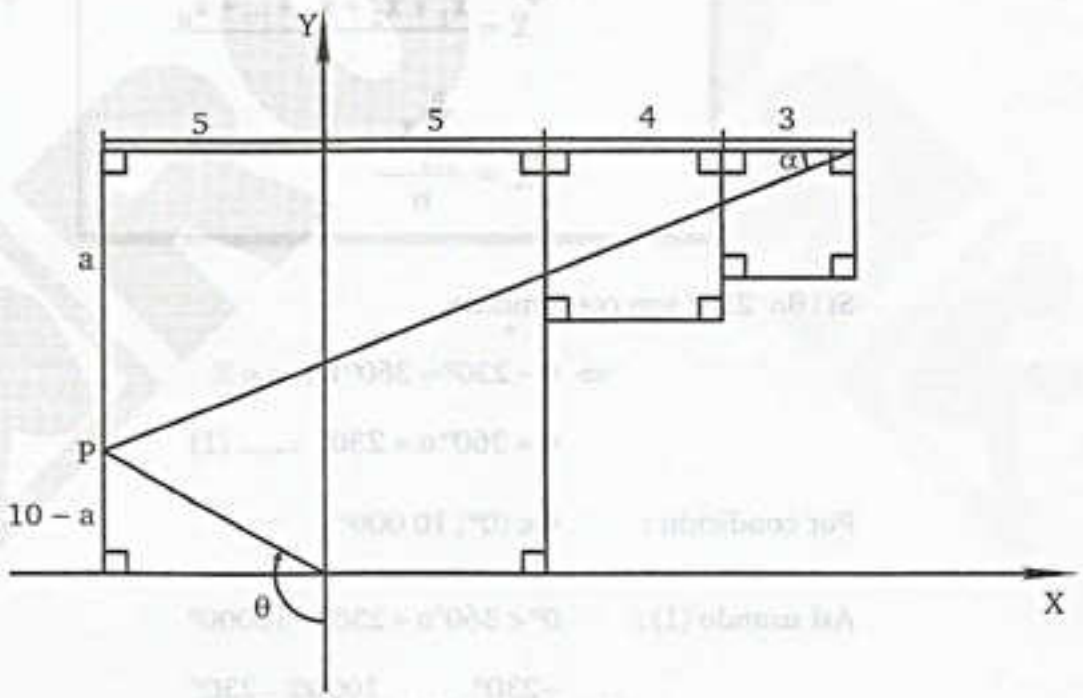
team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 22** Las longitudes de los lados a, b y c de los cuadrados cumplen la relación:

$6a = 15b = 20c$, además: $\tan\alpha = \frac{5}{12}$. Calcule : $\tan\theta$




**Resolución:**




Del gráfico: $\tan\alpha = \frac{a}{17}$

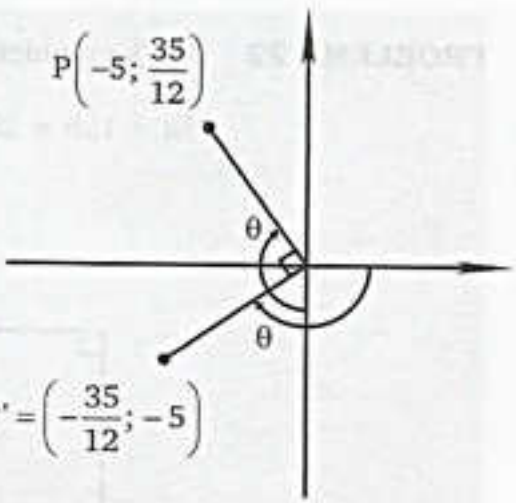
Pero por condición: $\tan\alpha = \frac{5}{12}$

$$\frac{a}{17} = \frac{5}{12} \rightarrow a = \frac{85}{12}$$

Ahora las coordenadas del punto P son:

$$P(-5; 10-a) = P\left(-5; \frac{35}{12}\right)$$

Colocamos al ángulo en posición normal:




Del gráfico: $\tan\theta = \dfrac{(-5)}{\left(-\frac{35}{12}\right)}$

$$\therefore \tan\theta = \frac{12}{7}$$

**PROBLEMA 23** Determine la media aritmética de todos los ángulos positivos coterminales con 230°, pero menores de 10 000°.

**Resolución:**

**Recordar:**

La media aritmética $\overline{MA}$ de los números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ es:

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Si : $\theta \wedge 230°$ son coterminales

$$\Rightarrow \theta - 230° = 360°n \; ; \; n \in \mathbb{Z}$$

$$\theta = 360°n + 230° \quad \ldots\ldots (1)$$

Por condición : $\theta \in \langle 0°; 10\,000° \rangle$

Así usando (1) : $0° < 360°n + 230° < 10000°$

$$\Rightarrow \frac{-230°}{360°} < n < \frac{10000 - 230°}{360°}$$

$$-0{,}63 < n < 27{,}14$$

Observación : $n \neq 0$, pues $\theta = 230°$

Luego : $n = \{1, 2, 3, \ldots, 27\}$

team CALAPENSHKO


Ahora :

$$\left.\begin{array}{rl} \theta_1 &= 360^\circ(1) + 230^\circ \\ \theta_2 &= 360^\circ(2) + 230^\circ \\ \theta_3 &= 360^\circ(3) + 230^\circ \\ \vdots & \vdots \\ \theta_{27} &= 360^\circ(27) + 230^\circ \end{array}\right\} +$$

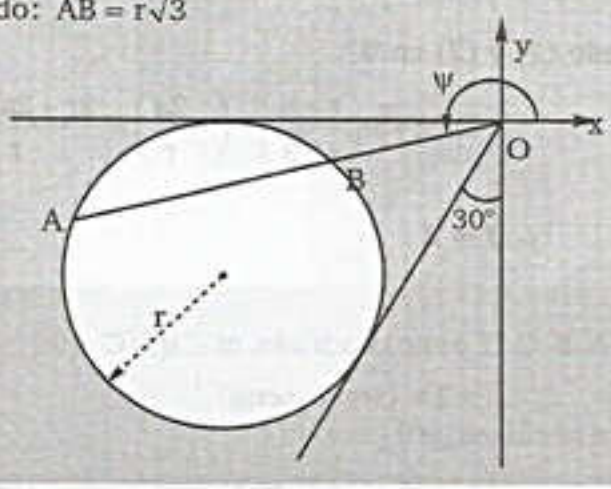
$$\sum_{i=1}^{27}\theta_i = 360^\circ\left(\frac{27\times 28}{2}\right) + 230^\circ \times 27$$

$$\Rightarrow \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{27}\theta_i}{27} = \frac{360^\circ \times 28}{2} + 230^\circ$$

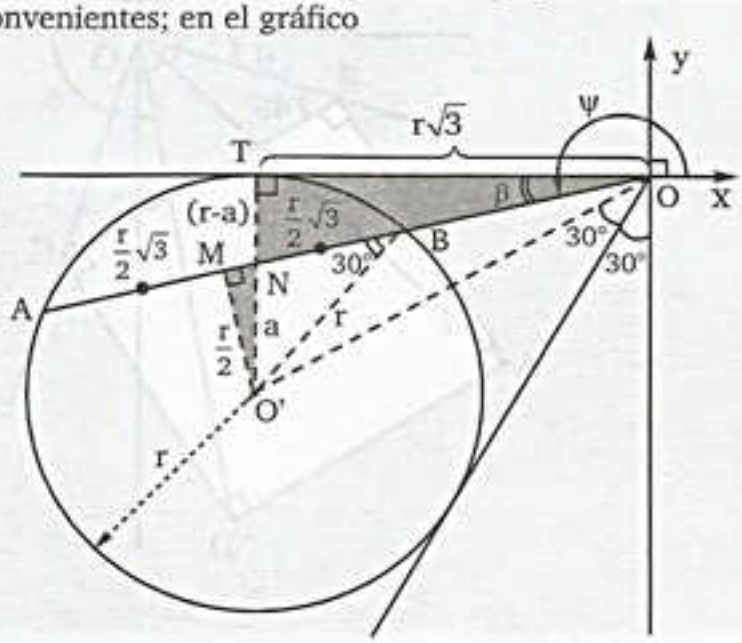
$$\therefore \quad \overline{X} = 5270^\circ$$

**PROBLEMA 24** De la figura, calcule : $J = 2\sqrt{3}\tan\psi - \sec\psi$

Siendo: $AB = r\sqrt{3}$




**Resolución:** Del gráfico, asumiendo el ángulo agudo mide "β" y el lado mide "a". Haciendo los trazos convenientes; en el gráfico



De la figura si: $O'N = a \Rightarrow NT = r - a$

$m\angle NO'M = \beta$

Del $\triangle_{O'MB}$; se observa que: $O'M = \frac{r}{2}$ (Por $\angle$ notables 30° y 60°)

Del $\triangle_{O'TO}$; se observa que: $OT = r\sqrt{3}$ (Por $\angle$ notables 30° y 60°)

Lo pedido: $J = 2\sqrt{3}\tan\psi - \sec\psi$

Del gráfico: $\tan\psi = \frac{r-a}{r\sqrt{3}}$ .....(1)

$\sec\psi = \sec(180° + \beta) = -\sec\beta$

Del $\triangle_{O'MN}$: $\sec\psi = -\left(\frac{a}{\frac{r}{2}}\right) = -\frac{2a}{r}$ .....(2)

Reemplazando (1) y (2) en "J":

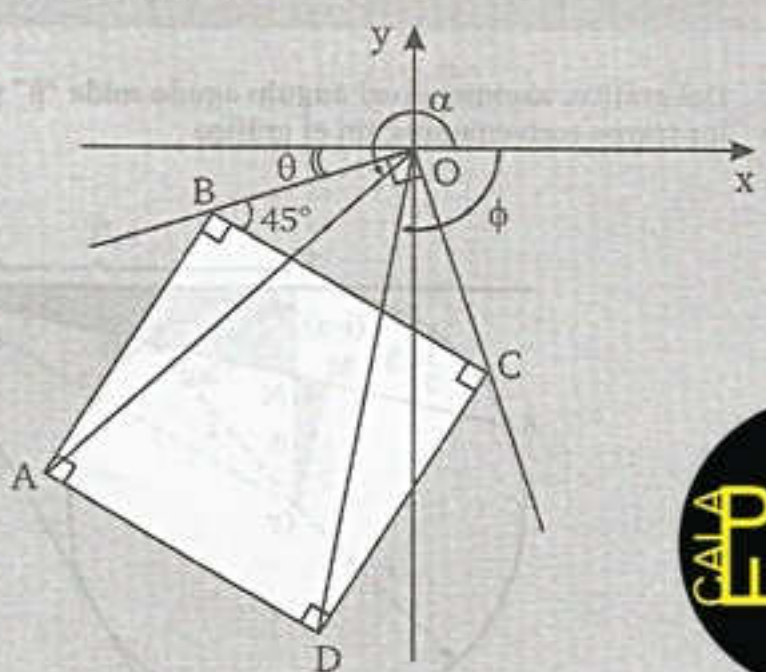
$$J = 2\sqrt{3}\left(\frac{r-a}{r\sqrt{3}}\right) - \left(-\frac{2a}{r}\right) = \frac{2r-2a+2a}{r}$$

$\therefore \mathbf{J = 2}$

**PROBLEMA 25** Si en figura, A B C D es un cuadrado, $m\angle BOC = 90°$:

$$J = (\text{sen}\alpha - \text{sen}\phi)^{-1}$$

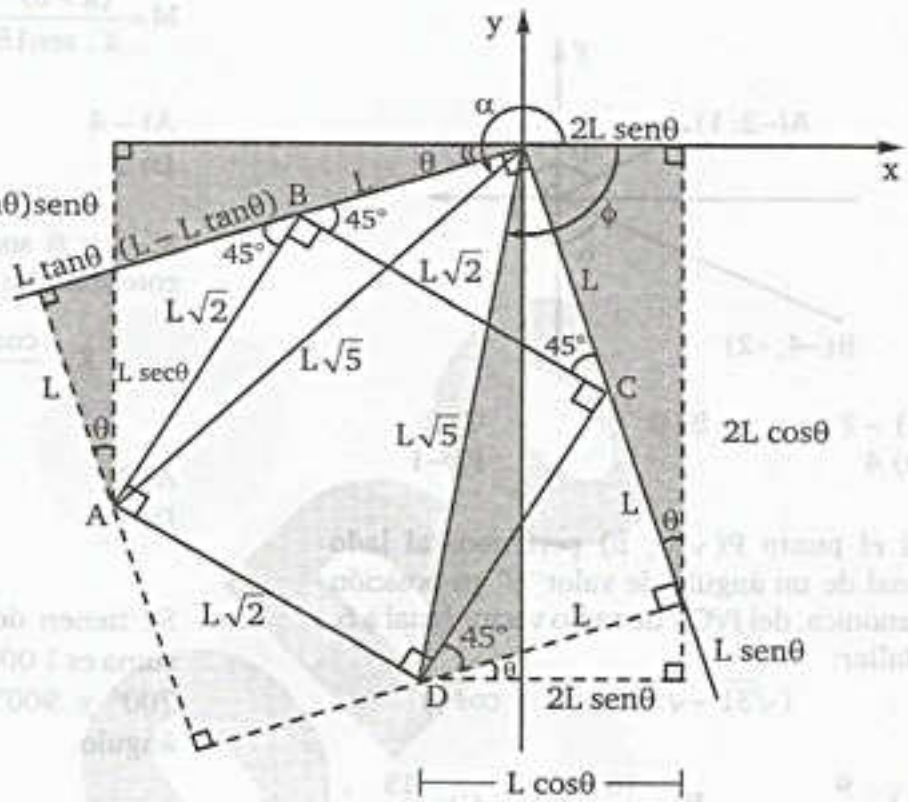
Exprese "J" en términos de $\theta$.



team CALAPENSHKO


**Resolución:** Haciendo trazos convenientes como rectas paralelas que pasan por los puntos B y C también A y C; completando con triángulos rectángulos.

Sea "$L\sqrt{2}$" el lado del cuadrado




Del gráfico las coordenadas de:

$$A:\left(-L(2\cos\theta-\operatorname{sen}\theta)\ ;\ -L(2\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)\right)$$

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{-L(2\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)}{L\sqrt{5}}$$

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{-2\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}{\sqrt{5}} \qquad .....(1)$$

$$D:\left(-L(\cos\theta-2\operatorname{sen}\theta)\ ;\ -L(2\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)\right)$$

$$\operatorname{sen}\phi=\frac{-L(2\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)}{L\sqrt{5}}$$

$$\operatorname{sen}\phi=\frac{-(2\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)}{\sqrt{5}} \qquad .....(2)$$

Reemplazando (1) ∧ (2) en "J":

$$J=\left(\frac{-2\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}{\sqrt{5}}+\frac{2\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{5}}\right)^{-1}$$

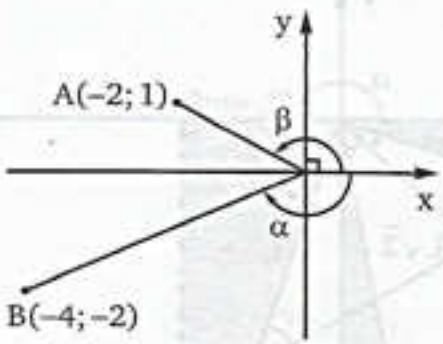
Se obtiene:

$$\therefore \quad J=\frac{\sqrt{5}}{\cos\theta-\operatorname{sen}\theta}$$

# PROBLEMAS PROPUESTOS

**1.** Del grafico mostrado, hallar:

$$M = \cot\alpha + \cot\beta$$




A) – 2 B) 0 C) 2
D) 4 E) –1

**2.** Si el punto $P(\sqrt{5}\ ;\ b)$ pertenece al lado final de un ángulo de valor "γ" en posición canónica, del IVC y de radio vector igual a 6. Hallar:

$$(\sqrt{31}+\sqrt{5})(\operatorname{sen}\gamma + \cos\gamma)$$

A) $-\frac{9}{4}$ B) $-\frac{13}{3}$ C) $-\frac{15}{2}$
D) $-\frac{17}{7}$ E) $-\frac{10}{8}$

**3.** Sea el punto (–3; 4) que pertenece al lado final de un ángulo en posición estándar de valor "θ".
Hallar el valor de "M".

$$\csc\theta + \frac{M}{5\operatorname{sen}\theta} = \cot\theta$$

A) –2 B) –4 C) –6
D) –8 E) –10

**4.** Si: $\theta \in$ II C y se cumple:

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{\tan\theta}} = (\sqrt[5]{\cot\theta})^{\cot\theta}\ ;\ \text{calcular :}$$

$M = \sec\theta + \tan\theta$.

A) 5 B) – 5 C) 3
D) – 3 E) 2

**5.** Reducir la expresión:

$$M = \frac{(a+b)^2 \,.\, \cos 360° + (a-b)^2 \,.\, \operatorname{sen}270°}{a \,.\, \operatorname{sen}180° + ab \,.\, \operatorname{sen}270° + b \,.\, \operatorname{sen}360°}$$

A) – 4 B) –2 C) 1
D) 2 E) 4

**6.** Si α y β son los valores de los ángulos coterminales, Hallar:

$$K = \frac{\cos\alpha - \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} + \frac{\tan\alpha}{\tan\beta}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 0

**7.** Se tienen dos ángulos coterminales cuya suma es 1 000°. El mayor de ellos está entre 700° y 900°. Hallar el valor del menor ángulo.

A) 240° B) 100° C) 110°
D) 150° E) 140°

**8.** Dada la expresión:

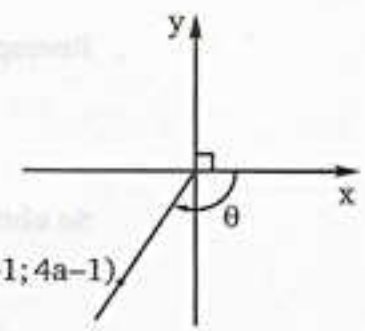
$$\operatorname{sen}\theta \,.\, \sqrt{-\cos\theta} < 0$$

Hallar el signo de:

$$\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \tan\theta$$

A) (+) B) (–) C) (+) y (–)
D) (+) ó (–) E) No se puede afirmar

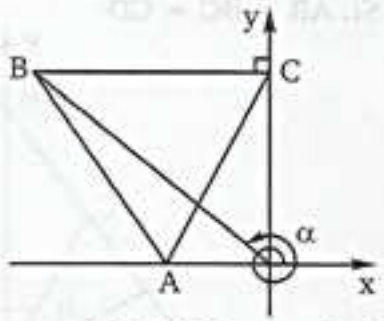
**9.** Del grafico mostrado, si $\sec\theta = -\sqrt{10}$
Hallar: $|a|$




A) 0, 5
B) 1
C) 1, 5
D) 2
E) 2, 5

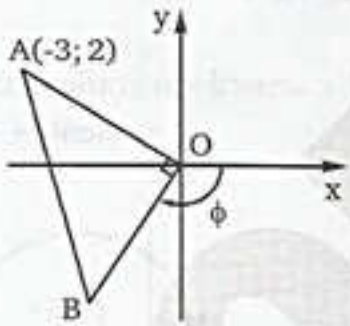
team CALAPENSHKO


**10.** Si el triángulo ABC es equilátero, hallar aproximadamente "$\csc^2\alpha$"




A) 1,333 B) 1,666 C) 2,111
D) 2,333 E) 2,666

**11.** Del gráfico mostrado, hallar "$\sec\phi\ \csc\phi$" siendo AOB un triángulo isósceles




A) 1,333 B) 2,166 C) 3,333
D) 2,666 E) 3,166

**12.** Hallar el cuadrante al cual pertenece el ángulo cuyo valor es "θ", si se cumple:

$$\sec\theta = \sqrt{x} \ \wedge\ \csc\theta = -x - y^2$$

A) IC B) IIC C) IIIC
D) IVC E) B ó C

**13.** Si un ángulo positivo mide "θ" y es menor que una vuelta cumple:

$$|\operatorname{sen}\theta| + \operatorname{sen}\theta = 0 \quad \text{..... (i)}$$
$$|\cos\theta| - \cos\theta = 0 \quad \text{..... (ii)}$$

Indicar el signo de:

$$A = \tan\theta + \csc\theta$$
$$B = \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$
$$C = \csc 2\theta$$

A) +;+;+ B) +;+;− C) −;+;−
D) +;−;+ E) −;−;−

**14.** Si se cumple:

$$\tan\beta = \sqrt{\operatorname{sen}\alpha - 1} + \sqrt{\cos\theta - 1}$$

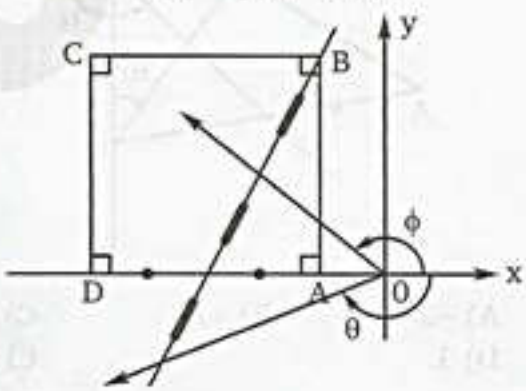
Además: $0 < \alpha < \beta < \theta \le 360°$
Hallar:

$$M = \operatorname{sen}\frac{\beta}{4} \cdot \cos\left(\frac{\theta-\alpha}{3} - 45°\right)$$

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$
D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{1}{4}$

**15.** Si ABCD cuadrado de lado 4 u, la distancia de "O" hacia A: 5 u. Hallar:

$$M = \cot\phi - \cot\theta$$




A) −5 B) 5 C) −6
D) −7 E) 7

**16.** Si: $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ; y:

$$2^{2\tan\theta+2} - (6)^{\tan\theta} = 2(3)^{2\tan\theta+2}$$

Evaluar:

$$\sec\theta + \csc\theta$$

A) $-\sqrt{5}$ B) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C) $\sqrt{5}$
D) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ E) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$

**17.** Se tiene dos ángulos coterminales, el valor del mayor es al valor del menor, como 5 es a 2, además, su diferencia es mayor a 1700° pero menor que 2000°. Hallar el valor del menor coterminal.

A) 820° B) 1100° C) 1200°
D) 1440° E) 2000°

**18.** Si $\alpha \in IIIC \wedge \beta \in IIC$; además:

$$\tan^2\alpha + \cot^2\beta + 13 = 2(2\tan\alpha - 3\cot\beta)$$

Hallar el valor de:

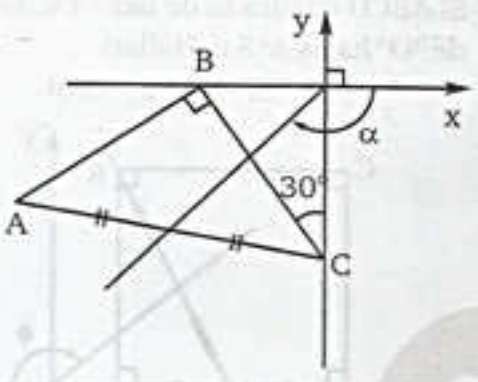
$$E = \sqrt{5}\sec\alpha + \sqrt{10}\csc\beta$$

A) 3 B) 5 C) 7
D) 0 E) 12

**19.** Del gráfico mostrado, hallar:

$$L = \tan\alpha + \sqrt{2}\,.\,\csc\alpha$$

Si AB = BC.




A) –2 B) –1 C) 0
D) 1 E) 2

**20.** Si el punto "I" es el incentro del triángulo rectángulo ABO (recto en B) y pertenece al lado final de un ángulo de valor "θ" en posición estándar. Hallar: "cotθ"

Datos: A(–13; 0); O(0; 0); B ∈ IIIC; c = 5

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

**21.** Si $\theta \Leftrightarrow R$ rad y es un ángulo cuadrantal, determine el valor de:

$$M = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta + \tan\theta$$

Sabiendo que:

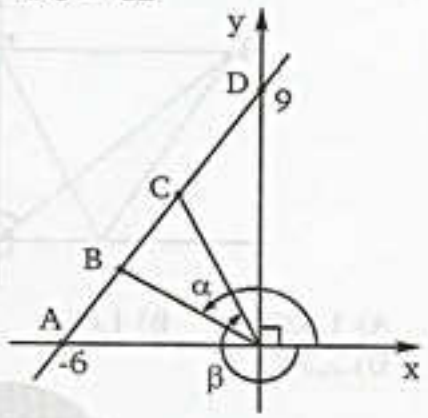
$$\sqrt{R - \frac{3\pi}{4}} + \sqrt{\frac{5\pi}{4} - R} = \sqrt{\pi}$$

A) –1 B) 1 C) 2
D) –2 E) 0

**22.** Del gráfico, hallar:

$$E = \tan\alpha + \tan\beta$$

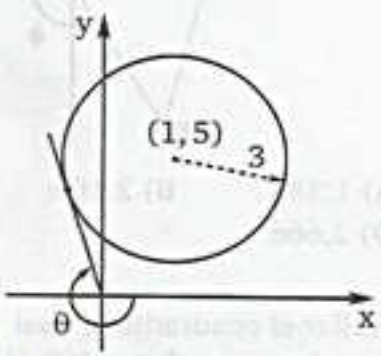
Si: AB = BC = CD




A) –15/4 B) –9/4 C) 9/4
D) 15/4 E) 0

**23.** De acuerdo al grafico, hallar:

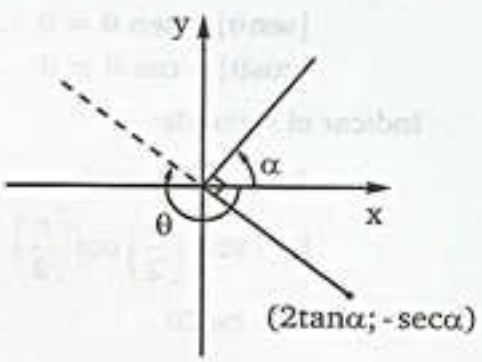
$$L = 5\operatorname{sen}\theta + \cos\theta$$




A) $\sqrt{7}$ B) $\sqrt{17}$ C) $2\sqrt{6}$
D) $\sqrt{23}$ E) $\sqrt{19}$

**24.** Del grafico, hallar:

$$K = \tan^2\theta + \csc^2\alpha$$




A) 1/5 B) 2/3 C) 1
D) 4/3 E) 5/3

team CALAPENSHKO



**25.** Indicar (V) ó (F) a cada proposición:

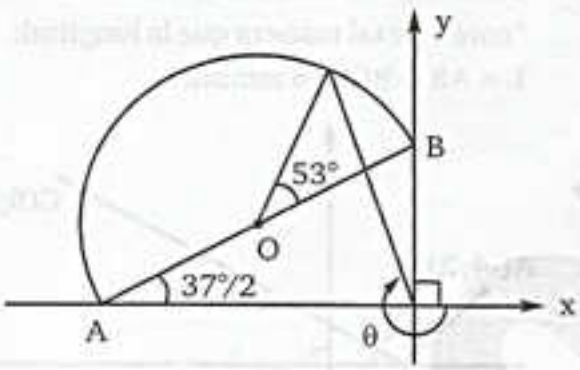
( ) Si un ángulo pertenece al tercer cuadrante, entonces necesariamente el valor este ángulo es mayor a 180° pero menor a 270°.

( ) Los ángulos que miden 880° y 160° son cofinales.

( ) Los ángulos que miden 900° y – 630° son cuadrantales.

A) VVV B) VFV C) VFF
D) FVV E) FFV

**26.** Del gráfico, hallar: $\text{sen}\theta + \cos\theta$
($\overline{AB}$: diámetro)




A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ C) $\frac{3\sqrt{3}}{5}$
D) $-\frac{\sqrt{5}}{4}$ E) $-\frac{\sqrt{5}}{6}$

**27.** Indicar lo correcto: ($n \in \mathbb{Z}$):

A) "$\alpha$" es el valor de un ángulo cuadrantal
$\Rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{2}$

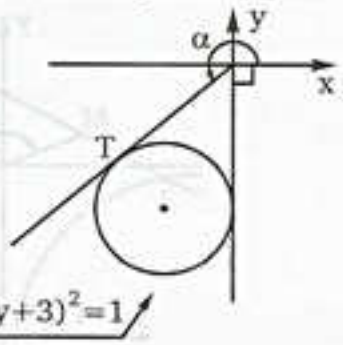
B) Si: $\alpha \in \left]{(2n+1)\pi; (4n+3)\frac{\pi}{2}}\right[$
$\Rightarrow \tan\alpha > 0$

C) Si: $\cos\alpha < 0$
$\Rightarrow \alpha \in \left]{(4n+1)\frac{\pi}{2}; (4n+3)\frac{\pi}{2}}\right[$

D) Si: $\alpha \in \left]{(4n+1)\frac{\pi}{2}; (2n+1)\pi}\right[$
$\Rightarrow \text{sen}\alpha > \cos\alpha$

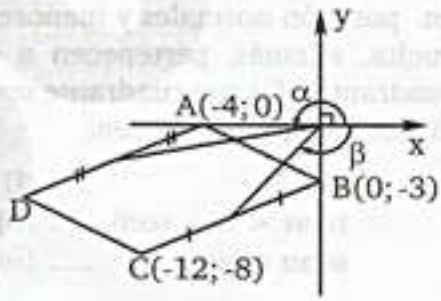
E) Todas son correctas

**28.** Del grafico mostrado, hallar el valor de: "cot α".T: punto de tangencia.



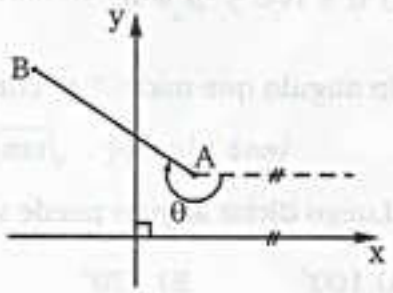

A) 0,75 B) 0,5 C) 0,25
D) 0,375 E) 0,125

**29.** Siendo ABCD un paralelogramo, hallar: "tanα + tanβ"




A) 12/7 B) 11/4 C) 17/13
D) 9/4 E) 7/6

**30.** De la figura, hallar el valor de "tanθ"
Datos: A(2; 2); B( 3; 5)



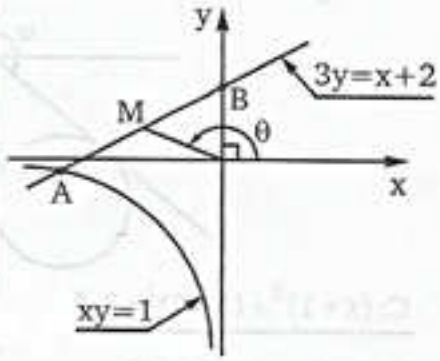

A) –0,2 B) –0,4 C) –0,6
D) –0,8 E) –1

**31.** Si el punto "Q" pertenece la lado final de un ángulo de valor "$\phi$" en posición normal, del IIC ($90° < \phi < 180°$) que tiene por abscisa y radio vector a –15 y 17
Hallar:

$$K = \tan\frac{\phi}{2} - \sqrt{17}\,\text{sen}\frac{\phi}{2}$$

A) –2 B) –1 C) 0
D) 1 E) 2

**32.** Siendo "M" punto medio del segmento $\overline{AB}$, hallar: "cotθ"




A) –5 B) –6 C) –7
D) –8 E) –9

**33.** Si α y β son los valores de ángulos positivos en posición normales y menores que una vuelta, además, pertenecen a diferentes cuadrantes. En que cuadrante se encuentra dichos ángulos si cumplen:

$\alpha > \beta$ ..... (i)
$\tan\alpha < 0 < \sec\beta$ ..... (ii)
$\operatorname{sen}\alpha \cos\beta < 0$ ..... (iii)

A) $\alpha \in$ IIIC y $\beta \in$ IIC
B) $\alpha \in$ IIC y $\beta \in$ IC
C) $\alpha \in$ IIC y $\beta \in$ IC
D) $\alpha \in$ IVC y $\beta \in$ IIIC
E) $\alpha \in$ IVC y $\beta \in$ IC

**34.** Un ángulo que mide " ϕ" cumple:

$$\operatorname{sen}\phi \cdot |\cos\phi| \cdot \sqrt{\tan\phi} < 0$$

¿Luego dicho ángulo puede valer?

A) 100° B) 170° C) 250°
D) 290° E) 330°

**35.** Si un ángulo que mide "ω" en posición normal

$$(\operatorname{sen}\omega + \cos\omega)\sqrt{\sec\omega\csc\omega} < 0$$

Indicar el signo de:

$P = \tan\omega + \cot\omega$
$Q = \operatorname{sen}^2\omega \cos\omega + \cos\omega \operatorname{sen}^2\omega$
$R = 1 + \operatorname{sen}\omega - \cos\omega$

A) +; +; + B) +; –; + C) –; +; –
D) –; –; + E) +; +; –

**36.** Se tienen dos ángulos cuadrantales A y B diferentes, positivos y menores de una vuelta que cumple:

$$\cos A + \operatorname{sen}^2 B = 1$$

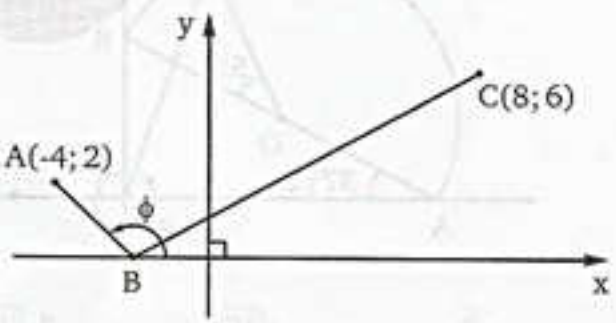
Hallar:

$$N = \frac{\operatorname{sen}A + \cos 2B}{\cos(B - A)}$$

Indicar una solución:

A) –1 B) 1 C) 0
D) –2 E) 1/2

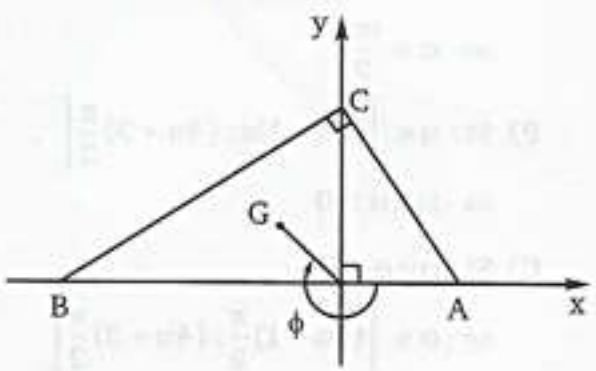
**37.** De la figura mostrada, hallar el valor de "cotϕ" de tal manera que la longitud: L = AB + BC, sea mínima.




A) –0,5 B) –1 C) –1, 5
D) –2 E) –2, 5

**38.** De la figura, calcular "cotϕ", siendo "G" el baricentro del triángulo ABC.

$A(a^2; 0)$ , $B(-b^2; 0)$



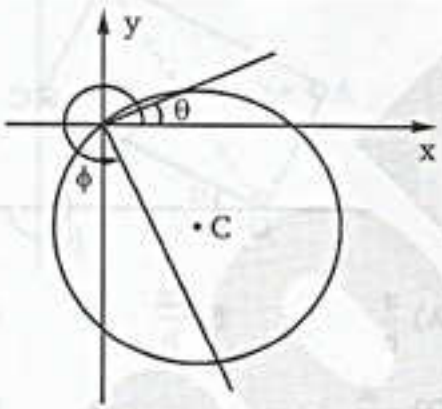

A) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ B) $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$ C) $\frac{ab}{a+b}$
D) $\frac{a+b}{a-b}$ E) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

team CALAPENSHKO


**39.** Hallar la suma de los ángulos cuadrantales y a la vez coterminales en 90°, que estén comprendidos entre 400° y 1200°.

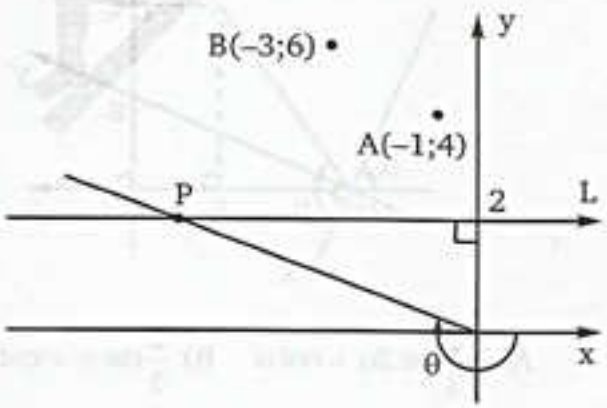
A) 1360° B) 1950° C) 2430°
D) 2880° E) 3210°

**40.** En la siguiente figura los lados finales de los ángulos cuyos valores son: $\theta$ y $\phi$, pasan por el punto más alto y más bajo de la circunferencia respectivamente. Si $\tan\theta + \tan\phi = -6$ y el radio vector del centro es 10. Hallar la suma de coordenadas del centro.



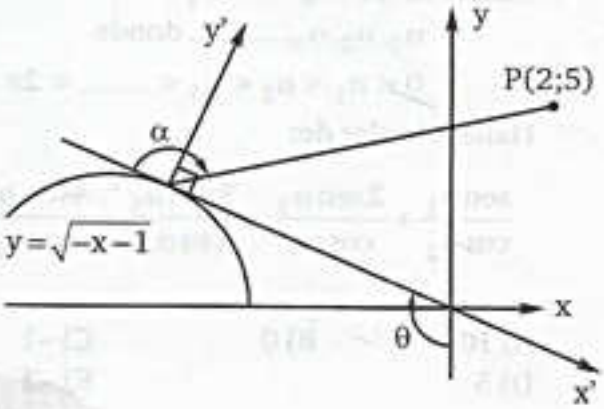

A) $-2\sqrt{10}$ B) $2\sqrt{10}$ C) $\sqrt{10}$
D) $-3\sqrt{10}$ E) $3\sqrt{10}$

**41.** Si en la figura desde "P" se divisa a AB bajo un ángulo máximo ($P \in L$)
Hallar el valor de "$\cot\theta$"




A) –2 B) $-\frac{1}{2}$ C) $-\frac{2}{3}$
D) $-\frac{3}{2}$ E) –3

**42.** A partir del gráfico mostrado, halle el valor de: $\tan\theta + \cot\alpha$ (T punto de tangencia)




A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{7}{3}$
D) 2 E) 3

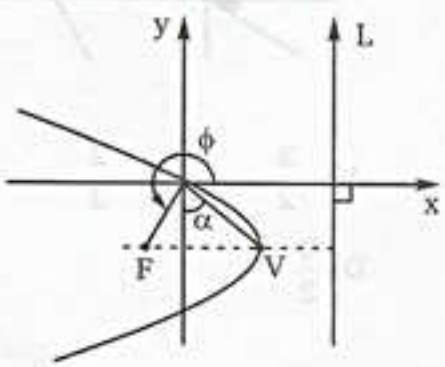
**43.** Se sabe que: $\theta_1$, $\theta_2$ y $\theta_3$ son los valores de ángulos cuadrantales, diferentes, positivos y menores que una vuelta. Si el coterminal del ángulo que mide $\theta_1$, pertenece al intervalo entre $-1380°$ y $-1320°$ y el ángulo de valor $\theta_3$ es coterminal con el ángulo que mide $-\theta_3$. Hallar el valor de:

$$J = 2\cos^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right) + \sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta_2}{6}\right) + \cot\left(\frac{\theta_3}{4}\right)$$

A) 1 B) 0 C) 2
D) 3 E) 4

**44.** Si L es la directriz de la parábola, con foco F y vértice V. Calcular:

$$M = \tan\alpha \,.\, (\csc\phi - \cot\phi)$$




A) 2
B) 0,5
C) –2
D) 0,25
E) –0,5

Los puntos de intersección de: $x^2 + y^2 = 4$ con la de $|xy| = 1$, pertenecen a los lados finales de los ángulos en posición canónica.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots$ donde

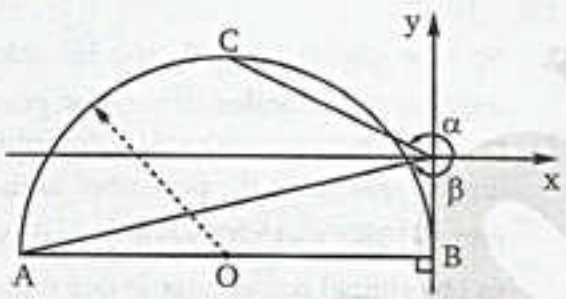
$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots\ldots < 2\pi$

Hallar el valor de:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{\cos\alpha_2} + \frac{2\operatorname{sen}\alpha_3}{\cos\alpha_4} + \frac{3\operatorname{sen}\alpha_5}{\cos\alpha_6} + \frac{4\operatorname{sen}\alpha_7}{\cos\alpha_8}$$

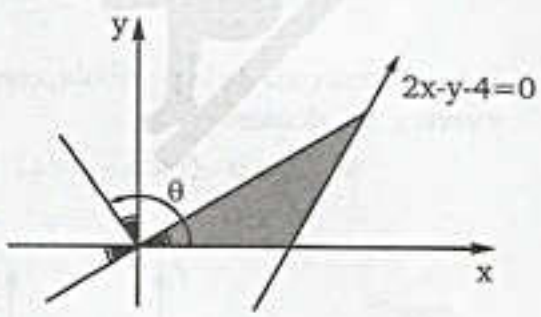
A) 10 B) 0 C) –1
D) 5 E) –2

Si el punto "C" que pertenece a la semicircunferencia AOB, tiene ordenada máxima, hallar. $2\tan\beta - \tan\alpha$



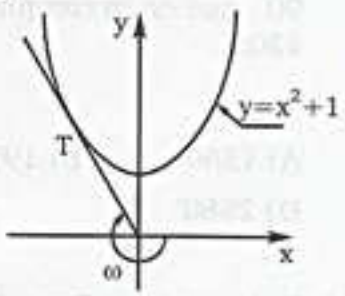

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Si el área de la región del triángulo sombreada es $12\,u^2$. Hallar "$\tan\theta$"




A) $-\frac{3}{2}$ B) $-\frac{2}{3}$ C) $\frac{2}{3}$
D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{5}{2}$

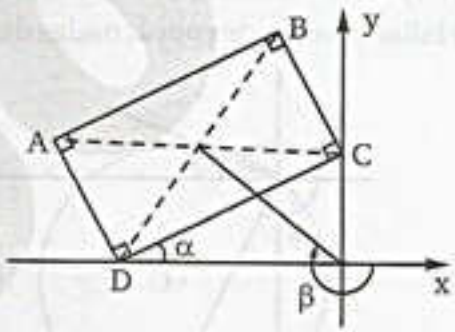
**48.** Del grafico, hallar: "$\tan\omega$"
T: punto de tangencia




A) 0
B) 1
C) 2
D) –1
E) –2

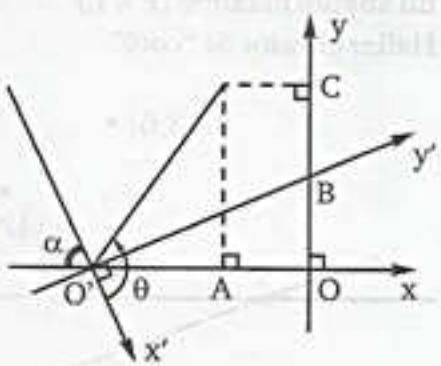
**49.** En la figura mostrada, ABCD es un rectángulo de lado AB = a y BC = b.

Hallar el equivalente de: $\frac{\tan\alpha + \cot\beta}{1 + \tan\alpha\cot\beta}$




A) $\frac{a}{b}$ B) $\frac{2a}{b}$ C) $-\frac{a}{2b}$
D) $-\frac{a}{b}$ E) $-\frac{b}{a}$

**50.** La figura muestra un ángulo de valor "θ" en posición estándar en el sistema x'y'
Si: OA = O'A y OB = BC
Hallar: el valor de "tan θ" en términos de "α"




A) $-\frac{2}{3}\csc 2\alpha + \cot\alpha$ B) $\frac{2}{3}\csc\alpha + \cot 2\alpha$
C) $\frac{2}{3}\csc 2\alpha - \cot\alpha$
D) $-\frac{2}{3}\csc 2\alpha - \cot 2\alpha$ E) $-\frac{2}{3}\csc 2\alpha - \cot\alpha$

team CALAPENSHKO

Capítulo 6

# Reducción al primer Cuadrante

**CAPACIDADES**

- Determinar el valor de las razones trigonométrica para ángulos no agudos.
- Reconocer y aplicar las reglas de reducción al primer cuadrante para todo tipo de ángulo.

## LA TRIGONOMETRÍA HINDÚ

Una de las contribuciones más importantes de la India al desarrollo de la matemáticas es la introducción de la función seno en reemplazo de las tablas de cuerdas griegas; las tablas más antiguas de la función seno que han llegado hasta nosotros son las que figuran en los Siddhantas y en el Aryabhatiya (Equivalentes matemáticos hindúes a los religiosos Vedas), donde se dan los senos de los ángulos menores o iguales que 90° para 24 intervalos angulares iguales a 3,75° cada uno.

VERSIÓN INGLESA MODERNA DEL SURYA SIDDHANTA

Para el seno de 3,75° se toma exactamente el número de unidades que contiene el arco, es decir 225; traducido al lenguaje moderno, el seno de un ángulo pequeño es casi igual a la medida del ángulo en radianes, que es justamente lo que hacían los hindúes. Para las entradas restantes de la tabla de senos utilizaban una forma de recursión que se expresa de la manera siguiente:

$$S_{n+1} = S_n + S_1 - \frac{R_n}{S_1}$$

Donde $R_n$ es la suma de los n primeros senos; los valores obtenidos al reemplazar n desde 1 hasta 24 son los mismos que aparecen en los Siddhantas y en el Aryabhatiya. Estas tablas además incluyen los valores del seno verso y coseno verso. Además, si se divide los números que figuran en la tabla por el máximo valor (sen 90° = 3438), se encuentra resultados que se aproximan mucho a los valores correspondientes a las tablas trigonométricas modernas.

La trigonometría hindú fue evidentemente una herramienta para la astronomía tan útil como precisa. El cómo llegaron los hindúes a resultados tales como la forma de recursión para los senos que acabamos de mencionar, es desconocido, pero sí se ha sugerido que tales reglas pudieron venir motivadas por un desarrollo intuitivo o empírico del cálculo con ecuaciones en diferencia y de la práctica de la interpolación; de hecho se suele caracterizar frecuentemente a la matemática hindú como "intuitiva", para ponerla en contraste con el severo racionalismo griego. A pesar de que es evidente la influencia griega en la trigonometría hindú, estos no aprovecharon el potencial de dicha influencia en el estudio de las demás ramas de la matemática; e incluso las secciones cónicas parecen haber sido ignoradas por los hindúes, lo mismo que los chinos.

team CALAPENSHKO



## INTRODUCCIÓN

Hasta el desarrollo del capítulo anterior para ángulos relacionando directamente los elementos del triángulo en un primer momento y luego las coordenadas de un punto del lado final para un ángulo en posición normal, es decir se ha establecido una relación directa para un ángulo, su razón trigonométrica y el valor de ésta.

Esto sugiere que para hallar el valor de la razón trigonométrica de varios ángulos se deberán graficar tantos triángulos a ubicar ángulos en posición normal en el plano, lo cual resultara tedioso Para solucionar este problema se ha buscado establecer equivalencias entre expresiones, aprovechando la descomposición en sumandos (pueden ser también diferencias) de sus correspondientes argumentos (ángulos).

**Ejemplos:**

- $\operatorname{sen} 120° = \operatorname{sen}(60° + 60°)$
- $\operatorname{sen} 120° = \operatorname{sen}(90° + 30°)$
- $\cos 300° = \cos(360° - 60°)$
- $\cos 300° = \cos(150° + 150°)$

Como podemos observar, el ángulo puede ser descompuesto de múltiples maneras. Lógicamente tomaremos aquel que nos convenga según nuestras necesidades o conveniencias.

En el presente capítulo, aprovecharemos las ventajas que se tiene al tomar un cuadrantal y un ángulo agudo asociado con él. Para observar una recurrencia, partiremos de ejemplos gráficos y luego plantearemos una regla general para reducir al primer cuadrante.

# REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

## DEFINICIÓN

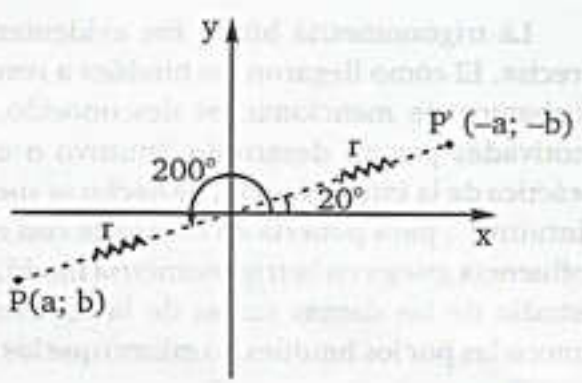
Reducir al primer cuadrante, implica encontrar el equivalente de una razón con un ángulo dado en términos de un ángulo del primer cuadrante. Para encontrar dicho equivalente descompondremos los ángulos en términos de los ángulos cuadrantales (90°, 180°, 270°, ...). Veamos algunos ejemplos a continuación:

Halle el equivalente del valor de un ángulo, en el primer cuadrante en cada caso:

**A)** $\operatorname{sen} 200°$

**Resolución:**

En la figura tomando como referencia el punto P(a; b), ubicamos su simetría con respecto al origen P'(–a; –b).




i) $\operatorname{sen} 200° = \operatorname{sen}(180° + 20°) = \dfrac{b}{r}$

ii) $\operatorname{sen} 20° = \dfrac{-b}{r} = -\dfrac{b}{r}$

Entonces de (i) y (ii) se concluye:

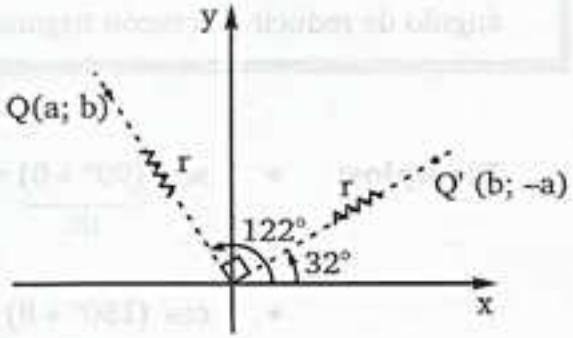
$$\therefore \operatorname{sen}(180° + 20°) = -\operatorname{sen} 20°$$

team CALAPENSHKO


**B)** $\cos 122°$

**Resolución:**

En la figura tomando como referencia el punto Q(a; b), ubicamos su transpuesta Q'(b; –a), tal que:




i) $\cos 122° = \cos(90° + 32°) = \dfrac{a}{r}$

ii) $\operatorname{sen} 32° = \dfrac{-a}{r} = -\dfrac{a}{r}$

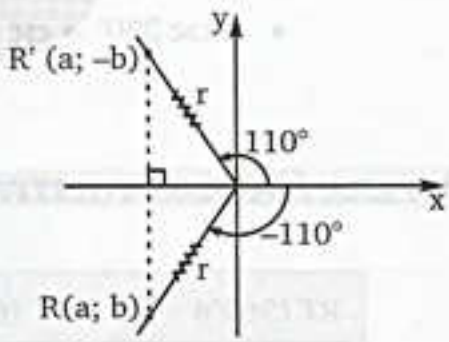
Entonces de (i) y (ii) se concluye:

$\therefore$ **$\cos(90° + 32°) = -\operatorname{sen} 32°$**

**C)** $\tan(-110°)$ ; $\cos(-110°)$

**Resolución:**

En la figura tomando como referencia el punto R (a; b) ubicamos su simétrico con respecto al eje "x". R' (a; – b), tal que:




i) $\tan(-110°) = \dfrac{b}{a}$ ; $\cos(-110°) = \dfrac{a}{r}$

ii) $\tan(110°) = -\dfrac{b}{a}$; $\cos 110° = \dfrac{a}{r}$

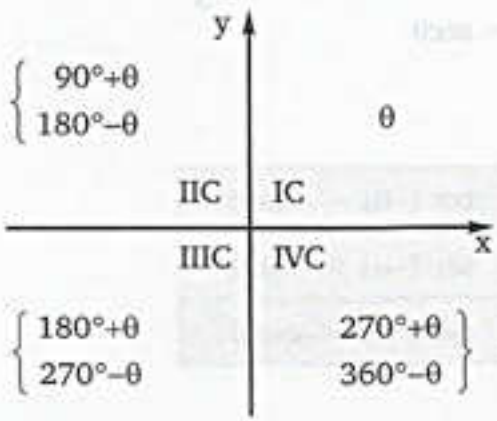
Entonces de (i) y (ii) se concluye:

$\therefore$ **$\tan(-110°) = -\tan 110°$ ;**
**$\cos(110°) = \cos 110°$**

Como podemos observar, para hallar el equivalente de una razón en términos de otra con ángulos del primer cuadrante es una tarea no muy complicada, pero si un poco mecánica. Para abreviar el procedimiento usaremos un conjunto de reglas, las cuales indicamos a continuación:

## CASO I: PARA ÁNGULOS POSITIVOS MENORES A UNA VUELTA

Considerando a "θ" como el valor de un ángulo agudo, tenemos:




| |
|---|
| RT (90° + θ) = (±) coRT (θ) |
| RT (180° ± θ) = (±) RT (θ) |
| RT (270° ± θ) = (±) coRT (θ) |
| RT (360° – θ) = (±) RT (θ) |

**OBSERVACIÓN**

El signo (+) ó (–) que se elige en el segundo miembro depende del cuadrante asumido por el ángulo de reducir y la razón trigonométrica.

**Ejemplos:**

- $\text{sen}\underbrace{(90° + \theta)}_{\text{IIC}} = +\cos\theta$ — Pues el seno en el IIC es positivo
- $\cos\underbrace{(180° + \theta)}_{\text{IIIC}} = -\cos\theta$ — Pues el coseno en el IIIC es negativo
- $\tan 250° = \tan\underbrace{(270° - 20°)}_{\text{IIIC}} = +\cot 20°$ — Pues tangente en el IIIC es positivo
- $\csc 330° = \csc\underbrace{(360° - 30°)}_{\text{IVC}} = -\csc 30° = -2$ — Pues cosecante en el IVC es negativo

## CASO II: PARA ÁNGULOS POSITIVOS MAYORES A UNA VUELTA

$$\text{RT}(360°n + \theta) = \text{RT}(\theta) \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{ó} \quad \text{RT}(2n\pi + \theta) = \text{RT}(\theta)$$

**OBSERVACIÓN**

Si para un ángulo eliminamos el número de vueltas que contiene, el valor de dicha razón no varía.

**Ejemplos:**

- $\text{sen}(360° + \theta) = \text{sen}\theta$
- $\cos(1080° + \theta) = \cos(360° \times 3 + \theta) = \cos\theta$
- $\tan 750° = \tan(360° \times 2 + 30°) = \tan 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$
- $\text{sen}(40\pi - \theta) = \sec(-\theta) = \sec\theta$

## CASO III: PARA ÁNGULOS NEGATIVOS

| | |
|---|---|
| $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\,\theta$ | $\cot(-\theta) = -\cot\theta$ |
| $\cos(-\theta) = \cos\theta$ | $\sec(-\theta) = \sec\theta$ |
| $\tan(-\theta) = -\tan\theta$ | $\csc(-\theta) = -\csc\theta$ |

team CALAPENSHKO


**Ejemplos:**

- $\text{sen}(-30°) = -\text{sen}\,30° = -\frac{1}{2}$
- $\cos(-45°) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\tan(-120°) = -\tan 120°$

Aplicando CASO I:

$$\tan(-120°) = -\tan\underbrace{(180° - 60°)}_{\text{IIC}}$$

$$\tan(-120°) = -\left[-\tan 60°\right]$$

Pues tangente en el IIC es negativo

$$\tan(-120°) = \sqrt{3}$$

**Ejemplo:** Reducir: $M = \csc(\theta - 180°)$

**Resolución:**

$$M = \csc\left[-(180° - \theta)\right]$$

$$M = -\csc\underbrace{(180° - \theta)}_{\text{IIC}}$$

$$M = -\left[+\csc\theta\right]$$

Pues cosecante en el IIC es positivo

$$\therefore M = -\csc\theta$$

team CALAPENSHKO



## EJERCICIOS DE APLICACIÓN

**1.** Coloque (V) o (F) según sea verdadero o falso.

( ) $\operatorname{sen}(\pi + x) = -\operatorname{sen} x$

( ) $\cos(2\pi - x) = \cos x$

( ) $\tan(180° + x) = -\tan x$

( ) $\sec(90° + x) = -\csc x$

( ) $\cot(2\pi - x) = \cot x$

( ) $\csc\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\sec x$

**2.** Coloque (V) o (F) según sea verdadero o falso.

( ) $\operatorname{sen} 110° = -\operatorname{sen} 70°$

( ) $\cos 230° = \cos 50°$

( ) $\tan 340° = -\tan 20°$

( ) $\cot 320° = \cot 40°$

( ) $\sec 210° = -\csc 80°$

( ) $\csc 300° = -\sec 30°$

**3.** Calcule:

a) $\operatorname{sen} 120° =$ .....

b) $\cos 135° =$ .....

c) $\tan 150° =$ .....

d) $\sec 240° =$ .....

e) $\cot 300° =$ .....

f) $\csc 330° =$ .....

**4.** Coloque (V) o (F) según sea verdadero o falso.

( ) $\operatorname{sen}(-20°) = -\operatorname{sen} 20°$

( ) $\cos(-100°) = -\cos 80°$

( ) $\tan(-70°) = \tan 70°$

( ) $\cot(-30°) = \sqrt{3}$

( ) $\sec(-60°) = 2$

( ) $\csc\left(-\frac{\pi}{13}\right) = -\csc\frac{\pi}{13}$

**5.** Reduzca al primer cuadrante:

a) $\operatorname{sen} 785° =$ .....

b) $\cos 1\,179° =$ .....

c) $\tan 2\,347° =$ .....

d) $\cot\frac{81\pi}{5} =$ .....

e) $\sec\frac{216\pi}{5} =$ .....

f) $\csc\frac{280\pi}{9} =$ .....

**6.** Reduzca al primer cuadrante sabiendo que x es el valor de un ángulo agudo.

a) $\operatorname{sen}(24\pi + x) =$ .....

b) $\cos(375\pi - x) =$ .....

c) $\tan(440\pi + x) =$ .....

d) $\cot(569\pi + x) =$ .....

e) $\sec(900\pi - x) =$ .....

f) $\csc(1\,443\pi + x) =$ .....

twitter.com/calapenshko

team CALAPENSHKO



## PROBLEMAS RESUELTOS

**PROBLEMA 1** Calcule:

$$P = \frac{\text{sen } 140^\circ \cdot \cos 200^\circ \cdot \tan 300^\circ}{\cos 130^\circ \cdot \text{sen } 110^\circ}$$

**Resolución:** Aplicando el CASO I, tenemos:

$$\text{sen } 140^\circ = \text{sen } (90^\circ + 50^\circ) = \cos 50^\circ$$
$$\cos 200^\circ = \cos (180^\circ + 20^\circ) = -\cos 20^\circ$$
$$\tan 300^\circ = \tan (270^\circ + 30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$
$$\cos 130^\circ = \cos (180^\circ - 50^\circ) = -\cos 50^\circ$$
$$\text{sen } 110^\circ = \text{sen } (90^\circ + 20^\circ) = \cos 20^\circ$$

Reemplazando en P:

$$P = \frac{(\cos 50^\circ) \cdot (-\cos 20^\circ) \cdot (-\sqrt{3})}{(-\cos 50^\circ) \cdot (\cos 20^\circ)}$$

$$\therefore \quad \mathbf{P = -\sqrt{3}}$$

**PROBLEMA 2** Siendo A y B los valores de ángulos complementarios, simplifique:

$$E = \frac{\text{sen}(A + 2B) \cdot \tan(2A + 3B)}{\cos(2A + B) \cdot \tan(4A + 3B)}$$

**Resolución:** DATO: $A + B = 90^\circ$

$$\Rightarrow A = 90^\circ - B$$

Reemplazando en E:

$$E = \frac{\text{sen}(90^\circ + B) \cdot \tan(180^\circ + B)}{\cos(180^\circ - B) \cdot \tan(360^\circ - B)}$$

Reduciendo aplicando el CASO I:

$$E = \frac{(\cos B) \cdot (\tan B)}{(-\cos B) \cdot (-\tan B)}$$

$$\therefore \quad \mathbf{E = 1}$$

**A todo el público en general:**

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

**Este libro no debe ser prostituito monetariamente**, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

**28 de agosto del 2020**

**PROBLEMA 3** En un triángulo ABC se cumple:

$$\text{sen A} + \text{sen B} = \text{sen}(B + C) + \cos(A + C)$$

¿De qué tipo de triángulo se trata?

**Resolución:**

$$A + B + C = 180°$$

$$\Rightarrow B + C = 180° - A \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\Rightarrow A + C = 180° - B \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Usando (1) y (2) en la condición, tenemos:

$$\text{sen A} + \text{sen B} = \underbrace{\text{sen}(180° - A)} + \underbrace{\cos(180° - B)}$$

$$\text{sen A} + \text{sen B} = (\text{sen A}) + (-\cos B)$$

$$\text{sen B} = -\cos B$$

$$\tan B = -1$$

Entonces: $B = 135°$ ..... Ángulo obtuso

$\therefore$ Es un triángulo obtusángulo.

**Propiedad:**

**1)** Si $= x + y = 180°$ ..... ángulos suplementarios

$$\Rightarrow \boxed{\text{sen x} = \text{sen y}} \wedge \boxed{\cos x = -\cos y}$$

**2)** Si: $x + y = 360°$ ..... ángulos revolucionarios

$$\Rightarrow \boxed{\text{sen x} = -\text{sen y}} \wedge \boxed{\cos x = \cos y}$$

**PROBLEMA 4** Se define:

$$\text{vers } x = 1 - \cos x$$

Calcule:

$$E = \text{vers } 20° + \text{vers } 40° + \text{vers } 60° + \ldots\ldots\ldots + \text{vers } 180°$$

**Resolución:**

Usando la definición:

$$E = (1 - \cos 20°) + (1 - \cos 40°) + (1 - \cos 60°) + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + (1 - \cos 160°) + (1 - \cos 180°)$$

$$E = 9 - \cos 20° - \cos 40° - \cos 60° - \ldots - \cos 160° - \underbrace{\cos 180°}_{-1}$$

$$E = 10 - (\cos 20° + \cos 40° + \cos 60° + \cos 80° +$$
$$+ \cos 100° + \cos 120° + \cos 140° + \cos 160°)$$

team CALAPENSHKO


Usando la propiedad anterior:

$$\cos 160° = -\cos 20°$$

$$\cos 140° = -\cos 40°$$

$$\cos 120° = -\cos 60°$$

$$\cos 100° = -\cos 80°$$

Remplazando en E:

$$E = 10 - (\cos 20° + \cos 40° + \cos 60° + \cos 80° - \cos 80° - \cos 60° - \cos 40° - \cos 20°)$$

$$\therefore \mathbf{E = 10}$$

**PROBLEMA 5** Siendo "θ" el valor de un ángulo mayor a 270° pero menor a 360°, indique su valor si se cumple:

$$\cos\theta = \operatorname{sen} 20°$$

**Resolución:**

Según dato: $270° < \theta < 360°$

Sea: $\theta = 270° + \alpha$ ; $\alpha$: Ángulo agudo

Usándolo en la condición:

$$\cos(270° + \alpha) = \operatorname{sen} 20°$$

Reduciendo al IC:

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen} 20°$$

$$\alpha = 20°$$

$$\therefore \ \mathbf{\theta = 290°}$$

**PROBLEMA 6** Calcule

$$M = \frac{\operatorname{sen}(\pi + x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \tan(2\pi - x)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \cdot \operatorname{sen}(\pi - x) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$$

Para: $x = \frac{2\pi}{3}$

**Resolución:** Recordar los equivalentes:

$\frac{\pi}{2} <> 90°$ ; $\pi <> 180°$ ; $\frac{3\pi}{2} <> 270°$ ; $2\pi <> 360°$

Aplicando el CASO I, tenemos:

$\text{sen}\,(\pi + x) = -\text{sen}\,x$ ; $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\text{sen}\,x$ ; $\tan\,(2\pi - x) = -\tan x$

$\cos\left(3\frac{\pi}{2}-x\right) = -\text{sen}\,x$ ; $\text{sen}\,(\pi - x) = \text{sen}\,x$ ; $\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\cot x$

Reemplazando en M:

$$M = \frac{(-\text{sen}x)\,.\,(-\text{sen}x)\,.\,(-\tan x)}{(-\text{sen}x)\,.\,(\text{sen}x)\,.\,(-\cot x)}$$

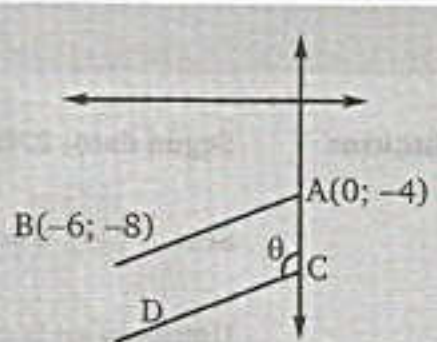
$$M = -\frac{\tan x}{\cot x} \Rightarrow M = -\tan^2 x \text{ ; usar: } x = \frac{2\pi}{3}$$

$$M = -\tan^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -(-\sqrt{3})^2$$

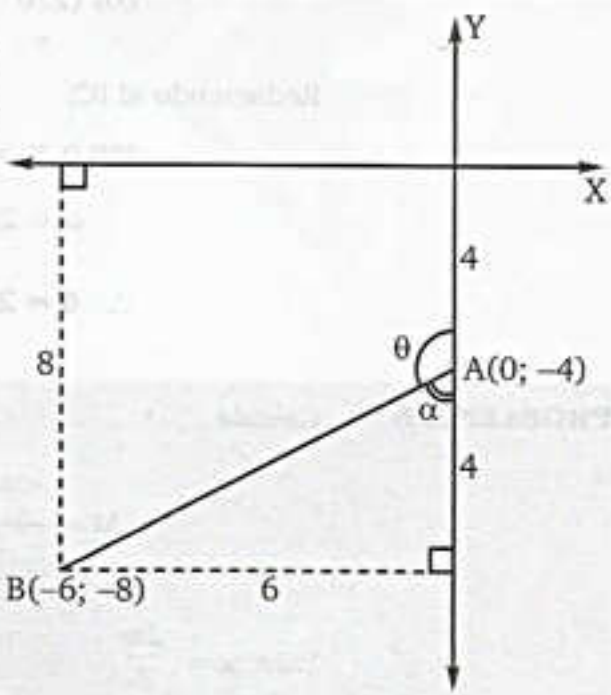
$$\therefore \quad \mathbf{M = -3}$$

**PROBLEMA 7** En el gráfico mostrado, si $\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$, entonces el valor de $\tan\theta$ es:

**ADMISIÓN UNI 2017 - I**




**Resolución:** Como $\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$, entonces los ángulos formados por el eje de ordenadas y los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son de igual medida.




Como: $\theta + \alpha = 180°$

$\rightarrow \tan\theta = -\tan\alpha$

$\therefore \quad \tan\theta = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$

**PROBLEMA 8** Reduzca la expresión:

$$E = \frac{\cot(31\pi - x)}{\tan\left(\frac{27\pi}{2} + x\right)} + \frac{\cos(x - 83\pi)}{\operatorname{sen}\left(x - \frac{99\pi}{2}\right)} + \frac{\csc(13\pi - x)}{\sec\left(\frac{15\pi}{2} - x\right)}$$

**Resolución:** Dando forma a cada expresión para eliminar el "número de vueltas" ($2n\pi$; $n \in \mathbb{Z}$) aplicando el CASO II:

$$\cot(31\pi - x) = \cot(30\pi + \pi - x) = \cot(\pi - x) = -\cot x$$

$$\tan\left(\frac{27\pi}{2} + x\right) = \tan\left(12\pi + \frac{3\pi}{2} + x\right) = \tan\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cot x$$

$$\cos(x - 83\pi) = \cos(-84\pi + \pi + x) = \cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\operatorname{sen}\left(x - \frac{99\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(-50\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\csc(13\pi - x) = \csc(12\pi + \pi - x) = \csc(\pi - x) = \csc x$$

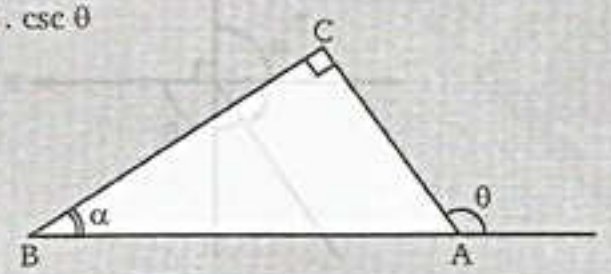
$$\sec\left(\frac{15\pi}{2} - x\right) = \sec\left(6\pi + \frac{3\pi}{2} - x\right) = \sec\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\csc x$$

Reemplazando en E:

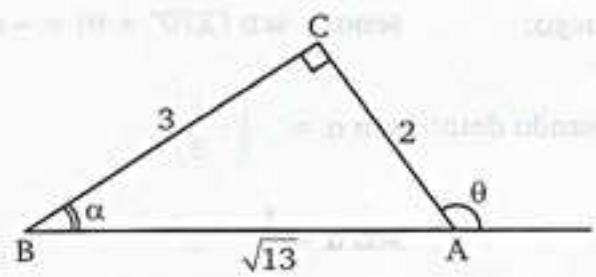
$$E = \frac{(-\cot x)}{(-\cot x)} + \frac{(-\cos x)}{(\cos x)} + \frac{(\csc x)}{(-\csc x)} = 1 - 1 - 1$$

$$\therefore \quad \mathbf{E = -1}$$

**PROBLEMA 9** Del gráfico si: $\tan\alpha = 2/3$
Calcule: $\sec\theta \cdot \csc\theta$




**Resolución:** Usando $\tan\alpha = \frac{2}{3}$ en el gráfico:




$\triangle ACB$:

$\theta = 90° + \alpha$

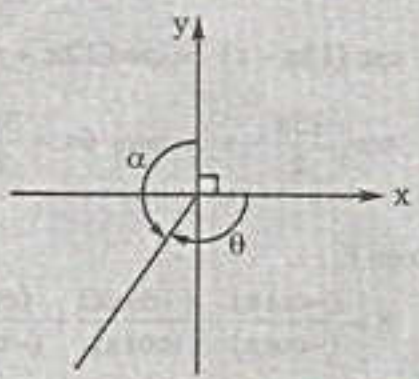
Luego: $\sec\theta \cdot \csc\theta = \underbrace{\sec(90° + \alpha)}\ \underbrace{\csc(90° + \alpha)}$

$\sec\theta \cdot \csc\theta = (-\csc\alpha) \quad . \quad (\sec\alpha)$

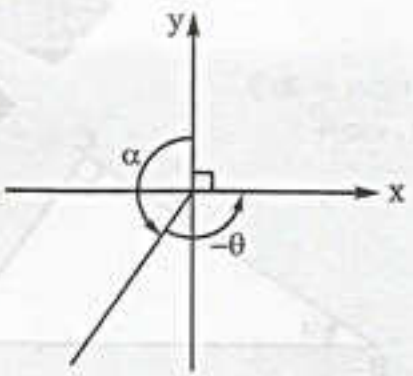
$$\sec\theta \cdot \csc\theta = \left(-\frac{\sqrt{13}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{13}}{3}\right)$$

$$\therefore \quad \sec\theta \cdot \csc\theta = -\frac{13}{6}$$

**PROBLEMA 10** Del gráfico mostrado si: $\cos\theta = -1/3$
Calcule: "sen $\alpha$"




**Resolución:**




Del gráfico: $\alpha - \theta = 270° \Rightarrow \alpha = 270° + \theta$

Luego: $\text{sen}\alpha = \text{sen}\,(270° + \theta) = -\cos\theta$

Usando dato: $\text{sen}\,\alpha = -\left(-\frac{1}{3}\right)$

$$\therefore \quad \text{sen}\,\alpha = \frac{1}{3}$$

team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 11** Simplifique:

$$E=\frac{\operatorname{sen}(-120^\circ)-\cos 210^\circ+\sec 300^\circ}{\tan(-135^\circ)+\sec(-225^\circ)+\sec(-315^\circ)}$$

**Resolución:** Calculando cada término:

* $\operatorname{sen}(-120^\circ)=-\operatorname{sen}120^\circ=-\operatorname{sen}(\underbrace{180^\circ-60^\circ}_{\text{II C}})=-(+\operatorname{sen}60^\circ)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

* $\cos 210^\circ=\cos(\underbrace{180^\circ+30^\circ}_{\text{III C}})=-\cos 30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

- $\sec 300^\circ=\sec(\underbrace{360^\circ-60^\circ}_{\text{IV C}})=+\sec 60^\circ=2$

- $\tan(-135^\circ)=-\tan 135^\circ=-\tan(\underbrace{180^\circ-45^\circ}_{\text{II C}})=-(-\tan 45^\circ)=1$

- $\sec(-225^\circ)=\sec 225^\circ=\sec(\underbrace{180^\circ+45^\circ}_{\text{III C}})=-\sec 45^\circ=-\sqrt{2}$

- $\sec(-315^\circ)=\sec 315^\circ=\sec(\underbrace{360^\circ-45^\circ}_{\text{IVC}})=+\sec 45^\circ=\sqrt{2}$

Reemplazando:

$$E=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2}{1+(-\sqrt{2})+\sqrt{2}}=\frac{2}{1}$$

$\therefore\ E=2$

**PROBLEMA 12** Sabiendo que: $\operatorname{sen}40^\circ=k$. ¿A qué es igual:

$$W=\frac{\operatorname{sen}140^\circ.\cos 130^\circ.\tan 230^\circ}{\cot 220^\circ.\sec 410^\circ.\csc 320^\circ}\ ?$$

**Resolución:** Reduciendo:

- $\operatorname{sen}140^\circ=\operatorname{sen}(\underbrace{180^\circ-40^\circ}_{\text{II C}})=+\operatorname{sen}40^\circ$

- $\cos 130^\circ=\cos(\underbrace{90^\circ+40^\circ}_{\text{II C}})=-\operatorname{sen}40^\circ$

- $\tan 230° = \tan(\underbrace{270° - 40°}_{\text{III C}}) = +\cot 40°$

- $\cot 220° = \cot(\underbrace{180° + 40°}_{\text{III C}}) = +\cot 40°$

- $\sec 410° = \sec(360° + 50°) = \sec 50° = \csc 40°$

- $\csc 320° = \csc(\underbrace{360° - 40°}_{\text{IV C}}) = -\csc 40°$

Reemplazando en W:

$$W = \frac{(\text{sen}40°)(-\text{sen }40°)\ (\cot 40°)}{(\cot 40°)(\csc 40°)(-\csc 40°)}$$

$$W = \frac{\text{sen}^2 40°}{\csc^2 40°} = \text{sen}^4\, 40°$$

$$\therefore \quad W = k^4$$

**PROBLEMA 13** Simplifique:

$$M = \frac{\text{sen}(x - 180°)\tan(x - 540°)}{\cos(x - 270°)\cot(x - 90°)}$$

**Resolución:** Reduciendo aplicando CASO III:

- $\text{sen}(x - 180°) = -\text{sen}(\underbrace{180° - x}_{\text{IIC}}) = -(+\text{sen}\, x) = -\text{sen}\, x$

- $\tan(x - 540°) = -\tan(540° - x) = -\tan(360° + 180° - x)$
  $= -\tan(\underbrace{180° - x}_{\text{IIC}}) = -(-\tan x) = \tan x$

- $\cos(x - 270°) = \cos(\underbrace{270° - x}_{\text{IIIC}}) = -\text{sen}\, x$

- $\cot(x - 90°) = -\cot(90° - x) = -\tan x$

En M: $$M = \frac{(-\text{sen}\, x)(\tan x)}{(-\text{sen}\, x)(-\tan x)}$$

$$\therefore \quad M = -1$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 14** Simplifique:

$$E = \frac{\operatorname{sen}(405^\circ + \theta) \cdot \tan(230^\circ + \theta) \cdot \operatorname{sen}(392^\circ + \theta)}{\cot(400^\circ - \theta) \cdot \cos(778^\circ - \theta) \cdot \operatorname{sen}(495^\circ - \theta)}$$

**Resolución:** Reduciendo:

- $\operatorname{sen}(405^\circ + \theta) = \operatorname{sen}(360^\circ + 45^\circ + \theta) = \operatorname{sen}(45^\circ + \theta)$
- $\tan(230^\circ + \theta) = \tan(180^\circ + 50^\circ + \theta) = \tan(50^\circ + \theta)$
- $\operatorname{sen}(392) + \theta) = \operatorname{sen}(360^\circ + 32^\circ + \theta) = \operatorname{sen}(32^\circ + \theta)$
- $\cot(400^\circ - \theta) = \cot(360^\circ + 40^\circ - \theta) = \cot(40^\circ - \theta) = \tan(50^\circ + \theta)$
- $\cos(778^\circ - \theta) = \cos(720^\circ + 58^\circ - \theta) = \cos(58^\circ - \theta) = \operatorname{sen}(32^\circ + \theta)$
- $\operatorname{sen}(495^\circ - \theta) = \operatorname{sen}(360^\circ + 135^\circ - \theta) = \operatorname{sen}(135^\circ - \theta) = \operatorname{sen}(45^\circ + \theta)$

ReemplazandoenE:

$$E = \frac{\operatorname{sen}(45^\circ + \theta) \cdot \tan(50^\circ + \theta) \cdot \operatorname{sen}(32^\circ + \theta)}{\tan(50^\circ + \theta) \cdot \operatorname{sen}(32^\circ + \theta) \cdot \operatorname{sen}(45^\circ + \theta)}$$

$$\therefore \mathbf{E = 1}$$

**PROBLEMA 15** Si: $\cos 2\,650^\circ = m$

Hallar: $\operatorname{sen} 6\,350^\circ$

**Resolución:**

* $\cos 2\,650^\circ = \cos(7 \times 360^\circ + 130^\circ) = \cos 130^\circ$

$= \cos(180^\circ - 50^\circ) = -\cos 50^\circ$

$\cos 50^\circ = -m$ .....(1)

* $\operatorname{sen} 6\,350^\circ = \operatorname{sen}(17 \times 360^\circ + 230^\circ) = \operatorname{sen} 230^\circ$

$= \operatorname{sen}(180^\circ + 50^\circ) = -\operatorname{sen} 50^\circ$

$\operatorname{sen} 6\,350^\circ = -\operatorname{sen} 50^\circ$ .....(2)

Usando la identidad:

$$\operatorname{sen}^2 50^\circ + \cos^2 50^\circ = 1$$

$$\operatorname{sen} 50^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 50^\circ} \quad \text{.....(*)}$$

(1) en (*): $\operatorname{sen} 50^\circ = \sqrt{1 - m^2}$

En(2):

$$\therefore \quad \mathbf{\operatorname{sen} 6\,350^\circ = -\sqrt{1 - m^2}}$$

**PROBLEMA 16** Si:

$$\sum_{n=1}^{5} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)=\sum_{n-1}^{5} \cos\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)$$

Calcule:

$$W=\sum_{n=1}^{5} \tan\left[(n+1)\frac{\pi}{2}+x\right]$$

**Resolución:** Operando en la forma particular en cada caso la sumatoria y reduciendo al IC:

$$\sum_{n=1}^{5} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\operatorname{sen}(\pi+x)+\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\operatorname{sen}(2\pi+x)+\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)$$

$$= \cos x - \operatorname{sen} x - \cos x + \operatorname{sen} x + \cos x$$

$$= \cos x$$

$$\sum_{n=1}^{5} \cos\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos(\pi+x)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\cos(2\pi+x)+\cos\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)$$

$$= -\operatorname{sen} x - \cos x + \operatorname{sen} x + \cos x - \operatorname{sen} x$$

$$= -\operatorname{sen} x$$

Reemplazando:

$$\cos x = -\operatorname{sen} x \Rightarrow \tan x = -1$$

Piden : $W=\sum_{n=1}^{5} \tan\left((n+1)\frac{\pi}{2}+x\right)$

$$W=\tan(\pi+x)+\tan\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\tan(2\pi+x)+\tan\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)+\tan(3\pi+x)$$

$$W=\tan x-\cot x+\tan x-\cot x+\tan x$$

$$W=3\tan x-2\cot x$$

Reemplazando:

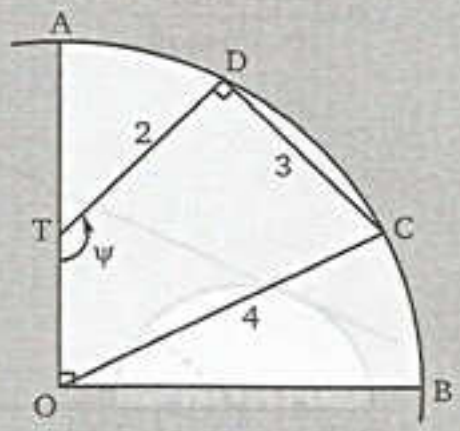
$$\tan x=-1 \ \wedge \ \cot x=-1$$

En : $W=3(-1)-2(-1)$

$\therefore$ **W = −1**

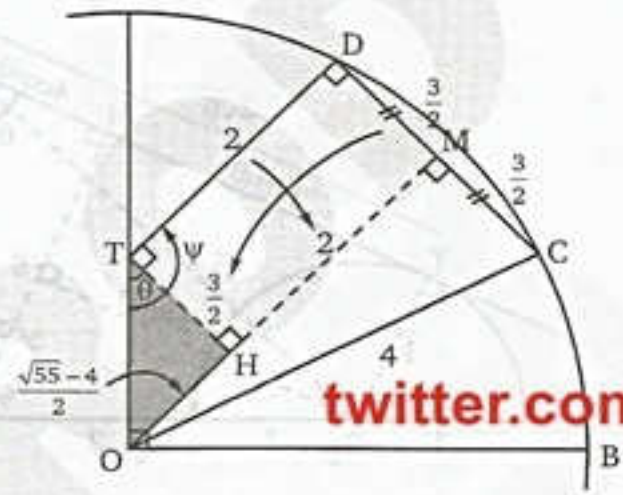
team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 17** Del gráfico calcule: $W = 3\cot\psi + \sqrt{55}$
Si: OA = OB




**Resolución:** Haciendo los trazos respectivos para formar triángulos rectángulos:

* $OM \perp DC \Rightarrow DM = MC$
* Del punto $T \perp OM$, se observa que: $TH = DM$




twitter.com/calapenshko

Del gráfico por el Teorema de Pitágoras en el $\triangle_{OMC}$:

$$OM = \sqrt{4^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{55}}{2}$$

Entonces: $OH = \dfrac{\sqrt{55}-4}{2}$

Se observa: $\psi = \theta + 90° \rightarrow \cot\psi = -\tan\theta$

Del $\triangle_{THO}$: $\cot\psi = -\left(\dfrac{\sqrt{55}-4}{3}\right)$

Reemplazando y operando en lo pedido se obtiene:

$$W = 3\left[-\left(\frac{\sqrt{55}-4}{3}\right)\right] + \sqrt{55}$$

$\therefore$ **W = 4**

**A todo el público en general:**

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

**Este libro no debe ser prostituito monetariamente**, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

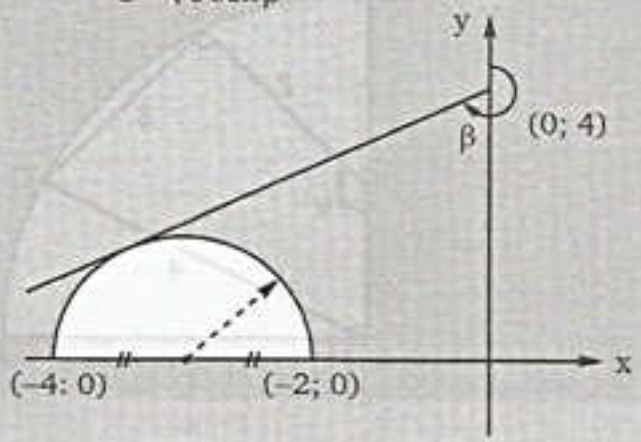
No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

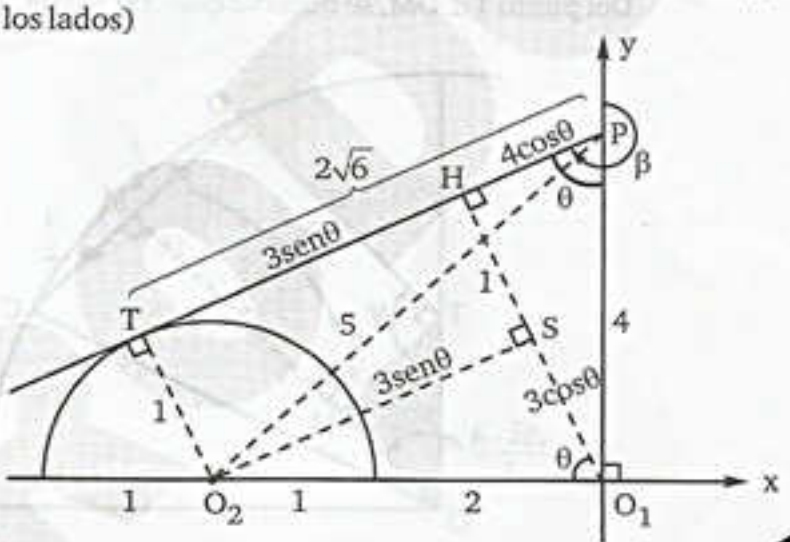
**28 de agosto del 2020**

**PROBLEMA 18** Del gráfico calcule:

$$P = \frac{1-\cos\beta}{1-\sqrt{6}\,\operatorname{sen}\beta}$$




**Resolución:** Haciendo trazos auxiliares para luego formar triángulos rectángulos. (Hallando el valor de los lados)




Sea : $\angle HPO_1 = \theta$

- Del $\triangle O_1HP$: $1 + 3\cos\theta = 4\operatorname{sen}\theta$

  $4\operatorname{sen}\theta - 3\cos\theta = 1$ .....(1)

- Del $\triangle O_2TP$: $3\operatorname{sen}\theta + 4\cos\theta = 2\sqrt{6}$ .....(2)

Multiplicando a : $(2)\times\operatorname{sen}\theta \rightarrow 3\operatorname{sen}^2\theta + 4\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 2\sqrt{6}\operatorname{sen}\theta$.....(3)

$(1)\times\cos\theta \rightarrow 4\operatorname{sen}\theta\cos\theta - 3\cos^2\theta = \cos\theta$ .....(4)

(3) – (4): $3\operatorname{sen}^2\theta + 3\cos^2\theta = 2\sqrt{6}\operatorname{sen}\theta - \cos\theta$

Usando Id. Pitagórica : $3 = 2\sqrt{6}\operatorname{sen}\theta - \cos\theta$ .....(5)

Pero : $-\beta = \theta + 180° \rightarrow \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\theta$

$\cos\beta = -\cos\theta$

team CALAPENSHKO


Reemplazando en (5): $3 = 2\sqrt{6}\,\text{sen}\beta + \cos\beta$

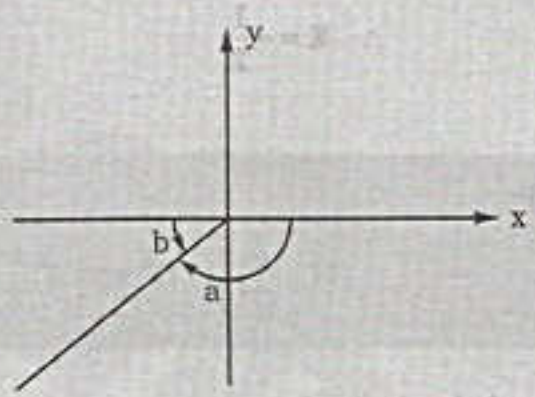
$2+1 = 2\sqrt{6}\,\text{sen}\beta + \cos\beta$

Operando: $1-\cos\beta = -2(1-\sqrt{6}\,\text{sen}\beta)$

Luego: $P = \dfrac{1-\cos\beta}{1-\sqrt{6}\,\text{sen}\beta} = -2$

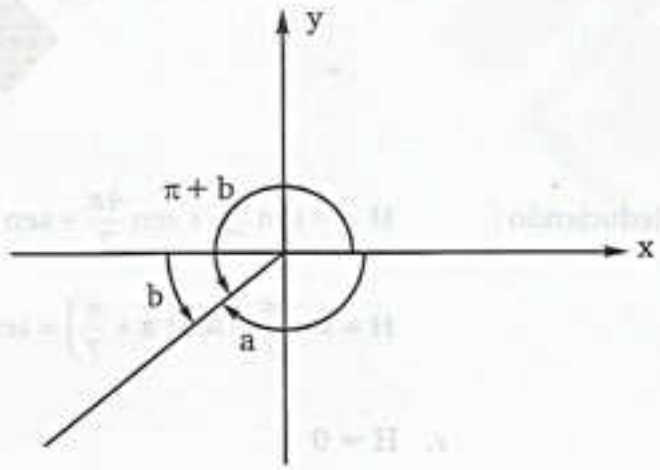
$\therefore\ \mathbf{P = -2}$

**PROBLEMA 19** Del gráfico:




Determine: $K = \dfrac{3\,\text{sen}\left(\dfrac{a-b}{3}\right) + \text{sen}\,a + \text{sen}\,b}{6\cos\left(\dfrac{a-b}{6}\right) + \cos a + \cos b}$

**Resolución:**




Del gráfico se nota que:

* $b - a = \pi$ rad .....(1)

* Además los ángulos $(\pi + b)$ y a son coterminales y se cumple que:

$$\boxed{Rt(\pi + b) = Rt(a)}$$

team CALAPENSHKO


Podemos deducir; que:

i) $a - b = -\pi$

ii) $\operatorname{sen} a = \operatorname{sen}(\pi + b) = -\operatorname{sen} b$

iii) $\cos a = \cos(\pi + b) = -\cos b$

Entonces reemplazando en "K":

$$K = \frac{3\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} b}{6\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \cos b + \cos b} = \frac{-3\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}{6\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{-3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$\therefore \quad \mathbf{K = -\frac{1}{2}}$$

**PROBLEMA 20** Calcule:

$$H = \sum_{k=1}^{6}\left\{(-1)^k \operatorname{sen}\left(2^k \frac{\pi}{7}\right)\right\}$$

**Resolución:** Aplicando la sumatoria:

$$H = -\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7} + \operatorname{sen}\frac{4\pi}{7} - \operatorname{sen}\frac{8\pi}{7} + \operatorname{sen}\frac{16\pi}{7} - \operatorname{sen}\frac{32\pi}{7} + \operatorname{sen}\frac{64\pi}{7}$$

$$H = -\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7} + \operatorname{sen}\frac{4\pi}{7} - \operatorname{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right) + \operatorname{sen}\left(2\pi + \frac{2\pi}{7}\right) -$$

$$-\operatorname{sen}\left(4\pi + \frac{4\pi}{7}\right) + \operatorname{sen}\left(8\pi + \frac{8\pi}{7}\right)$$

Reduciendo : $H = -\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7} + \operatorname{sen}\frac{4\pi}{7} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{7} + \operatorname{sen}\frac{2\pi}{7} - \operatorname{sen}\frac{4\pi}{7} + \operatorname{sen}\frac{8\pi}{7}$

$$H = \operatorname{sen}\frac{\pi}{7} + \operatorname{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{7} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{7}$$

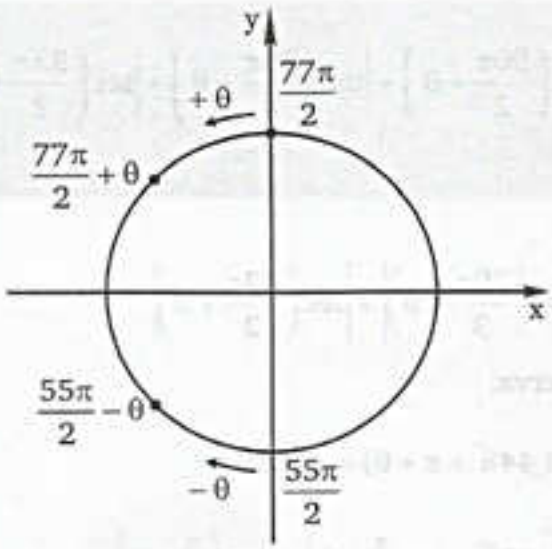
$$\therefore \quad \mathbf{H = 0}$$

**PROBLEMA 21** Si : $K.\operatorname{sen}\left(\frac{55\pi}{2} - \theta\right).\cos\left(\frac{77\pi}{2} + \theta\right) = \frac{1}{2}$

Exprese: $M = (\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2$ en términos de k.

team CALAPENSHKO


**Resolución:**




- $\operatorname{sen}\left(\frac{55\pi}{2}-\theta\right)=-\cos\theta$
- $\cos\left(\frac{77\pi}{2}+\theta\right)=-\operatorname{sen}\theta$

De la condición tenemos: $K(-\cos\theta)(-\operatorname{sen}\theta)=\frac{1}{2}$

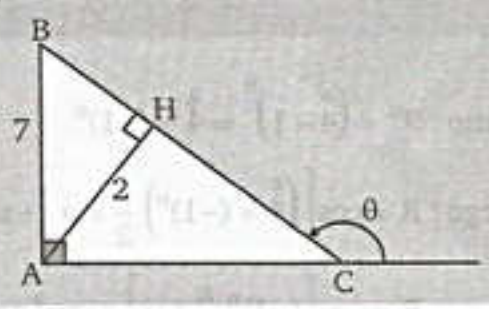
$$\operatorname{sen}\theta\cos\theta=\frac{1}{2K} \quad .....(1)$$

Se pide: $M=\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta+2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$ ..... (1)

(1) en (2): $M=1+2\left(\frac{1}{2k}\right)$

$$\therefore\ \mathbf{M=\frac{K+1}{K}}$$

**PROBLEMA 22** De la figura mostrada, calcule el valor de tan θ.




**Resolución:** En el gráfico, introducimos el ángulo auxiliar de valor "α", sabemos que: $\alpha+\theta=180^\circ$

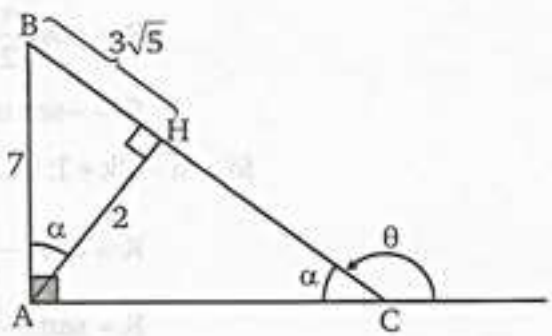
En el $\triangle_{BAH}$; calculamos BH; así:

$BH=\sqrt{7^2-2^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

Por propiedad; si $\alpha+\theta=180^\circ$

$\Rightarrow \tan\theta=-\tan\alpha$

$$\therefore\ \mathbf{\tan\theta=-\frac{3\sqrt{5}}{2}}$$



team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 23** Simplifique: $E = \left|\text{sen}\left(\frac{90\pi}{2}+\theta\right)\right| + \left|\tan\left(\frac{70\pi}{3}+\theta\right)\right| + \left|\sec\left(\frac{33\pi}{2}+\theta\right)\right|$

si : $\theta = 330°$

**Resolución:**

$$E = \left|\text{sen}\left(\frac{90\pi}{2}+\theta\right)\right| + \left|\tan\left(\frac{70\pi}{3}+\theta\right)\right| + \left|\sec\left(\frac{33\pi}{2}+\theta\right)\right|$$

Para cada caso se observa:

* $\text{sen}\left(\frac{90\pi}{2}+\theta\right) = \text{sen}(\cancel{44\pi} + \pi + \theta) = -\text{sen}\,\theta$

* $\tan\left(\frac{70\pi}{3}+\theta\right) = \tan\left(\cancel{22\pi} + \pi + \frac{\pi}{3} + \theta\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)$

* $\sec\left(\frac{33\pi}{2}+\theta\right) = \sec\left(\cancel{16\pi} + \frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\csc\theta$

Reemplazando para $\theta = 330°$

$$E = |\underbrace{-\text{sen}\,330°}_{-\frac{1}{2}}| + |\underbrace{\tan 390°}_{\frac{\sqrt{3}}{3}}| + |\underbrace{-\csc 330°}_{-2}|$$

$$\therefore\ E = \frac{15+2\sqrt{3}}{6}$$

**PROBLEMA 24** Simplifique: $R = \cos\left(\frac{7^n\pi}{2}+\alpha\right) + \text{sen}(n\pi+\alpha)\ ;\quad n \in \mathbb{N}$

**Resolución:**

Como : $7^n = \left(\overset{\circ}{4}-1\right)^n = \overset{\circ}{4} + (-1)^n$

Luego : $R = \cos\left[\left(\overset{\circ}{4} + (-1)^n\right)\frac{\pi}{2} + \alpha\right] + \text{sen}(n\pi+\alpha)$

$$R = \cos\left[(-1)^n\frac{\pi}{2} + \alpha\right] + \text{sen}(n\pi+\alpha)$$

Si : $n = 2k;\ k \in \mathbb{N}$

$$R = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + \text{sen}(2k\pi+\alpha)$$

$$R = -\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\alpha \Rightarrow R = 0$$

Si : $n = 2k+1;\ k \in \mathbb{N}$

$$R = \cos\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + \text{sen}(2k\pi+\pi+\alpha)$$

$$R = \text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\alpha \Rightarrow \mathbf{R = 0}$$

team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 25** Si se cumple que:

$$\frac{\operatorname{sen}\left[(4k+5)\frac{\pi}{2}-\alpha\right].\cos[(2k+1)\pi+\alpha]}{\operatorname{sen}[23\pi+\alpha].\tan\left[\frac{17\pi}{2}+\alpha\right]}=-\frac{2}{3}$$

Calcule: $3\operatorname{sen}\alpha$, si $\alpha \in$ IV C; $k \in \mathbb{Z}$.

**Resolución:**

* $\operatorname{sen}\left[(4k+5)\frac{\pi}{2}-\alpha\right]=\cos\alpha$

* $\cos[(2k+1)\pi+\alpha] = -\cos\alpha$

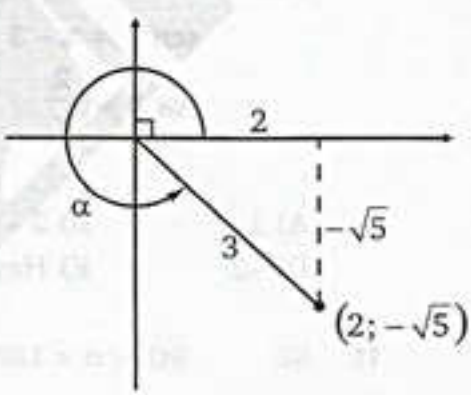
* $\operatorname{sen}(23\pi+\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$

* $\tan\left(\frac{17\pi}{2}+\alpha\right) = -\cot\alpha$

Reemplazando:

$$\frac{(\cos\alpha)(-\cos\alpha)}{(-\operatorname{sen}\alpha)\left(-\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\right)}=-\frac{2}{3} \Rightarrow -\cos\alpha=-\frac{2}{3} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{2}{3}$$

Graficando: (Para un determinado $\alpha$)




Luego; del gráfico:

$$\operatorname{sen}\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\therefore\ 3\operatorname{sen}\alpha=-\sqrt{5}$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS

**1.** Si: $\operatorname{sen} 25° = 0{,}3$

Halle el valor de:

$$K = \operatorname{sen} 205° \cdot \cos 115°$$

A) 0,3 B) 0,9 C) –0,3
D) 0,09 E) –0,09

**2.** Halle la medida del ángulo agudo "x", si cumple:

$$\frac{\operatorname{sen}(180° + x) - \cos(270° + x)}{\tan 300°} = 1$$

A) 15° B) 30° C) 37°
D) 60° E) 75°

**3.** Simplifique la expresión:

$$M = \frac{\tan(230° + x) + \tan(50° + x)}{\cot(40° - x)}$$

A) 1 B) 2 C) -1
D) tan x E) cot x

**4.** Reduzca:

$$Q = \frac{\operatorname{sen}179° + \operatorname{sen}173° + \operatorname{sen}167° + \operatorname{sen}161°}{\cos 109° + \cos 103° + \cos 97° + \cos 91°}$$

A) 1 B) –1 C) D
D) 2 E) –2

**5.** Halle el valor de:

$$R = \tan 2925° - \sec 4440° + 3\csc 397°$$

A) –2 B) –1 C) 1
D) 5 E) 8

**6.** Indique el equivalente de:

$$\frac{\operatorname{sen}(-200°) + \operatorname{sen}(-340°)}{\cos(-520°) + \operatorname{sen}(290°)}$$

A) tan 20° B) cot 170° C) cot 100°
D) cot 200° E) tan 160°

**7.** Reduzca:

$$F = \tan^3 20° + \tan^3 40° + \tan^3 60° + \ldots + \tan^3 180°$$

A) –1 B) 1 C) 0
D) $\tan^3 20°$ E) $-\tan^3 20°$

**8.** En un triángulo ABC reduzca:

$$M = \frac{\tan(3A + 4B + 3C)}{\tan(A + C)} + \operatorname{sen} A \cdot \csc(B + C)$$

A) –2 B) –1 C) 0
D) 1 E) 2

**9.** Si A y B son las medidas de ángulos revolucionarios. Halle:

$$M = \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B - \cos A \cdot \cos B$$

A) –1 B) 1 C) 0
D) 0,5 E) 2

**10.** Si:

$$A - B = 270°$$

Halle el valor de "x" que cumplen:

$$\operatorname{sen} A = x - 3 \quad \ldots\ldots (i)$$

$$\cos B = \frac{2}{x} \quad \ldots\ldots (ii)$$

A) 1 B) 2 C) –1
D) –2 E) Hay dos respuestas

**11.** Si: $90° < \alpha < 180° < \beta < 270°$

Además:

$$\cos \alpha = -\operatorname{sen} 20° ; \ \tan \beta = \cot 20°$$

Halle: $\beta - \alpha$

A) 120° B) 130° C) 140°
D) 150° E) 160°

team CALAPENSHKO



**12.** De las siguientes proposiciones, determine las verdaderas.

I. Si: $x + y = \pi \Rightarrow \cos x = -\cos y$

II. Si: $x - y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan x \tan y = 1$

III. Si: $x + y = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} x \sec y = -1$

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y III E) Todas

**13.** Si:

$$m\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\tan\frac{3\pi}{4}$$

Luego el equivalente: "$\sec\theta \cdot \csc\theta$" es:

A) m B) 2m C) $-m$
D) $m^2$ E) $m^{-1}$

**14.** Halle:

$$K=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$$

A) $-2$ B) $-1$ C) 0
D) 1 E) 2

**15.** Halle:

$$M=\frac{\cos\frac{7\pi}{4}\cdot\tan\frac{5\pi}{4}\cdot\sec\frac{4\pi}{3}}{\cot\frac{11\pi}{6}\cdot\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}\cdot\csc\frac{7\pi}{6}}$$

A) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
D) $\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

**16.** ¿ Cuál de los siguientes valores de "$\theta$" cumple:

$$\cot\left(\frac{5\pi}{2}-\theta\right).\cot(5\pi-\theta)+\sec^2\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=3\ ?$$

A) $\frac{3\pi}{4}$ B) $\frac{7\pi}{4}$ C) $\frac{2\pi}{3}$
D) $\frac{11\pi}{12}$ E) $\frac{7\pi}{6}$

**17.** Si $\phi \in$ IIIC además:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{99\pi}{2}-\phi\right)=0{,}75$$

Halle el valor de:

$$P=\sqrt{7}\cot\phi+3\sec\phi$$

A) $-2$ B) $-1$ C) 0
D) 1 E) 2

**18.** Halle el menor valor de "x" en:

$$\operatorname{vers}\left(\frac{47\pi}{7}\right)+\operatorname{vers}\left(\frac{x\pi}{7}\right)=2\operatorname{vers}\left(\frac{7\pi}{2}\right)$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

**19.** Si:

$$f(x)=\frac{\operatorname{sen}(\pi+x)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)}{x}+$$
$$+x\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sec(2\pi-x)$$

Resuelva: $[f(x)+\pi][f(x)-\pi]<0$

A) $\langle-\pi,\pi\rangle$ B) $\langle-2\pi;2\pi\rangle$
C) $[-\pi;\pi]$
D) $\langle-1;1\rangle$ E) $\langle-\pi;\pi\rangle-\{0\}$

**20.** Indicar verdadero (V) ó falso (F) a cada una de las siguientes proposiciones ($k \in \mathbb{Z}$)

( ) $\cos k\pi = (-1)^k$

( ) $\operatorname{sen} k\pi + \cos k\pi = 1$

( ) $\tan(k\pi+\alpha) = \tan\alpha$

( ) $\sec\left(k\pi+\frac{\pi}{2}+\beta\right)=(-1)^k\csc\beta$

A) VVVV B) VFVF C) FVFV
D) FFVV E) FFFF

**21.** Halle el valor de "$\theta$" $\left(\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi\right)$ que cumple:

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{49\pi}{2}-\theta\right).\csc\left(\frac{103\pi}{2}+\theta\right).\tan(501\pi+\theta)}{\sec\left(\theta-\frac{99\pi}{2}\right).\cos\left(\frac{39\pi}{2}+\theta\right).\tan(\theta-990\pi)}=\cot\left(\frac{143}{2}\right)^{\circ}$$

A) $\frac{7\pi}{4}$ B) $\frac{5\pi}{3}$ C) $\frac{13\pi}{7}$

D) $\frac{9\pi}{5}$ E) $\frac{11\pi}{6}$

**22.** Reduzca:

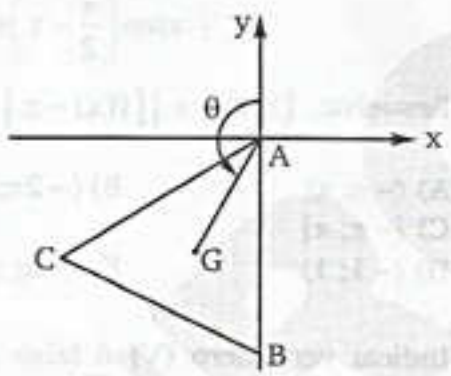
$$S = \operatorname{sen}^3(\pi+x) + \operatorname{sen}^3(2\pi+x) + \\ + \operatorname{sen}^3(3\pi+x) + \ldots + \operatorname{sen}^3(n\pi+x)$$

A) $\left[(-1)^n - 1\right]\operatorname{sen}^3 x$ B) $\operatorname{sen}^3 x$

C) $\frac{1}{2}\left[(-1)^n - 1\right]\operatorname{sen}^3 x$

D) $\frac{1}{2}\left[1-(-1)^n\right]\operatorname{sen}^3 x$ E) 0

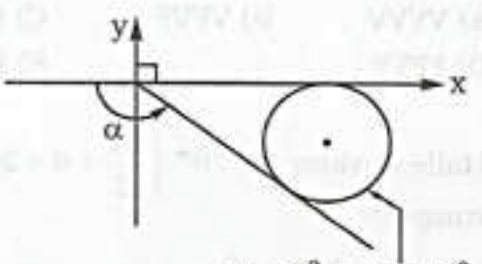
**23.** Del gráfico mostrado, si ABC es un triángulo equilátero y "G" su baricentro.
Halle: cos θ




A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $-\frac{1}{2}$

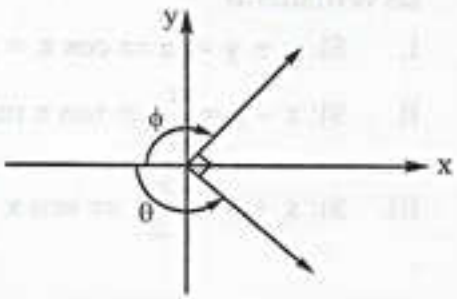
**24.** Del gráfico, Halle: sen α + cosα




$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 1$

A) 0,2 B) 0,3 C) –0,2
D) –0,3 E) –0,4

**25.** Del siguiente gráfico:

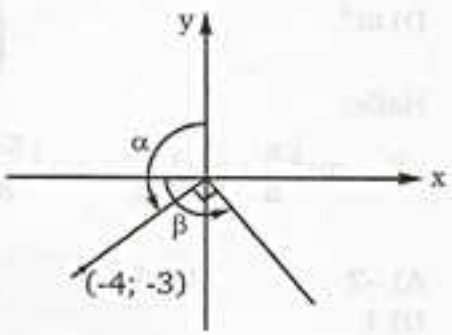



Halle:

$$M = \frac{\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^2\phi}{\tan\theta \,.\, \tan\phi} + \frac{\operatorname{sen}(\theta-\phi)}{\tan\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)}$$

A) –2 B) 2 C) –1
D) 1 E) 0

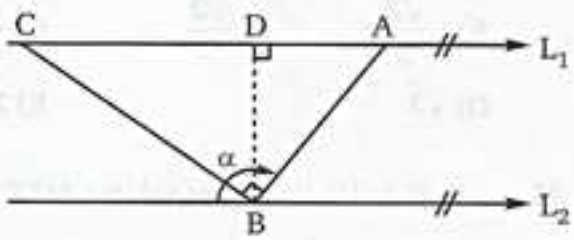
**26.** Del gráfico, halle; "cot α + tanβ"




A) $-\frac{12}{5}$ B) $-\frac{24}{5}$ C) $-\frac{25}{12}$

D) $-\frac{13}{5}$ E) $-\frac{8}{3}$

**27.** Del gráfico, determine "tan α", $L_1 // L_2$




Si: AD = m , CD = n

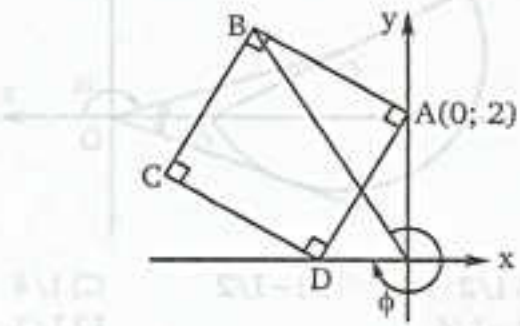
A) $\sqrt{\frac{m}{n}}$ B) $-\sqrt{\frac{m}{n}}$ C) $\sqrt{\frac{n}{m}}$

D) $-\sqrt{\frac{n}{m}}$ E) $\frac{n}{m}$

team CALAPENSHKO

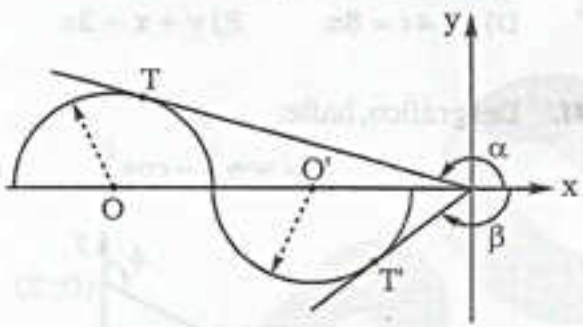


**28.** Si ABCD es un cuadrado cuya área es 5 $u^2$. Halle el valor de "cot $\phi$"




A) 0,333 B) 0,666 C) 0,888
D) –0,222 E) –0,777

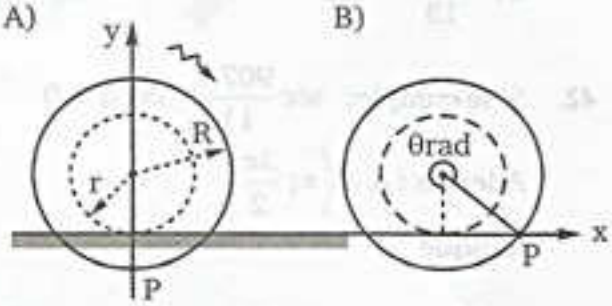
**29.** Siendo O y O' centros de las semicircunferencias de igual radio.
Halle: csc $\alpha$ + csc $\beta$




A) –2 B) –4 C) 2
D) 4 D) 3

**30.** Halle el valor del ángulo barrido ($\theta$ rad) por el carrete, cuando parte desde la posición A y llega a la posición B con el punto "P" al ras del suelo.

A) B)




A) arc sen (r/R ) B) 2 arc sen (r/R)
C) arc cos ( r/ R )
D) 2 arc cos (r/R) E) arc tan (r/R)

**31.** Si: $A = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{1115\pi}{2}\right)\cot\left(-\alpha - \frac{315\pi}{2}\right)}{\cos(\alpha + 111\pi)\,.\,\tan(\alpha + 222\pi)}$

$$B = \frac{\cos\left(\frac{27\pi}{2} - \alpha\right) + \tan\left(-\alpha - \frac{11\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}(\alpha + 11\pi) - \cot(-\alpha + 22\pi)}$$

Halle: A/B

A) 1 B) -1 C) 0
D) 2 E) -2

**32.** Si: $x + y + z = \dfrac{3\pi}{2}$. Reduzca:

$$W = \cos\left[\frac{\pi}{4} + \frac{y+z+3x}{2}\right].\sec\left[\frac{2y+2z-x}{3}\right]$$

$$R = \tan\left[\frac{x+4z+y}{3}\right].\tan\left[y + x + \frac{\pi}{2}\right]$$

Luego el valor de W – R es:

A) 1 B) –1 C) 0
D) 2 E) –2

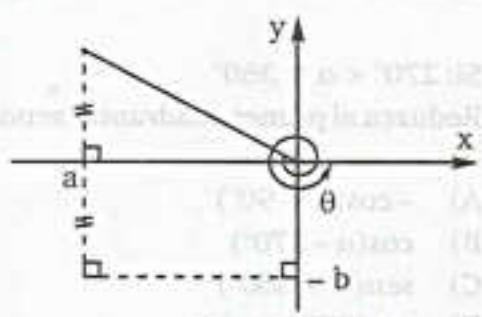
**33.** Siendo "$\alpha$" el valor de un ángulo positivo menor de una vuelta y del segundo cuadrante; y "$\beta$" es la medida de un ángulo positivo menor de una vuelta y del tercer cuadrante. Hallar el signo de las siguientes expresiones:

I) $\dfrac{\sec\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\operatorname{sen}(-\alpha)}$ II) $\dfrac{\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{3}\right)}{\csc\beta}$

III) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cot\beta}$

A) + ; – ; – B) – ; + ; + C) – ; – ; –
D) + ; + ; – E) + ; – ; +

**34.** Del gráfico, halle:
E = a sec$\theta$ + b csc$\theta$ + a tan$\theta$




A) a B) b C) – a
D) – b E) a/b

**35.** Sabiendo que:

$$\theta = (2k+1)\frac{\pi}{2} + \frac{35\pi}{3} \; ; \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = (4n+3)\frac{\pi}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{6} \; ; \; n \in \mathbb{Z}$$

Halle: $N = \tan\theta - \operatorname{sen}\alpha$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ C) $-\frac{\sqrt{3}}{6}$
D) $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ E) $-\frac{5\sqrt{3}}{6}$

**36.** Si: $x + y = (4k-1)\frac{\pi}{2} \; ; \; k \in \mathbb{Z}$

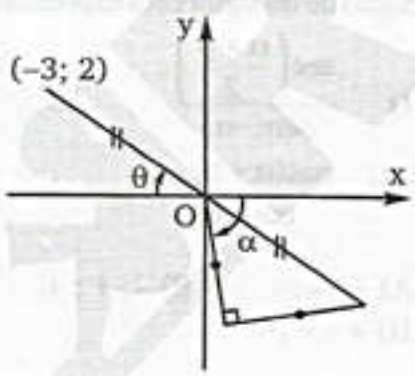
Además: $\cot x = \frac{a-2}{a+1}$ ; $\cot y = \frac{a-4}{a+3}$

Halle:

$$B = \frac{1 - \operatorname{sen} a\pi + \cos x}{1 - \cos\frac{\pi}{a} + \operatorname{sen} y}$$

A) 0 B) 1 C) $-1$
D) $-2$ E) 2

**37.** De la figura, calcule: $\cot\alpha + \cot\theta$




A) $-17/10$ B) $-19/5$ C) $-3/5$
D) $-4/5$ E) $-10/3$

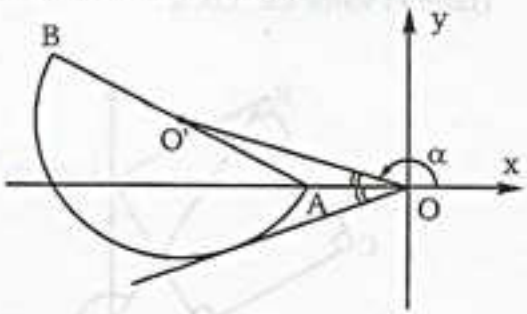
**38.** Si: $270° < \alpha < 360°$

Reduzca al primer cuadrante "$\operatorname{sen}\alpha$"

A) $-\cos(\alpha + 90°)$
B) $\cos(\alpha - 270°)$
C) $\operatorname{sen}(\alpha + 360°)$
D) $\cos(270° + \alpha)$
E) $\operatorname{sen}(90° + \alpha)$

**39.** De la figura, si: OA = O'A = O'B

Halle: $K = \operatorname{sen}2\alpha \cdot \cos\alpha$




A) 1/2 B) $-1/2$ C) 1/4
D) $-1/4$ E) 1/3

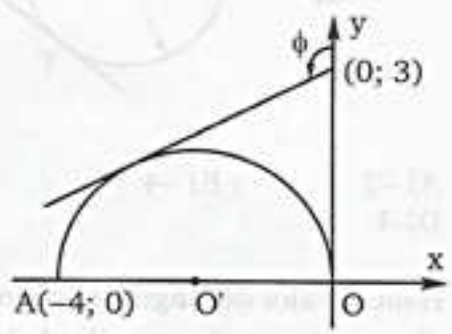
**40.** ¿Qué relación existe entre x e y sabiendo que:

$$\cot\left(\frac{6\pi + 3x - 2y}{4}\right) + \tan\left(\frac{2x - 3y}{8}\right) = 0 \; ?$$

A) $2y - 3x = \pi$ B) $2x + 3y = 4\pi$
C) $y + 3x = 6\pi$
D) $y - 4x = 8\pi$ E) $y + x = 3\pi$

**41.** Del gráfico, halle:

$$N = \operatorname{sen}\frac{\phi}{2} - \cos\frac{\phi}{2}$$




A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{\sqrt{13}}{13}$
D) $\frac{2\sqrt{13}}{13}$ E) $\frac{3\sqrt{13}}{13}$

**42.** Si se cumple: $\sec\frac{907\pi}{11} + \csc\alpha = 0$

Además: $\alpha \in \left\langle \pi; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$

Indique "$\alpha$"

A) $\frac{23\pi}{22}$ B) $\frac{12\pi}{11}$ C) $\frac{25\pi}{22}$
D) $\frac{13\pi}{11}$ E) $\frac{27\pi}{22}$

**A todo el público en general:**

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

**Este libro no debe ser prostituito monetariamente**, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

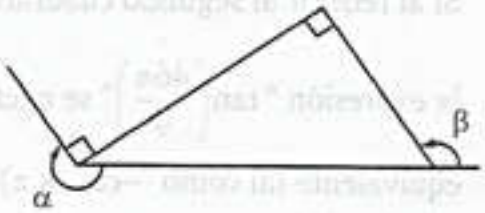
Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

**28 de agosto del 2020**

team CALAPENSHKO



**43.** De la figura adjunta:



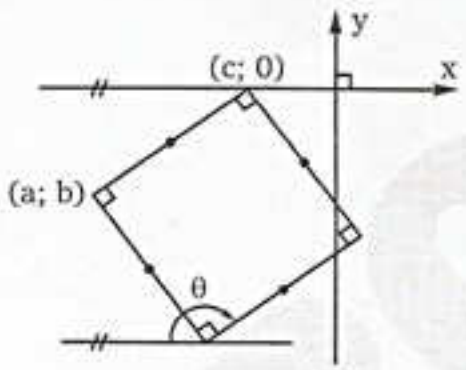

Halle:

$$M = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha + \cos(\alpha + 270°)}$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 1

D) $-1$ E) 2

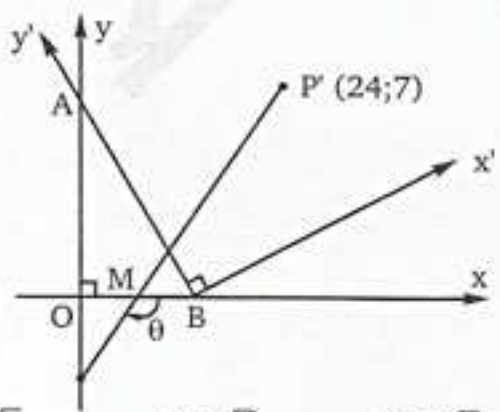
**44.** Del gráfico mostrado, halle el valor de "tanθ"




A) $\frac{b}{a-c}$ B) $\frac{a}{b-c}$ C) $\frac{c}{a-b}$

D) $\frac{b}{a+c}$ E) $\frac{a}{b+c}$

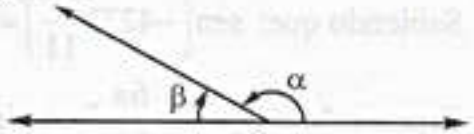
**45.** Del gráfico, hallar el valor de "cot θ" si se cumple: $OA = 4(OB) = 100\sqrt{3}$ ; $OM = MB$




A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$

D) $4\sqrt{3}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

**46.** Del gráfico:



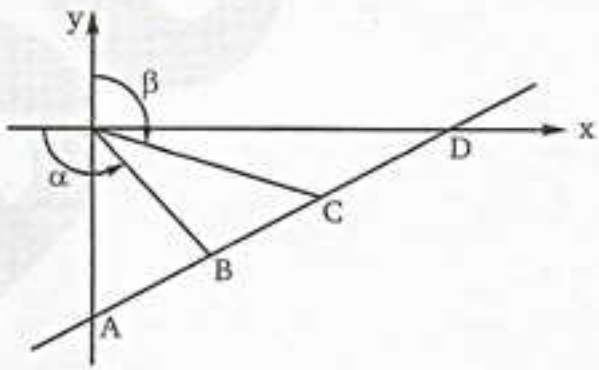

Reduzca:

$$M = \operatorname{sen}(2\alpha - \beta) - \cos\left(\frac{3\alpha - \beta}{2}\right) + \tan\left(\frac{\alpha - \beta}{3}\right)$$

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{5}$

D) $\sqrt{7}$ E) $\sqrt{11}$

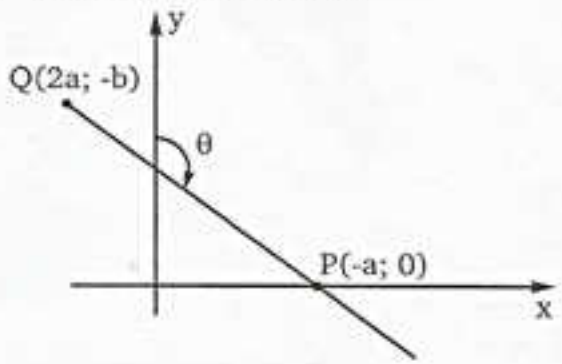
**47.** De la gráfica mostrada si: AB = BC = CD
Halle: cot α . cot β




A) $\frac{1}{4}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$

D) $-\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{2}$

**48.** Hallar el valor de "tanθ"




A) $\frac{a}{b}$ B) $-\frac{a}{b}$ C) $\frac{b}{a}$

D) $-\frac{b}{a}$ E) $\frac{b}{2a}$

team CALAPENSHKO



**49.** Sabiendo que: $\operatorname{sen}\left(-4273\frac{\pi}{11}\right) = m$

Exprese "$\cos\frac{\pi}{22} \cdot \tan\frac{6\pi}{11}$" en términos de "m"

A) $\frac{m^2}{\sqrt{1+m^2}}$ B) $\frac{-m^2}{\sqrt{1+m^2}}$ C) $\frac{m^2}{\sqrt{1-m^2}}$

D) $\frac{-m^2}{\sqrt{1-m^2}}$ E) $\frac{-m^2}{\sqrt{m^2-1}}$

**50.** Si al reducir al segundo cuadrante $\left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle$ la expresión "$\tan\left(\frac{46\pi}{9}\right)$" se encuentra un equivalente tal como "$-\cot(k\,\pi)$". Hallar el valor de k

A) $\frac{5}{18}$ B) $\frac{13}{18}$ C) $\frac{17}{18}$

D) $\frac{7}{18}$ E) $\frac{11}{18}$

CALAPENSHKO

team CALAPENSHKO

Capítulo 7

# Circunferencia Trigonométrica

**CAPACIDADES**

- Definir la circunferencia trigonométricas (C T)
- Ubicar arcos dirigidos (números reales) en posición normal en una C T
- Establecer representaciones trigonométricas en la C T
- Establecer y comparar los valores de cada razón trigonométrica.

## LA ASTRONOMÍA DE CLAUDIO PTOLOMEO

Su Sintaxis matemática (más conocida con el nombre árabe de Almagesto) sintetiza y ordena los conocimientos astronómicos de los griegos y, sobre todo, los de Hiparco. Tolomeo sabe que la Tierra es redonda y que la gravedad apunta hacia el centro de la Tierra; da dos métodos para determinar la oblicuidad de la eclíptica; calcula la altura del polo del mundo y la duración del día en diversos lugares del globo; da tablas de los ángulos y arcos que forman la intersección de la eclíptica con el meridiano y el horizonte.

Explica las irregularidades del movimiento aparente del Sol, mediante la hipótesis del movimiento a lo largo de una circunferencia excéntrica. Completa la teoría de la Luna, de Hiparco, y descubre la variación anual de la excentricidad de su órbita; para explicar el movimiento aparente de la Luna, usa la hipótesis del epiciclo.

Con el Almagesto culmina y termina la astronomía antigua, que, salvo detalles, fue conservada tal cual hasta fines del Renacimiento.

CLAUDIO PTOLOMEO
GENIO DE LA ANTIGÜEDAD

Tolomeo hace contribuciones capitales a la trigonometría plana y esférica que habla creado Hiparco. Emplea el sistema sexagesimal inventado por los babilónicos y calcula las cuerdas. Expone el teorema que lleva su nombre, relativo al cuadrilátero inscrito en una circunferencia; da la fórmula que relaciona la cuerda de un ángulo con la cuerda de su mitad, emplea un método de interpolación y, en general, hace casi toda la trigonometría que necesita para sus cálculos astronómicos, sin el auxilio de las funciones trigonométricas. Basándose en el análisis gráfico de las funciones continuas senoidales, lo cual es descrito después como la Circunferencia Unitaria o Goniométrica.

Resucita la geografía matemática creada por Eratóstenes y por Hiparco, que había sido olvidada en favor de la geografía descriptiva: en su Geografía describe minuciosamente la construcción de mapas según diferentes métodos de proyección. También se ocupó Tolomeo de la balanza, de acústica física y de óptica geométrica y fisiológica. En su Óptica estudió en particular los fenómenos de refracción, dando tablas de valores para diversos medios trasparentes; sostuvo que los rayos que llegan de las estrellas se refractan en el aire, por lo cual la dirección observada difiere de la real.

## INTRODUCCIÓN

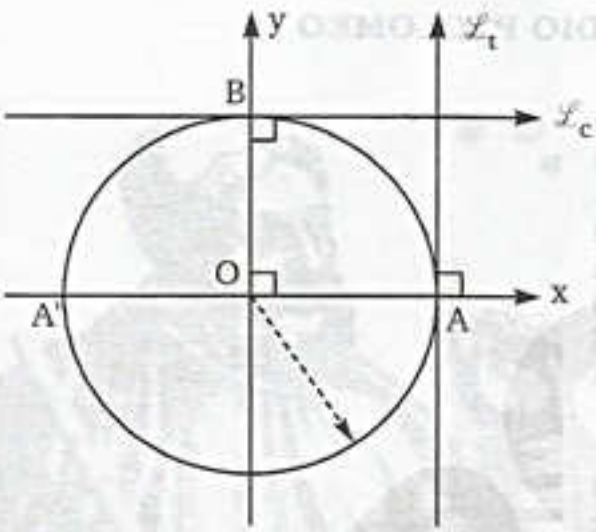
En capítulos anteriores, se han definido las razones para ángulos agudos y no agudos e incluso, hemos encontrado la relación, que tiene la razón ubicada en algún cuadrante u otro.

Ahora nuestro objetivo, es definir razones trigonométricas para números reales, a través de manera gráfica, encontrando las diversas relaciones que existen entre dichas funciones y sus posteriores aplicaciones en los diferentes ámbitos de la vida diaria.

# CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA

## DEFINICIÓN

Es aquella circunferencia inscrita en el plano cartesiano con centro en el origen y radio igual a la unidad.




**Ecuación de la C T:**

$$x^2 + y^2 = 1$$

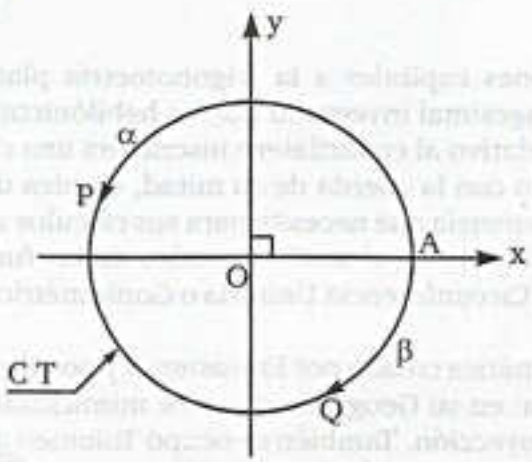
**Elementos de la C T:**

A(1; 0) : origen de arcos o tangentes
B(0; 1) : origen de complementos o cotangentes
A' (–1; 0) : origen de suplementos
O(0; 0) : origen de secantes y cosecantes
$\mathcal{L}_t$ : eje de tangentes
$\mathcal{L}_c$ : eje de cotangentes

## ARCOS DIRIGIDOS EN POSICIÓN NORMAL

Son aquellos arcos que se generan a partir del origen de arcos de una C T. Si el sentido del arco es antihorario el arco será positivo, en caso contrario será negativo.

El extremo de arco indicará el cuadrante al cual pertenece el arco, así por ejemplo.

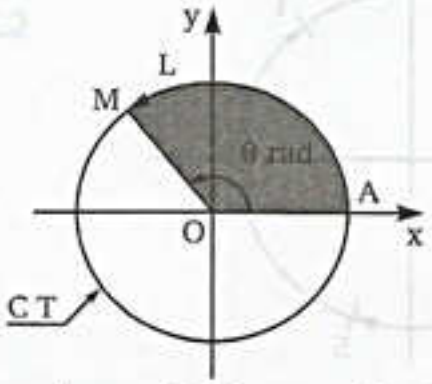



Del gráfico anterior P y Q son los puntos extremos de los arcos α y β respectivamente en posición normal. Luego α es un arco positivo que pertenece al IIC y β es un arco negativo que pertenece al IVC.

team CALAPENSHKO


## NÚMEROS REALES EN LA C T

En la figura siguiente se muestra un arco dirigido en posición normal "L" que subtiende un ángulo que mide "θ" rad.

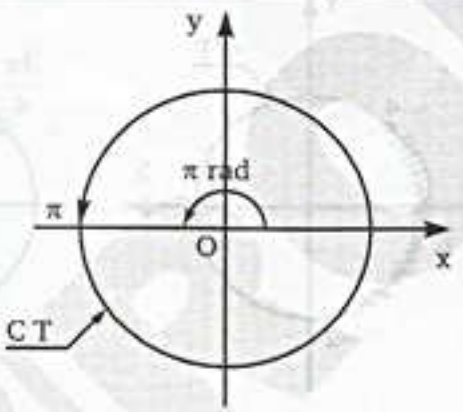


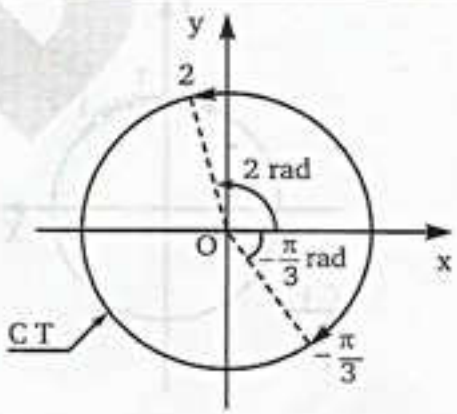

Por teoría de longitud de arco en el sector AOM se cumple: $L = \theta R$
Por ser una C T $\Rightarrow R = 1$
Finalmente $\therefore L = \theta$

### CONCLUSIÓN

En una C T, la longitud de arco es numéricamente igual, al valor que corresponde al ángulo en posición normal expresado en radianes.

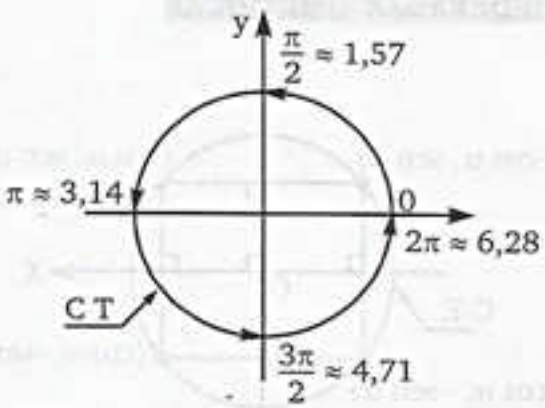
**Ejemplo**

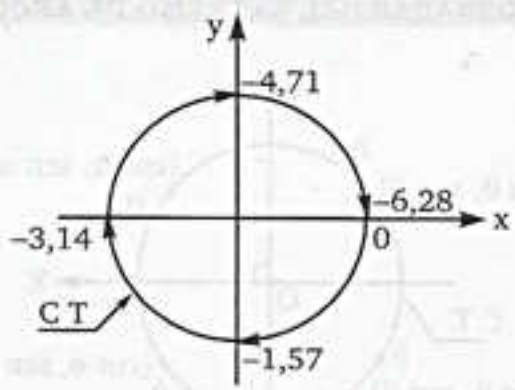


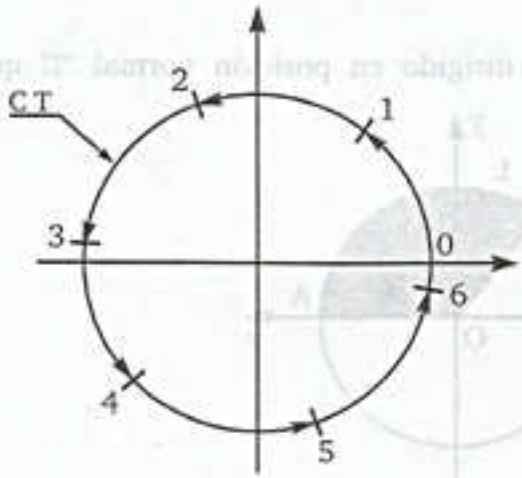

### OBSERVACIÓN

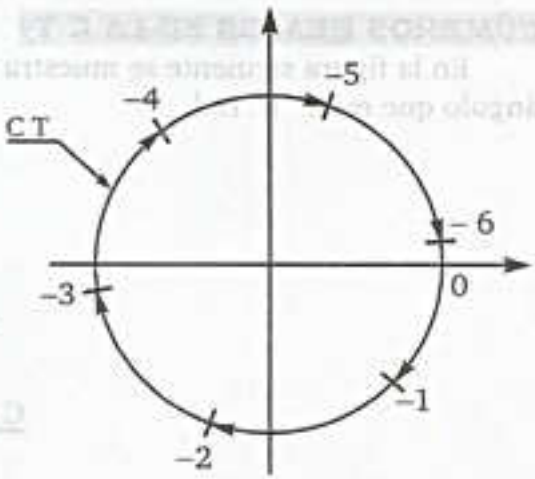
Los números $0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm 2\pi$ son bastante útiles para ubicar números reales en la circunferencia numérica.



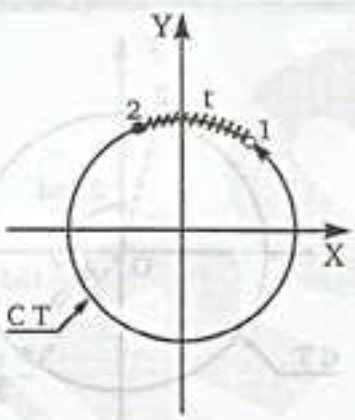
**Ejemplos:**

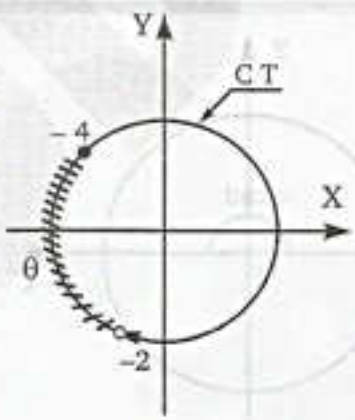


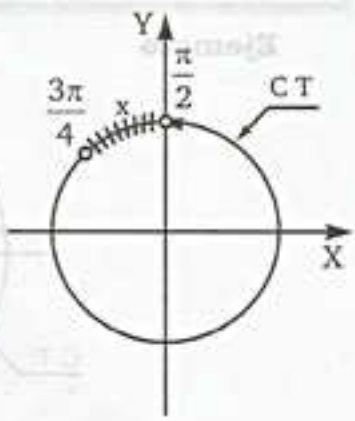




**EJERCICIOS:** Ubicar en la circunferencia numérica a los números reales t, θ y x tal que:

a) $t \in \langle 1; 2]$ b) $\theta \in [-4; -2\rangle$ c) $x \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4} \right\rangle$

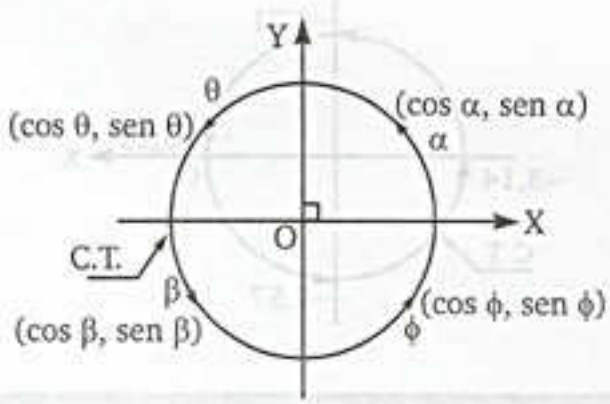


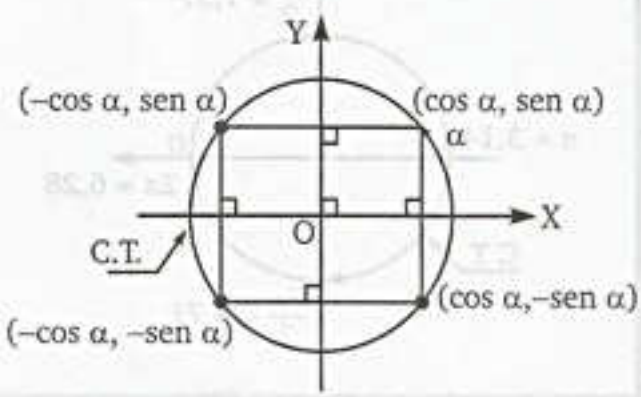




$1 < t \leq 2$ $-4 \leq \theta < -2$ $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$

**COORDENADAS DEL EXTREMO DE ARCO**

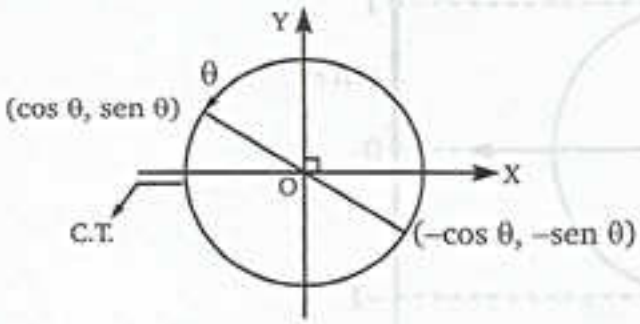



**COORDENADAS SIMÉTRICAS**

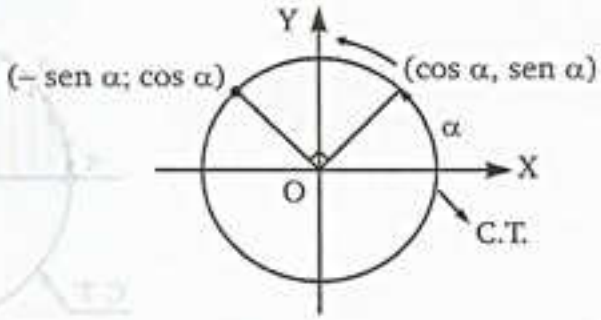


team CALAPENSHKO


**COORDENADAS OPUESTAS**




**También:**

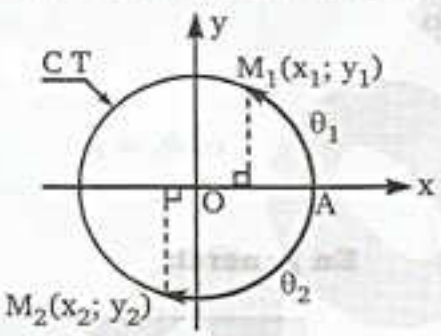



## REPRESENTACIÓN DE LAS LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS EN LA C T

A continuación los arcos ubicados en la C T están en posición normal y se usarán los segmentos dirigidos como representación.

### 1. SENO

El seno de un arco es la ordenada de su extremo.



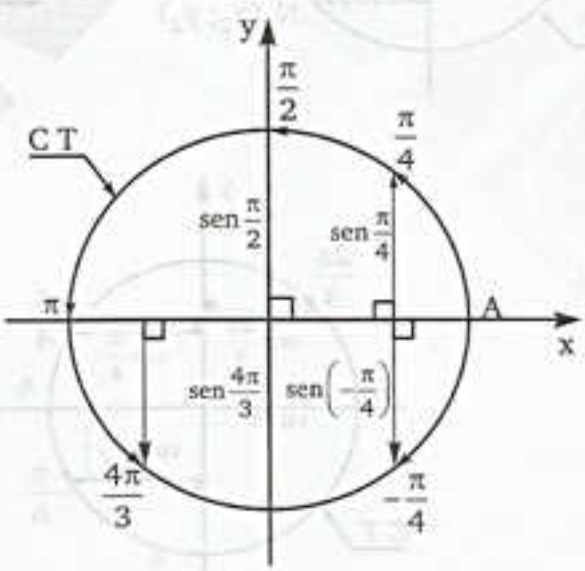

$\text{sen}\theta_1 = y_1$

$\text{sen}\theta_2 = y_2$

**En general:**

$$-1 \leq \text{sen}\theta \leq 1; \forall\, \theta \in \mathbb{R}$$

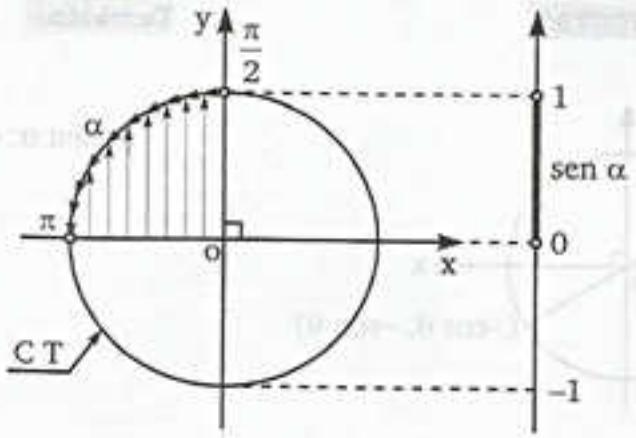
**Ejemplo:**




$\text{sen}\,\pi = 0$

**Ejercicio:** Si: $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, halle todos los valores de "$\text{sen}\,\alpha$"

**Resolución:** Ubicamos el intervalo de $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ en la C T, luego representaremos con segmentos dirigidos el seno de "α"



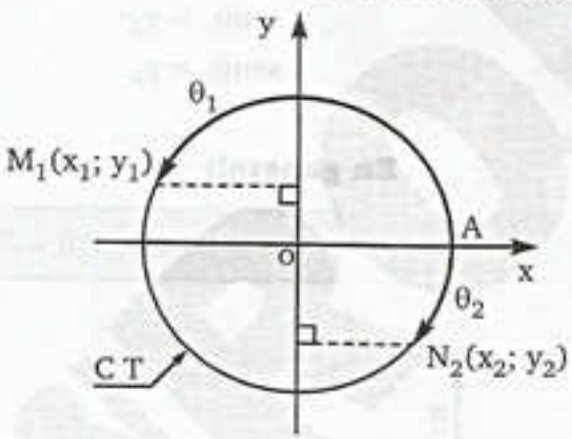

Se observa que las ordenadas son mayores a 0 y menores a 1, dicho intervalo se muestra en la recta numérica paralela al eje y

$$0 < \operatorname{sen}\alpha < 1$$

$$\therefore \quad \operatorname{sen}\alpha \in \langle 0; 1\rangle$$

## 2. COSENO

El coseno de un arco es la abscisa de su extremo.

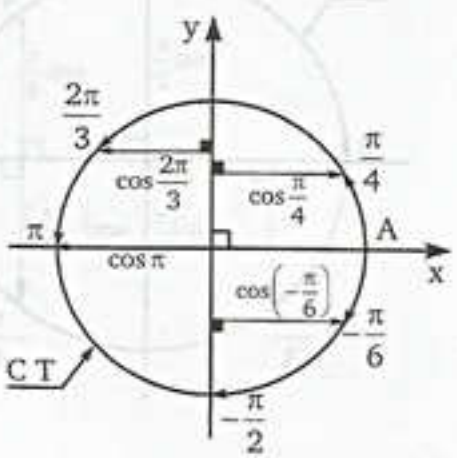



$\cos\theta_1 = x_1$
$\cos\theta_2 = x_2$

**En general:**

$$-1 \le \cos\theta \le 1; \ \forall\, \theta \in \mathbb{R}$$

**Ejemplo:**

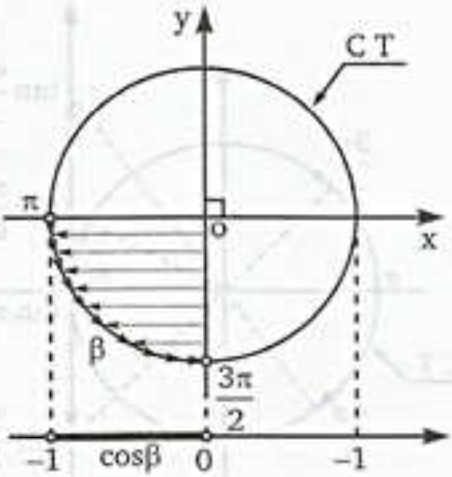



$$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

**Ejercicio:** Si : $\beta \in$ IIIC, halle todos los valores de "$\cos\beta$"

**Resolución:** Ubicamos el intervalo de para $\beta \in$ IIIC y representando los segmentos

team CALAPENSHKO

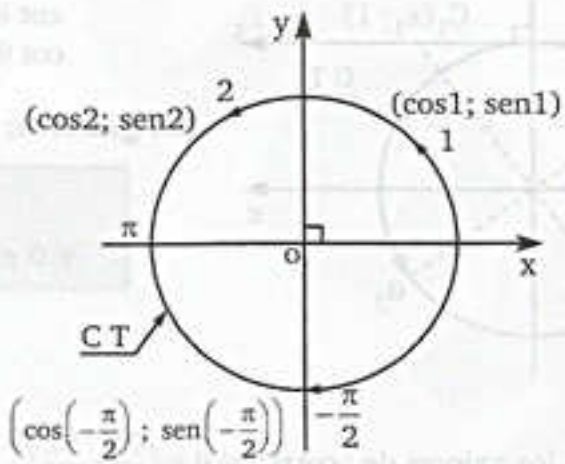

Se observa que las abscisas son mayores a $-1$ y menores a $0$ dicho intervalo se muestra en la recta numérica paralela al eje x

$$\therefore \quad -1 < \cos\beta < 0$$

**OBSERVACIÓN**

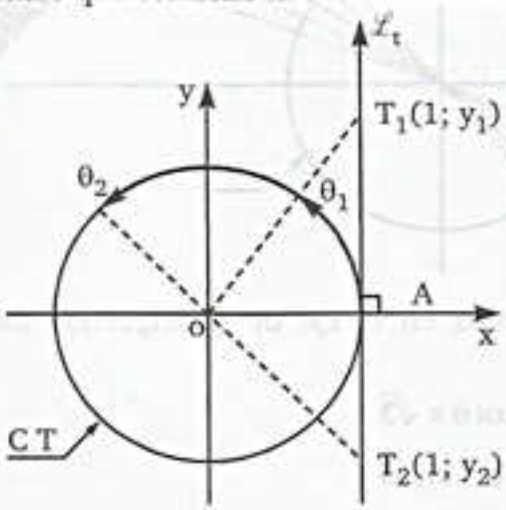
Las coordenadas del extremo de arco $\theta$ en una C T es $(\cos\theta; \operatorname{sen}\theta)$

**Ejemplo:**




## 3. TANGENTE

La tangente de un arco es la ordenada del punto de intersección entre el eje de tangentes ($\mathcal{L}_t$) y la prolongación de radio que contiene al extremo del arco.

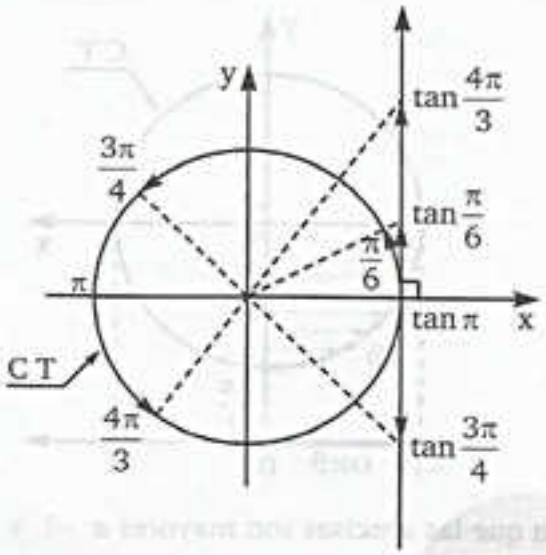



$\tan\theta_1 = y_1$
$\tan\theta_2 = y_2$

**En general:**

$$\tan\theta \in \mathbb{R}$$
$$\forall\, \theta \in \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\};\ k \in \mathbb{Z}$$

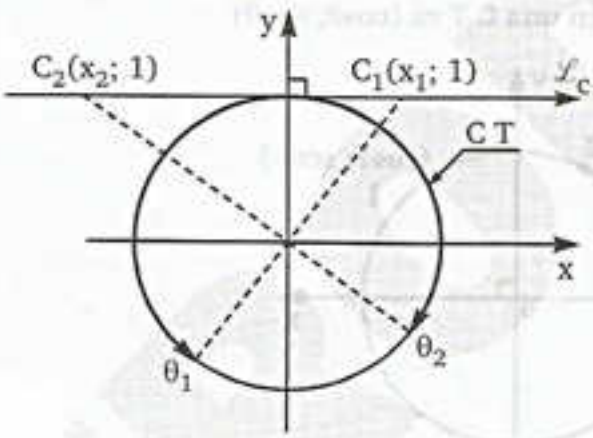
**Ejemplo:**




$\tan\pi = 0$

## 4. COTANGENTE

La cotangente de un arco es la abscisa del punto de intersección entre el eje de cotangente ($\mathscr{L}_c$) y la prolongación del radio que contiene el extremo de arco.

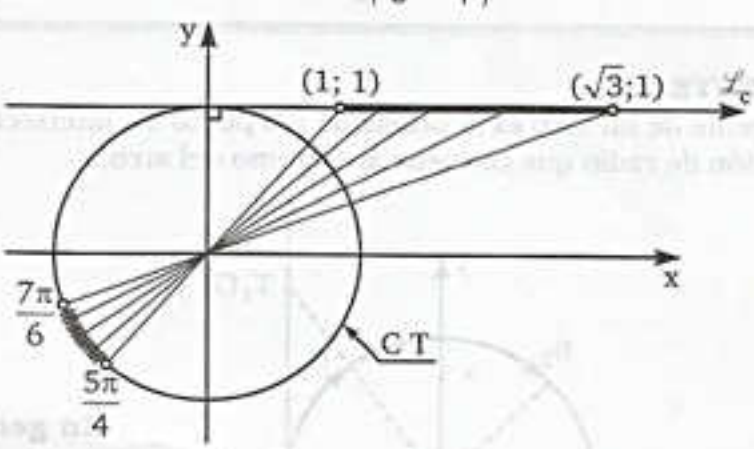



$\cot\theta_1 = x_1$
$\cot\theta_2 = x_2$

**En general:**

$$\cot\theta \in \mathbb{R}$$
$$\forall\ \theta \in \mathbb{R} - \{k\pi\};\ k \in \mathbb{Z}$$

**Ejemplo:** Halle todos los valores de "$\cot\theta$", si $\theta \in \left\langle \frac{7\pi}{6}; \frac{5\pi}{4} \right\rangle$




Se observa que las abscisas en el eje de cotangentes son mayores a 1 y menores a $\sqrt{3}$

$$1 < \cot\theta < \sqrt{3}$$

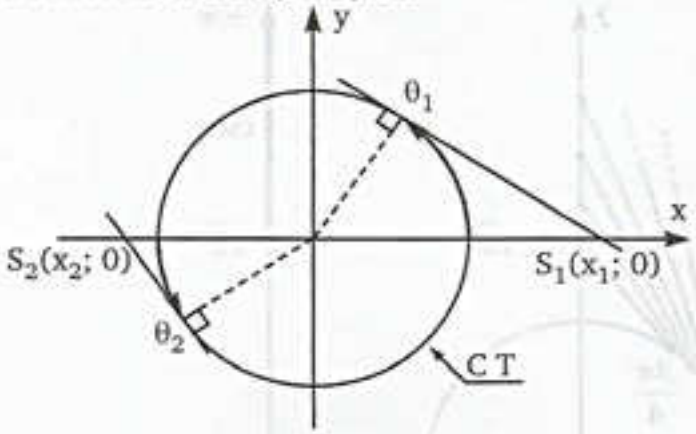
$$\therefore\ \cot\theta \in \langle 1; \sqrt{3} \rangle$$

team CALAPENSHKO



## 5. SECANTE

La secante de un arco es la abscisa del punto de intersección entre la tangente geométrica que contiene el extremo de arco y el eje x.



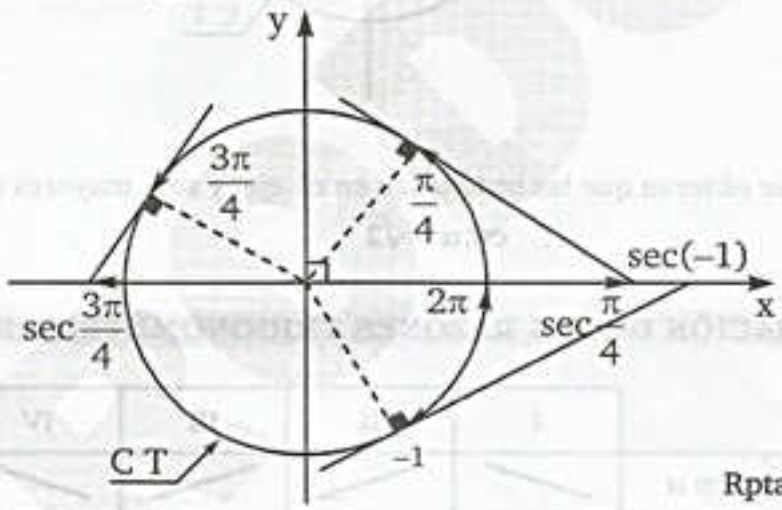

$\sec\theta_1 = x_1$
$\sec\theta_2 = x_2$

**En general:**

$$\sec\theta \leq -1 \vee \sec\theta \geq 1$$
$$\forall\, \theta \in \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\};\ k \in \mathbb{Z}$$

**Ejemplo:** De los siguientes valores: $\sec\frac{\pi}{4}$ ; $\sec\frac{3\pi}{4}$ ; $\sec 2\pi$ y $\sec(-1)$

¿Cuál es el mayor?

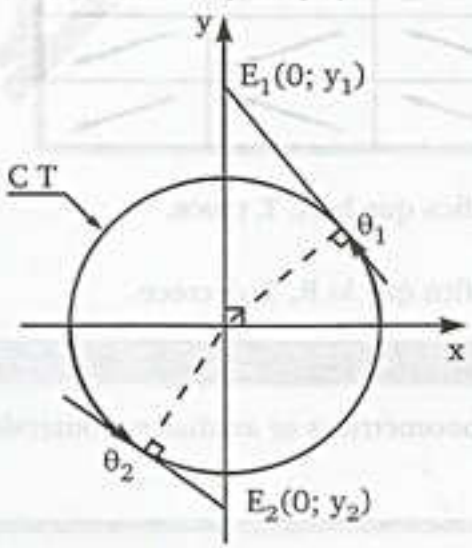



$\sec 2\pi = 1$

Rpta: El mayor es sec(–1)

## 6. COSECANTE

La cosecante de un arco es la ordenada del punto de intersección entre la tangente geométrica que contiene el extremo del arco y el eje y.

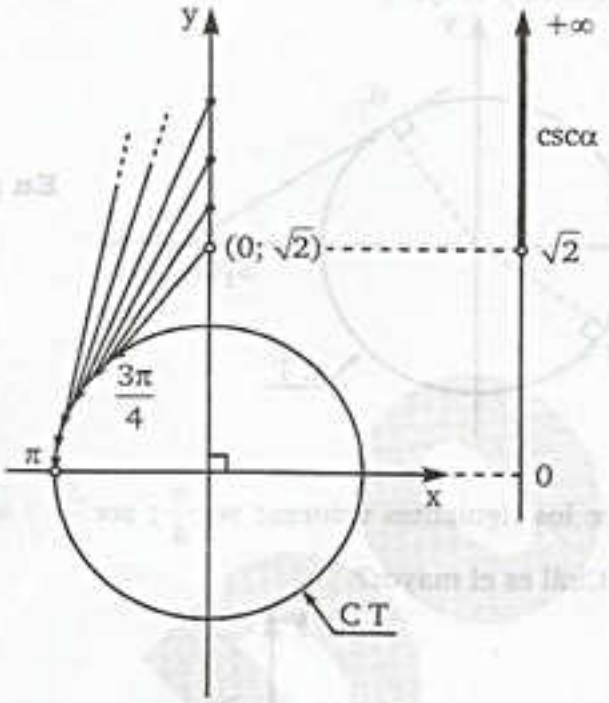



$\csc\theta_1 = y_1$
$\csc\theta_2 = y_2$

**En general:**

$$\csc\theta \leq -1 \vee \csc\theta \geq 1$$
$$\forall\, \theta \in \mathbb{R} - \{k\pi};\ k \in \mathbb{Z}$$

**Ejemplo:** Si : $\alpha \in \left\langle \frac{3\pi}{4}; \pi \right\rangle$, halle todos los valores de "$\csc\alpha$"




Se observa que las ordenadas en el eje y son mayores a $\sqrt{2}$

$\therefore \quad \csc\alpha > \sqrt{2}$

## CUADRO DE VARIACIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

| | I | II | III | IV |
|---|---|---|---|---|
| sen α | ↗ | ↘ | ↘ | ↗ |
| cos α | ↘ | ↘ | ↗ | ↗ |
| tan α | ↗ | ↗ | ↗ | ↗ |
| cot α | ↘ | ↘ | ↘ | ↘ |
| sec α | ↗ | ↗ | ↘ | ↘ |
| csc α | ↘ | ↗ | ↗ | ↘ |

↗ : Significa que la R. T. crece.

↘ : Significa que la R. T. decrece.

**NOTA**

Por convención la variación de Razones Trigonométricas se analiza suponiendo una rotación en sentido antihorario.

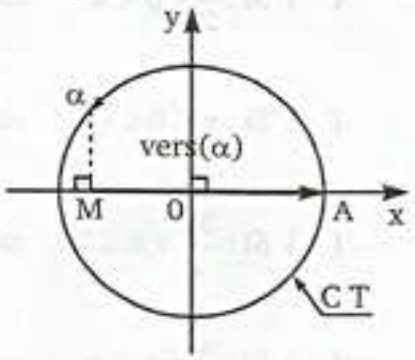
team CALAPENSHKO


## DEFINICIONES AUXILIARES

### SENO VERSO Ó VERSO DE (α)

Se denota por: vers (α)

Gráficamente, el verso de un arco dirigido, es el segmento dirigido en el eje "x", que parte del punto cuya coordenada es el coseno de dicho arco hacia el origen de arco.




**Del gráfico:**

$\text{vers}(\alpha) = \overline{MA}$

$$\text{vers}(\alpha) = 1 - \cos\alpha$$

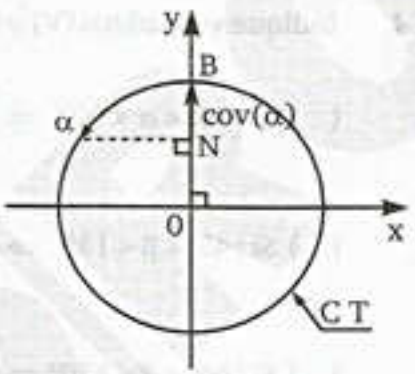
$$0 \leq \text{vers}(\alpha) \leq 2$$

$\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$

### COSENO VERSO Ó COVERSO DE (α)

Se denota por: cov (α)

Gráficamente, el coverso de un arco dirigido, es el segmento dirigido en el eje "y", que parte del punto cuya coordenada es el seno de dicho arco hacia el origen de complementos.




**Del gráfico:**

$\text{cov}(\alpha) = \overline{NB}$

$$\text{cov}(\alpha) = 1 - \text{sen}\alpha$$

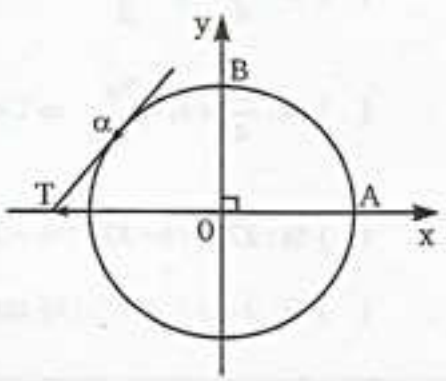
$$0 \leq \text{cov}(\alpha) \leq 2$$

$\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$

### EX-SECANTE DE (α)

Se denota por: exsec (α)

Gráficamente, la exsecante de un arco dirigido, es el segmento dirigido en el eje "x", que parte del origen de arcos hacia el punto cuya coordenada es la secante de dicho arco.




**Del gráfico:**

$\text{exsec}(\alpha) = \overline{AT}$

$$\text{exsec}(\alpha) = \sec\alpha - 1$$

$$\text{ex sec}(\alpha) \leq -2 \vee \text{Exsec}\ \alpha \geq 0$$

$$\forall\ \alpha \in \mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\};\ n \in \mathbb{Z}$$

## EJERCICIOS DE APLICACIÓN

**1.** ¿Cuáles de los siguientes puntos pertenecen a una circunferencia trigonométrica?

a) $\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$

b) $(1; 0)$

c) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}\right)$

d) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

**2.** Coloque el signo de relación (>, <, =) correspondiente en cada cuadro:

a) $\operatorname{sen}60^\circ$ ☐ $\operatorname{sen}100^\circ$

b) $\cos 45^\circ$ ☐ $\cos 130^\circ$

c) $\tan 150^\circ$ ☐ $\tan 200^\circ$

d) $\operatorname{sen}50^\circ$ ☐ $\sec 80^\circ$

e) $\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ ☐ $\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

f) $\operatorname{sen}1$ ☐ $\operatorname{sen}2$

g) $\csc 2$ ☐ $\sec 2$

h) $\tan 3$ ☐ $\cot 3$

**3.** Indique verdadero (V) o falso (F):

( ) Si: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow 0 < \operatorname{sen}\alpha < 1$

( ) Si: $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ $\Rightarrow 0 < \cos\beta < 1$

( ) Si: $\pi \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$ $\Rightarrow -1 \le \operatorname{sen}\theta \le 0$

( ) Si: $\frac{3\pi}{2} < \phi \le 2\pi$ $\Rightarrow 0 \le \cos\phi < 1$

( ) Si: $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$ $\Rightarrow \tan\omega < 0$

( ) Si: $\frac{3\pi}{2} < \gamma \le 2\pi$ $\Rightarrow \sec\gamma \ge 1$

**4.** Indique verdadero (V) o falso (F)

( ) Si: $30^\circ < \alpha < 90^\circ$ $\Rightarrow \frac{1}{2} < \operatorname{sen}\alpha < 1$

( ) Si: $45^\circ < \beta < 135^\circ$ $\Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos\beta < \frac{\sqrt{2}}{2}$

( ) Si: $60^\circ < \theta \le 150^\circ$ $\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} < \operatorname{sen}\theta \le 1$

( ) Si: $\frac{\pi}{6} < \phi < \frac{7\pi}{6}$ $\Rightarrow -1 < \cos\phi < \frac{1}{2}$

( ) Si: $\frac{5\pi}{4} < \gamma < \frac{3\pi}{2}$ $\Rightarrow 0 < \cot\gamma < 1$

( ) Si: $\frac{3\pi}{4} < \omega < \frac{7\pi}{6}$ $\Rightarrow 1 < \sec\omega < \sqrt{2}$

( ) Si: $270^\circ < \delta < 330^\circ \Rightarrow -2 < \csc\delta \le -1$

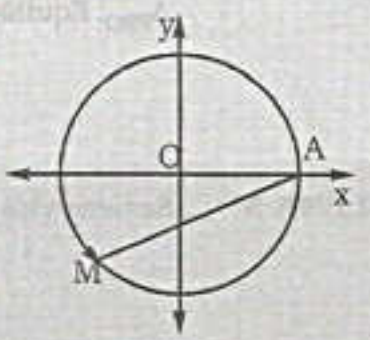
( ) Si: $3 < \rho < 4$ $\Rightarrow \tan 3 < \rho < \tan 4$

team CALAPENSHKO


## PROBLEMAS RESUELTOS

**PROBLEMA 1** En la circunferencia trigonométrica del gráfico mostrado el punto M corresponde a un ángulo en posición normal θ. Calcule el área de la región sombreada (en $u^2$).

**ADMISIÓN UNI 2016 - II**




**Resolución:**

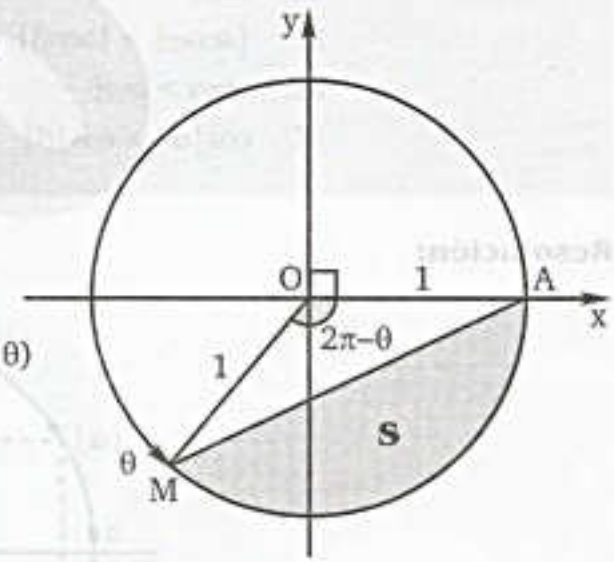
De la circunferencia trigonométrica

Luego del gráfico:

$$\mathbf{S} = S_{\triangleleft(OMA)} - A_{\triangle(OMA)}$$

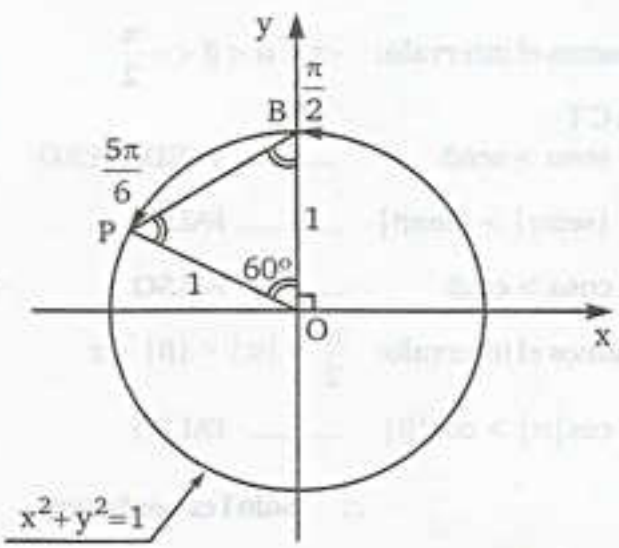
$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(2\pi-\theta)(1)^2 - \frac{(1)(1)}{2}\operatorname{sen}(2\pi-\theta)$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(2\pi-\theta+\operatorname{sen}\theta)$$




**PROBLEMA 2** En una circunferencia trigonométrica B y P son los extremos de los arcos $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{5\pi}{6}$ respectivamente. Determine BP.

**Resolución:**



team CALAPENSHKO


Ubicamos los arcos $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{5\pi}{6}$ en la circunferencia trigonométrica:

$\Delta_{PBO}$: Equilátero

$\therefore$ **BP = 1**

**PROBLEMA 3** Se tienen los números reales $x_1$ y $x_2$ en el intervalo:

$$-\pi < \alpha < \beta < -\frac{\pi}{2}$$

Cuál o cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas:

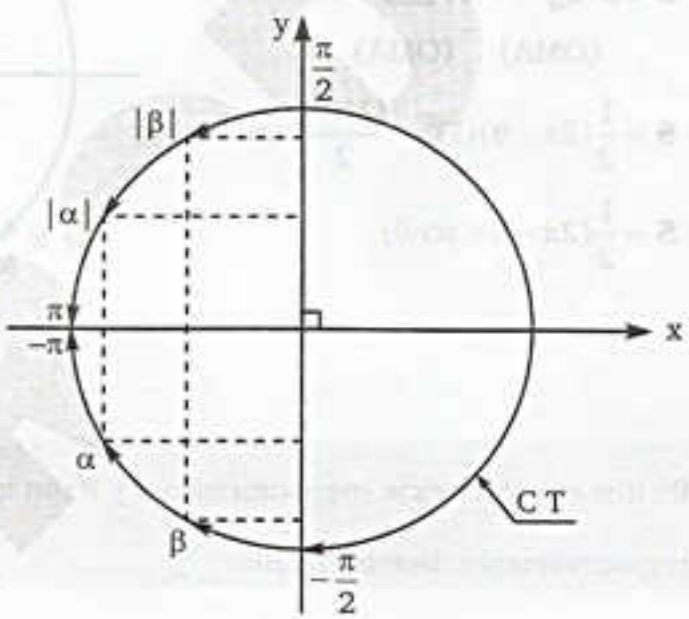
I. $\text{sen}\alpha > \text{sen}\beta$

II. $|\text{sen}\alpha| > |\text{sen}\beta|$

III. $\cos\alpha > \cos\beta$

IV. $\cos|\alpha| > \cos|\beta|$

**Resolución:**




Ubicamos el intervalo: $-\pi < \alpha < \beta < -\frac{\pi}{2}$

En la C T

I. $\text{sen}\alpha > \text{sen}\beta$ ..... VERDADERO

II. $|\text{sen}\alpha| > |\text{sen}\beta|$ ..... FALSO

III. $\cos\alpha > \cos\beta$ ..... FALSO

Ubicamos el intervalo: $\frac{\pi}{2} < |\alpha| < |\beta| < \pi$

IV. $\cos|\alpha| > \cos|\beta|$ ..... FALSO

$\therefore$ **Sólo I es verdadera**

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 4** De la igualdad: $\operatorname{sen}\theta = \frac{5n+1}{3} - 2n$

Hallar los valores para "n", de tal manera que senθ exista.

**Resolución:**

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{5n+1}{3} - 2n \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{1-n}{3} \quad .....(1)$$

Se cumple $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$: $-1 \le \operatorname{sen}\theta \le 1$ .....(*)

(1) en (*): $-1 \le \frac{1-n}{3} \le 1$

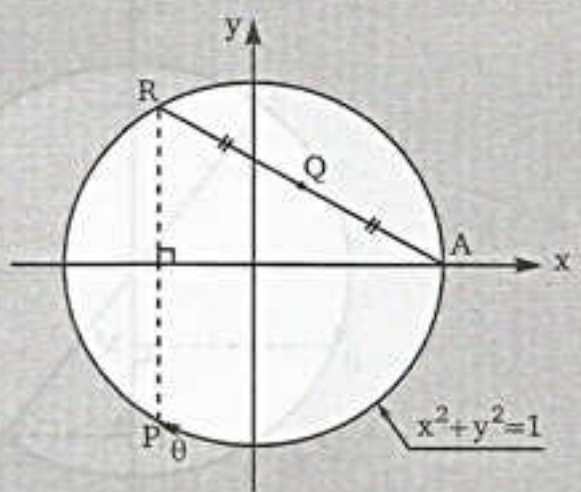
Multiplicando × 3: $-3 \le 1-n \le 3$

Restando 1: $-4 \le -n \le 2$

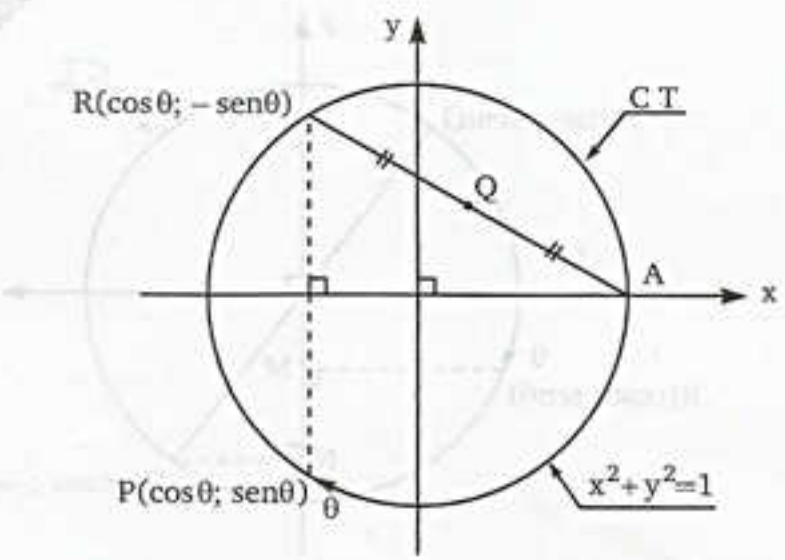
Multiplicando × (−1): $4 \ge n \ge -2$

$$\therefore\ n \in [-2; 4]$$

**PROBLEMA 5** Del gráfico mostrado, determine las coordenadas del punto "Q", si RQ = QA.




**Resolución:**



Las coordenadas del punto P extremo al arco θ es :

$$P(\cos\theta;\ \text{sen}\theta)$$

El punto R es simétrico a P respecto al eje x, así:

$$R(\cos\theta;\ -\text{sen}\theta)$$

Además el origen de arcos: A(1; 0)

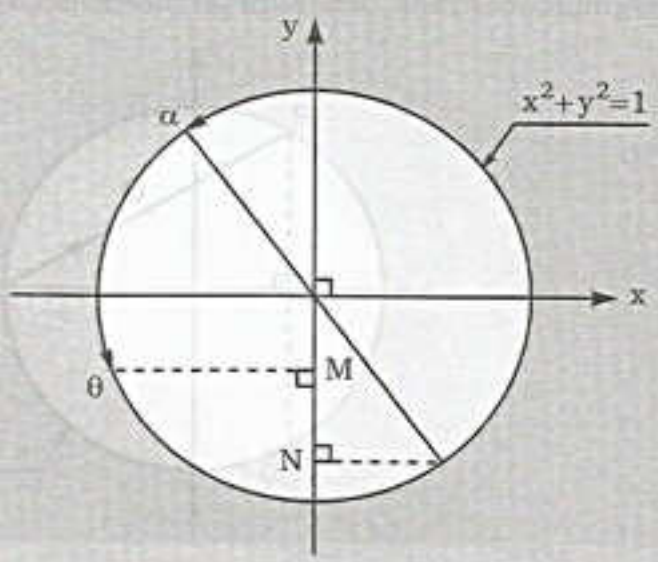
El punto Q es punto medio del segmento RA

Entonces por propiedad del punto medio:

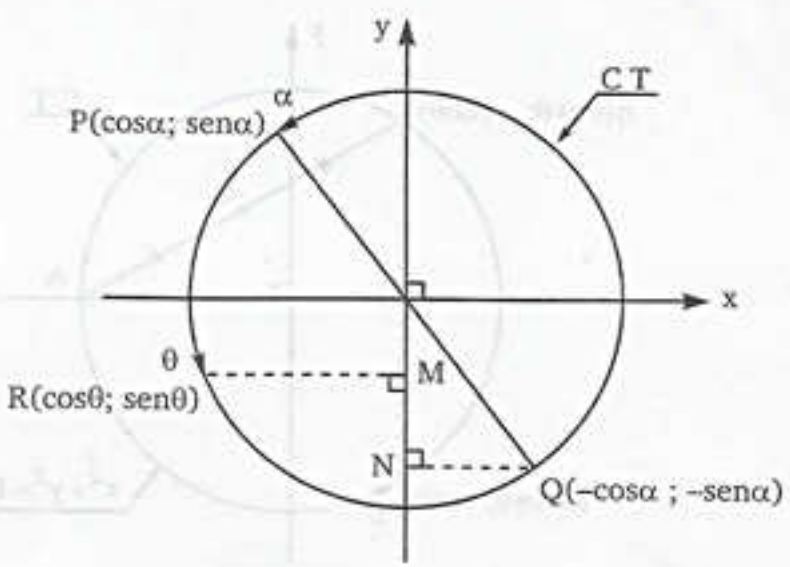
$$Q\left(\frac{\cos\theta+1}{2};\ \frac{-\text{sen}\theta+0}{2}\right)$$

$$\therefore\ \mathbf{Q\left(\frac{\cos\theta+1}{2};\ \frac{-\text{sen}\theta}{2}\right)}$$

**PROBLEMA 6** Del gráfico, calcule MN




**Resolución:**



Las coordenadas de los puntos P y R extremos de los arcos $\alpha$ y $\theta$ son:

$$P(\cos\alpha; \operatorname{sen}\alpha) \text{ y } R(\cos\theta; \operatorname{sen}\theta)$$

El punto Q es simétrico al punto P respecto al origen.

Luego: $Q(-\cos\alpha ; -\operatorname{sen}\alpha)$

MN = Ordenada del punto M – Ordenada del punto N

Pero según el gráfico: Ordenada de M = Ordenada de R = $\operatorname{sen}\theta$

Ordenada de N = Ordenada de Q = $-\operatorname{sen}\alpha$

$$MN = \operatorname{sen}\theta - (-\operatorname{sen}\alpha)$$

$$\therefore \quad \mathbf{MN = \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\alpha}$$

**PROBLEMA 7** Dados: $P = \tan 400^\circ + \cos 810^\circ$

$Q = \cot 760^\circ . \operatorname{sen} 450^\circ$

$R = \tan 1125^\circ . \sec 720^\circ$

Indique la alternativa correcta: **ADMISIÓN UNI 2016 - II**

**Resolución:** Operamos cada una de las expresiones:

$P = \tan 40^\circ + \cos 90^\circ$

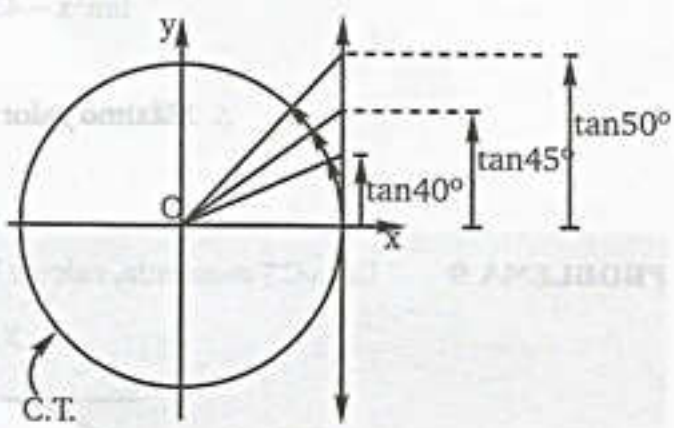
$\rightarrow P = \tan 40^\circ + 0 = \tan 40^\circ$

$Q = \cot 40^\circ . \operatorname{sen} 90^\circ$

$\rightarrow Q = \cot 40^\circ = \tan 50^\circ$

$R = \tan 45^\circ . \operatorname{sen} 90^\circ$

$\rightarrow R = \tan 45^\circ$



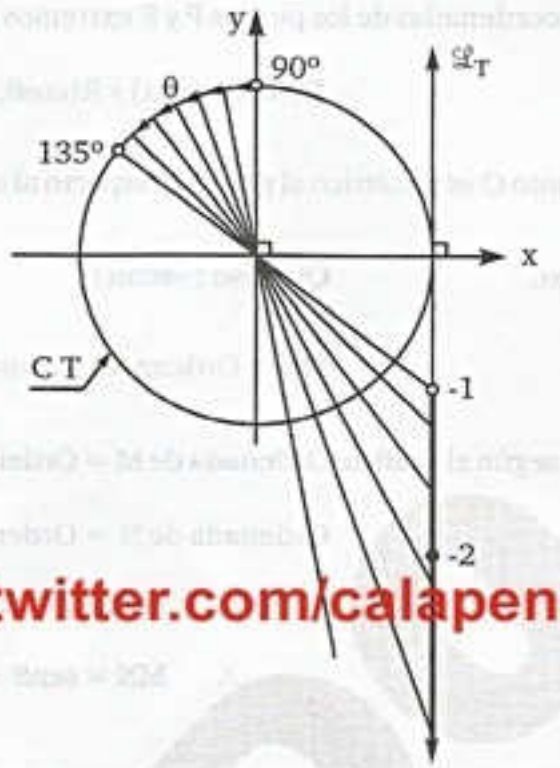

Ahora veamos en la C.T.:

$$\therefore \quad \tan 50^\circ > \tan 45^\circ > \tan 40^\circ$$
$$Q > R > P$$

**PROBLEMA 8** ¿Cuál es el máximo valor entero que puede tomar $\tan(x - 45^\circ)$, en el intervalo para x en $\langle 135^\circ; 180^\circ \rangle$?

team CALAPENSHKO


**Resolución:**




twitter.com/calapenshko

Del dato : $135° < x < 180°$

Sumando $-45°$ : $90° < \underbrace{x - 45°}_{\theta} < 135°$

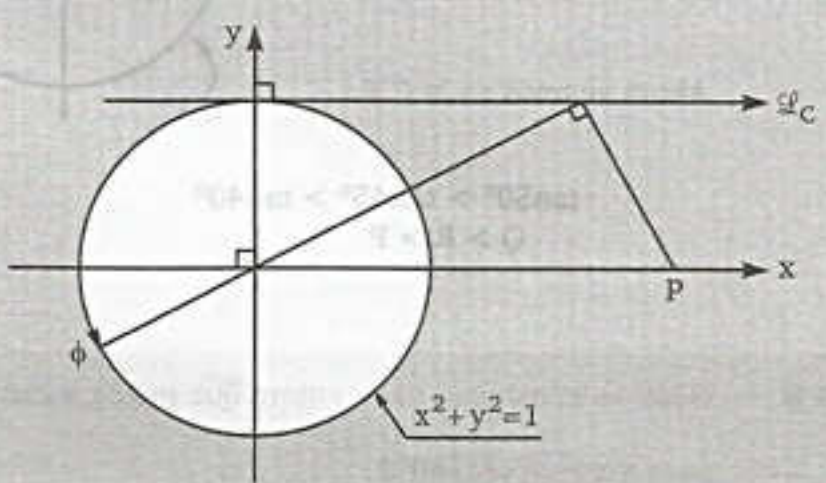
$\theta \rightarrow$ En la C T

$\tan\theta < -1$

$\tan(x - 45°) < -1$

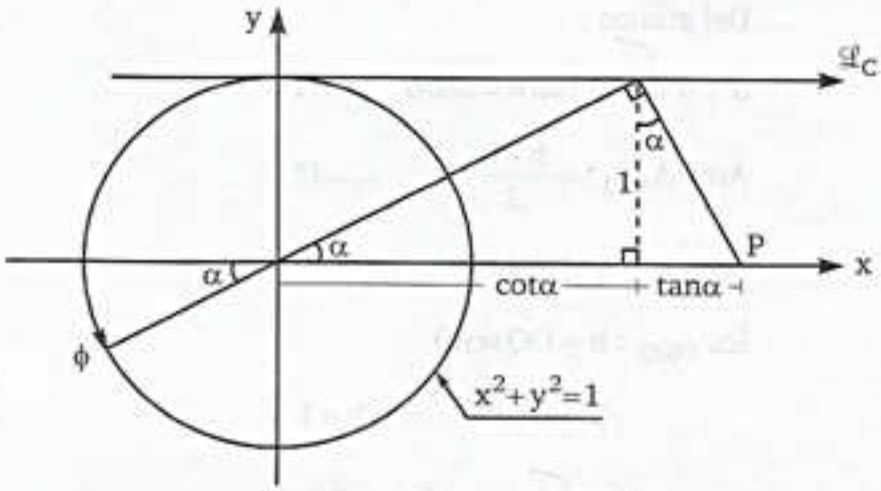
∴ **Máximo valor entero de $\tan(x - 45°) = -2$**

**PROBLEMA 9** De la C T mostrada, calcule la abscisa del punto "P".



team CALAPENSHKO


**Resolución:**

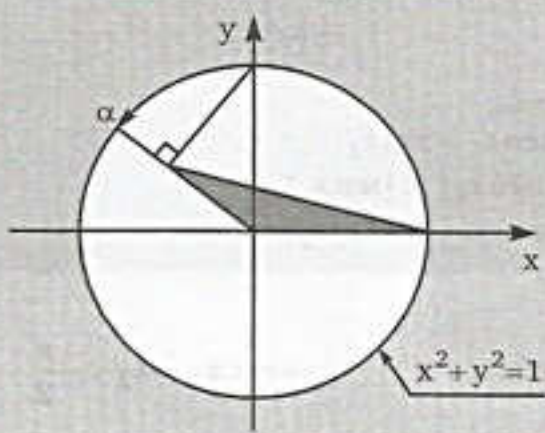



De la figura : Abscisa del punto P = $\tan\alpha + \cot\alpha$

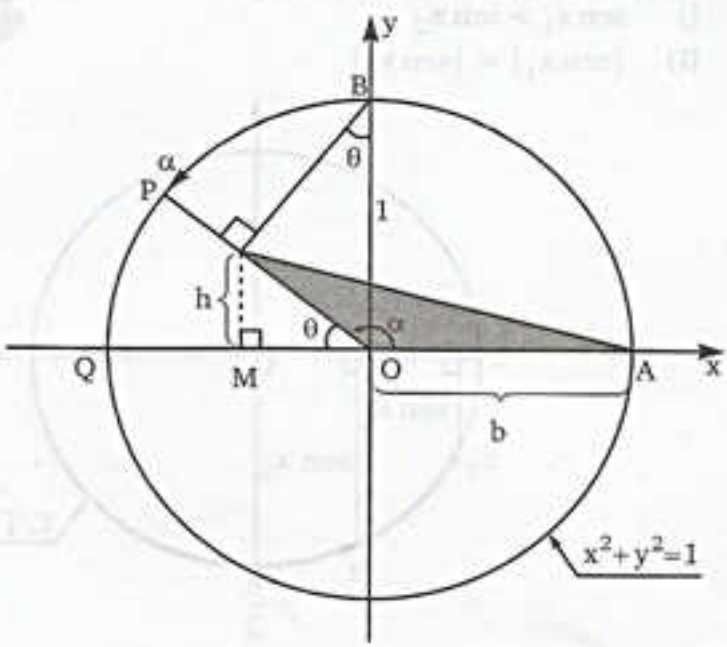
Pero $\phi = \alpha + \pi \Rightarrow \begin{cases} \tan\alpha = \tan\phi \\ \cot\alpha = \cot\phi \end{cases}$

$\therefore$ **Abscisa de P = $\tan\phi + \cot\phi$**

**PROBLEMA 10** En la C T mostrada, hallar el área de la región triangular sombreada en función de α:




**Resolución:**



Del gráfico :

$\alpha + \theta = \pi \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\alpha$ .....(1)

Área $\Delta_{AOQ} = \dfrac{b \times h}{2}$ .....(*)

$\triangle_{OQB}$ : $OQ = \operatorname{sen}\theta$

$\triangle_{OMQ}$ : $h = OQ\operatorname{sen}\theta$

$h = \operatorname{sen}^2\theta \quad \wedge \quad b = 1$

En (*) : Área $\Delta_{AOQ} = \dfrac{1 \times \operatorname{sen}^2\theta}{2}$

Usando (1): $\therefore$ Área $\Delta_{AOQ} = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2\alpha$

**PROBLEMA 11** Indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

Si: $-\pi < x_1 < x_2 < -\dfrac{\pi}{2}$

Entonces:

I) $\operatorname{sen} x_1 > \operatorname{sen} x_2$

II) $|\operatorname{sen} x_1| < |\operatorname{sen} x_2|$

III) $\operatorname{sen}|x_1| > \operatorname{sen}|x_2|$

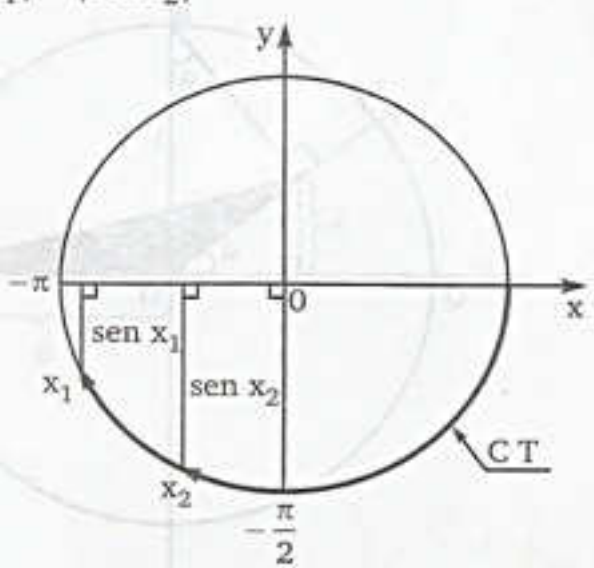
**Resolución:**

Dato : $-\pi < x_1 < x_2 < -\dfrac{\pi}{2}$

Graficando la C T para (I) y (II):

I) $\operatorname{sen} x_1 > \operatorname{sen} x_2$

II) $|\operatorname{sen} x_1| < |\operatorname{sen} x_2|$



team CALAPENSHKO


Se observa : $\operatorname{sen} x_1 > \operatorname{sen} x_2$ $\therefore$ I) V

(Mayor longitud) : $|\operatorname{sen} x_1| < |\operatorname{sen} x_2|$ $\therefore$ II) V
(+)

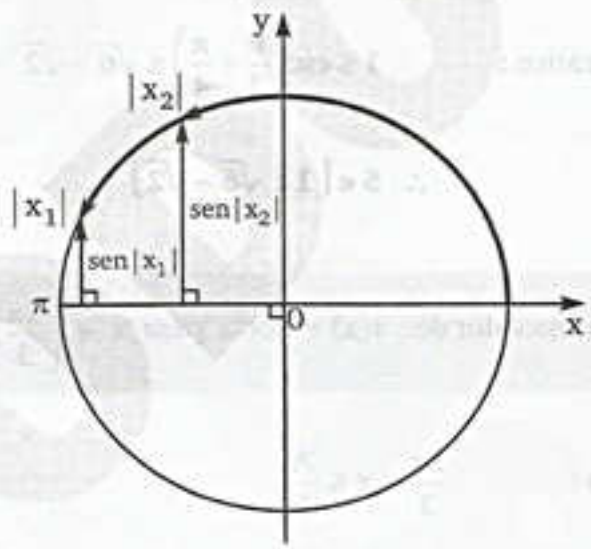
Del dato : $-\pi < x_1 < x_2 < -\frac{\pi}{2}$

Tomando valor absoluto; la desigualdad cambia :

$$\frac{\pi}{2} < |x_2| < |x_1| < \pi$$

Graficando la C T para (III):

III) $\operatorname{sen}|x_1| > \operatorname{sen}|x_2|$




**Se observa que :** $\operatorname{sen}|x_1| < \operatorname{sen}|x_2|$ $\therefore$ **III) F**

**PROBLEMA 12** Si: $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$, determine la extensión de la expresión: $\csc\left(\frac{\theta}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$

**Resolución:** Del dato:

$$\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$$

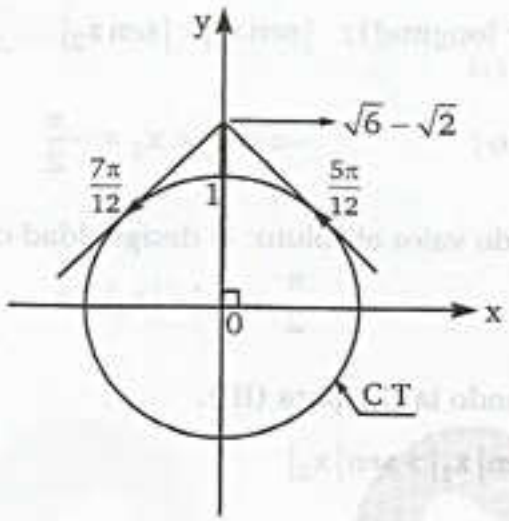
$$\frac{\pi}{6} \le \frac{\theta}{3} \le \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{5\pi}{12} \le \frac{\theta}{3} + \frac{\pi}{4} \le \frac{7\pi}{12}$$

Nos piden la extensión de:

$$S = \csc\left(\frac{\theta}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{.....(I)}$$

Analizando en la C T




Del gráfico : $1 \le \csc\left(\frac{\theta}{3}+\frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{6}-\sqrt{2}$

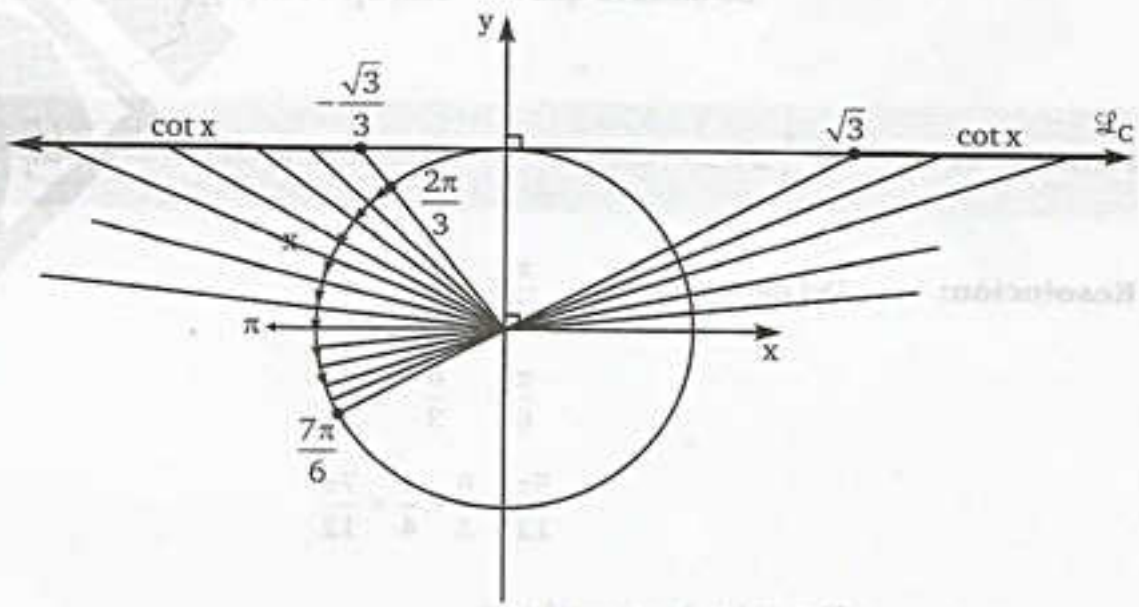
$\therefore\ S \in [1;\ \sqrt{6}-\sqrt{2}]$

**PROBLEMA 13** El mínimo valor de: $f(x) = \cot^2 x$ para $x \in \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{6}\right]$ es:

**Resolución:**

Como : $\frac{2\pi}{3} \le x \le \frac{7\pi}{6}$

En la C T :




Del gráfico: $\cot x \le -\frac{\sqrt{3}}{3} \ \vee\ \cot x \ge \sqrt{3}$

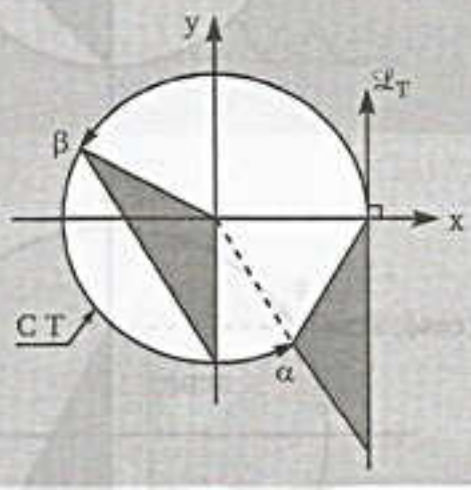
team CALAPENSHKO


Elevando al cuadrado : $\cot^2 x \geq \frac{1}{3} \quad \vee \quad \cot^2 x \geq 3$

Entonces : $f(x) = \cot^2 x \geq \frac{1}{3}$

$\therefore \quad f(x)_{Min.} = \frac{1}{3}$

**PROBLEMA 14** Si las áreas de las regiones triangulares son equivalentes. Calcule: $\tan\alpha - \operatorname{sen}\alpha$ en términos de $\beta$




**Resolución:** De la gráfica :

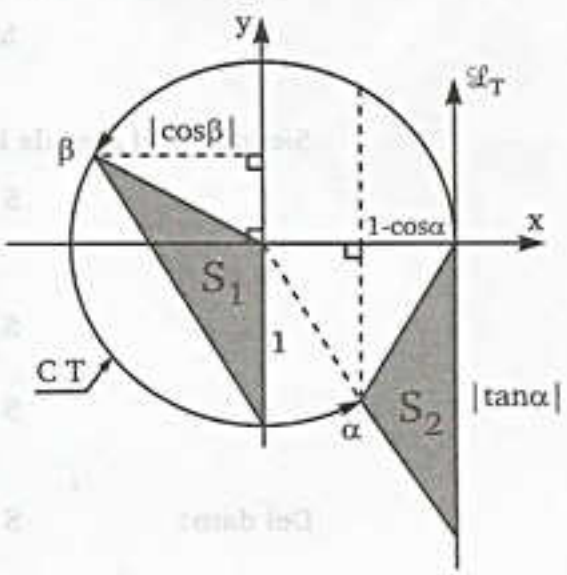
$$S_1 = \frac{(1)(|\cos\beta|)}{2}$$

a) $|\cos\beta| = -\cos\beta$

$$S_1 = \frac{-\cos\beta}{2}$$

También :

$$S_2 = \frac{|\tan\alpha|(1-\cos\alpha)}{2}$$




b) $|\tan\alpha| = -\tan\alpha$

$$S_2 = \frac{-\tan\alpha(1-\cos\alpha)}{2}$$

$$S_2 = \frac{-(\tan\alpha - \operatorname{sen}\alpha)}{2}$$

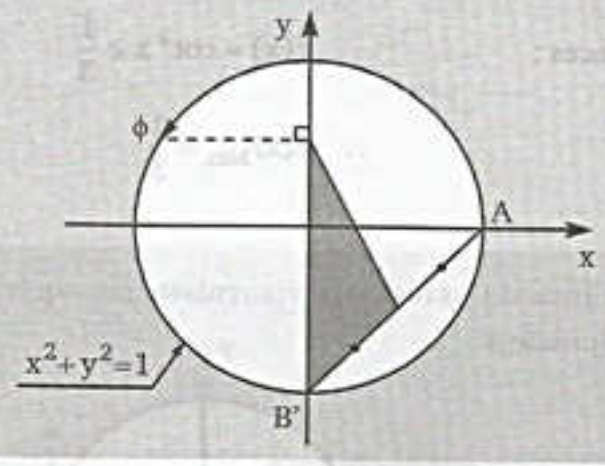
Como $S_1 = S_2$ : $\quad \frac{-\cos\beta}{2} = \frac{-(\tan\alpha - \operatorname{sen}\alpha)}{2}$

$\therefore \quad \tan\alpha - \operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$

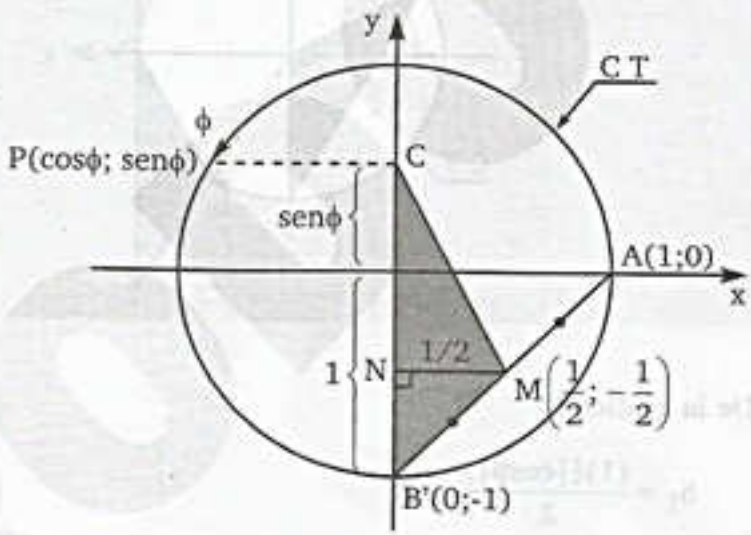
team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 15** Del gráfico, calcule el valor de "$\phi$" si el área de la región triangular sombreada es igual a $0{,}375\ u^2$




**Resolución:**




M es punto medio de AB', luego:

$$M\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$$

Siendo "S" el área de la región triangular BCM entonces:

$$S = \frac{BC \times MN}{2}$$

$$S = \frac{(1+\text{sen}\phi)\left(\frac{1}{2}\right)}{2}$$

$$S = \frac{1+\text{sen}\phi}{4} \quad \text{.....(*)}$$

Del dato: $S = 0{,}375 = \frac{3}{8}$ .....(**)

(*) = (**): $\frac{1+\text{sen}\theta}{4} = \frac{3}{8} \Rightarrow \text{sen}\phi = \frac{1}{2}$

$$\therefore \ \phi = \frac{5\pi}{6}$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 16** Sabiendo que:

$$\sqrt{3}\,\text{sen}\theta - \tan x = 0 \quad ; \quad \forall\,\theta \in \mathbb{R}$$

Determine la variación del valor de x en el intervalo de:

$$\left\langle -2\pi\,;\,-\frac{\pi}{2}\right\rangle$$

**Resolución:** Del dato; como $\theta \in \mathbb{R}: -1 \le \text{sen}\,\theta \le 1$ .....(1)

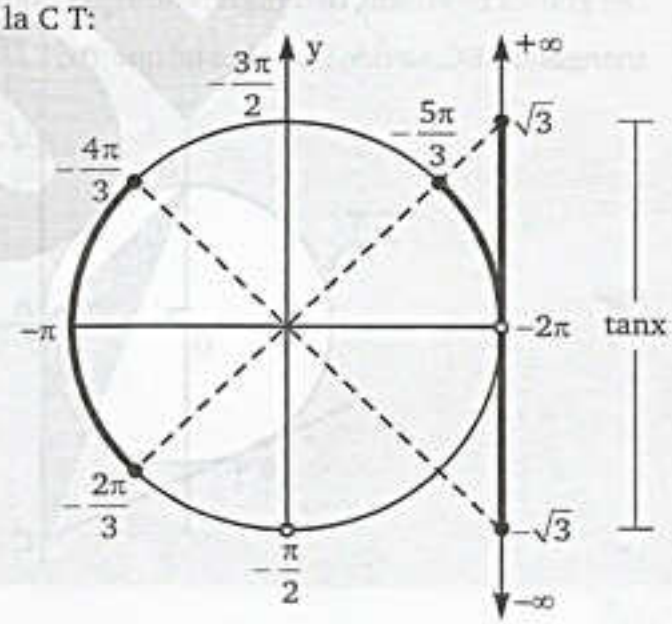
Sabemos que: $\sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta = \tan x$

Multiplicando por $(\sqrt{3})$ a la desigualdad (1):

$$-\sqrt{3} \le \sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta \le \sqrt{3}$$

Reemplazando: $-\sqrt{3} \le \tan x \le \sqrt{3}$

Graficando en la C T:




De la C T se observa; que la variable angular "x" debe variar en el intervalo de:

$$-\frac{4\pi}{3} \le x \le -\frac{2\pi}{3} \;\vee\; -2\pi < x \le -\frac{5\pi}{3}$$

$$\therefore \quad x \in \left\langle -2\pi; -\frac{5\pi}{3}\right] \cup \left[-\frac{4\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}\right]$$

**PROBLEMA 17** Si: $60° \le \theta < 200°$

Determine la suma del máximo y mínimo valor de:

$$R = 3\cos\theta - 1$$

**Resolución:** Graficando en la C T

Ubicamos el intervalo en la C T $60° \le \theta < 200°$

Luego : $-1 \le \cos\theta \le \frac{1}{2}$

Multiplicando por 3 :

$$-3 \le 3\cos\theta \le \frac{3}{2}$$

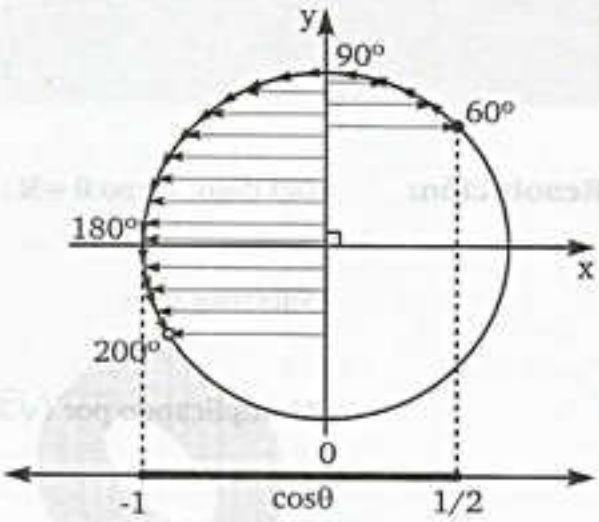
Restando 1 : $-4 \le 3\cos\theta - 1 \le \frac{1}{2}$

$$-4 \le R \le \frac{1}{2}$$

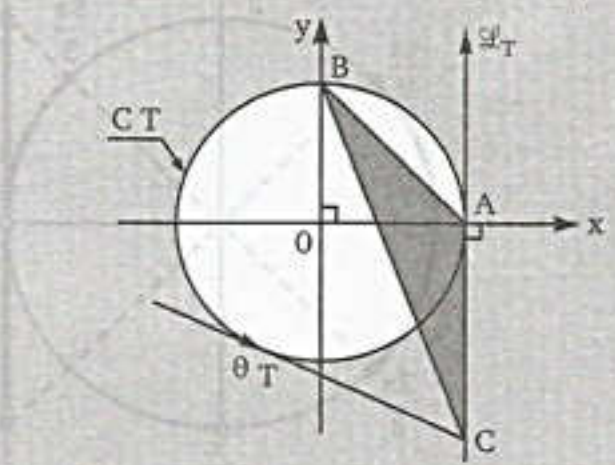
Luego : $R_{Máx.} = \frac{1}{2} \wedge R_{Mín.} = -4$

$$R_{Máx.} + R_{Mín.} = -\frac{7}{2}$$

$\therefore$ $\mathbf{R_{Máx.} + R_{Mín.} = -3,5}$




**PROBLEMA 18** Del gráfico mostrado, determine entre que valores se encuentra el área de la región triangular ABC, siendo $\theta$ un arco tal que $\theta \in \left\langle \frac{4\pi}{3}; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$ (T: punto de tangencia)

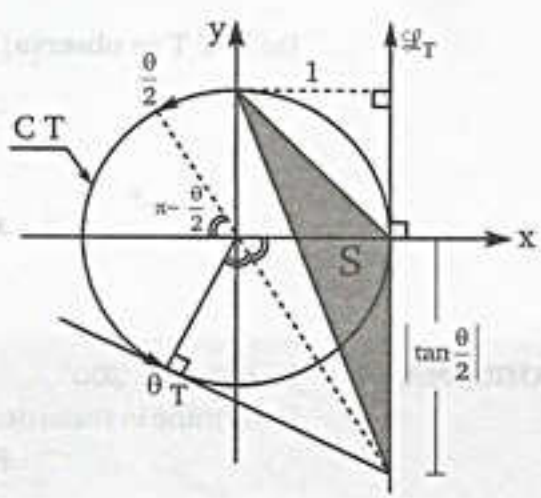



**Resolución:** El área sombreada "S" es:

$$S = \frac{\left|\tan\frac{\theta}{2}\right|(1)}{2} \quad \text{.....(i)}$$

Como: $\frac{4\pi}{3} \le \theta < \frac{3\pi}{2}$

$$\frac{2\pi}{3} \le \frac{\theta}{2} < \frac{3\pi}{4}$$

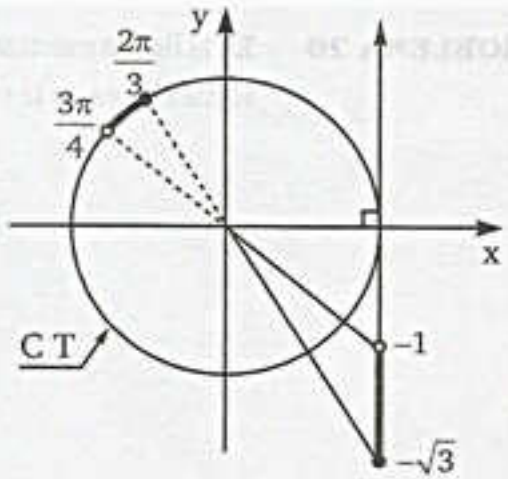


team CALAPENSHKO



$$-\sqrt{3} \le \tan\frac{\theta}{2} < -1$$

$$1 < \left|\tan\frac{\theta}{2}\right| \le \sqrt{3}$$




Dando forma a (i): $1 < \left|\tan\frac{\theta}{2}\right| \le \sqrt{3}$

$$\frac{1}{2} < \frac{\left|\tan\frac{\theta}{2}\right|}{2} \le \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} < S \le \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**PROBLEMA 19** Si: $-\pi < x \le -\frac{\pi}{2}$; calcule el mínimo valor de:

$$M = \frac{13}{5} + \frac{2}{5}\left|\csc\left|\frac{\pi}{x}\right|\right|$$

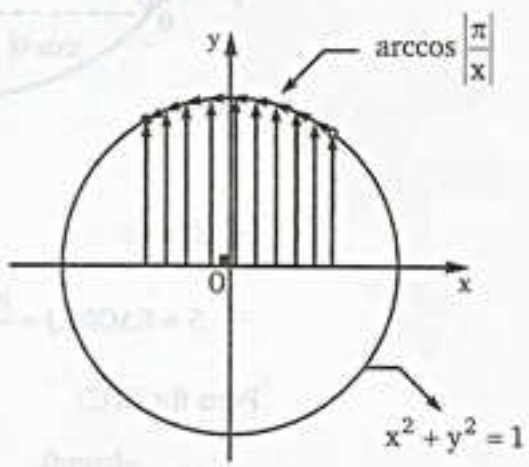
**Resolución:** Para determinar los valores de M partimos de los valores dados a x.

$$-\pi < x \le -\frac{\pi}{2} \rightarrow -1 < \frac{x}{\pi} \le -\frac{1}{2}$$

$$1 > \left|\frac{x}{\pi}\right| \ge 2 \quad \rightarrow 1 < \left|\frac{\pi}{x}\right| \le 2$$

Representamos los valores de este arco en la circunferencia trigonométrica.

Del gráfico:




$$\text{sen}1 < \text{sen}\left|\frac{\pi}{x}\right| \le 1 \rightarrow \quad \csc 1 > \csc\left|\frac{\pi}{x}\right| \ge 1$$

$$\rightarrow \csc 1 > \left|\csc\left|\frac{\pi}{x}\right|\right| \ge 1$$

Multiplicamos por $\frac{2}{5}$:

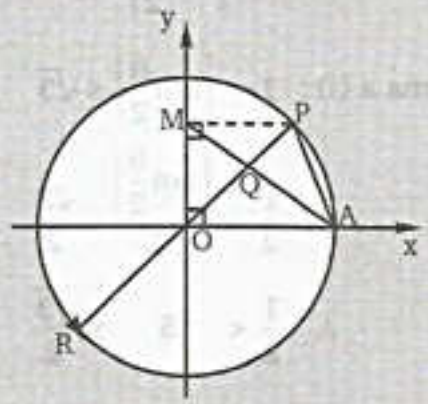
$$\frac{2}{5}.\csc 1 > \frac{2}{5}.\left|\csc\left|\frac{\pi}{x}\right|\right| \ge \frac{2}{5}$$

Sumamos $\frac{13}{5}$: $\quad \frac{13}{5} + \frac{2}{5}.\csc 1 > \frac{13}{5} + \frac{2}{5}.\left|\csc\left|\frac{\pi}{x}\right|\right| \ge 3$

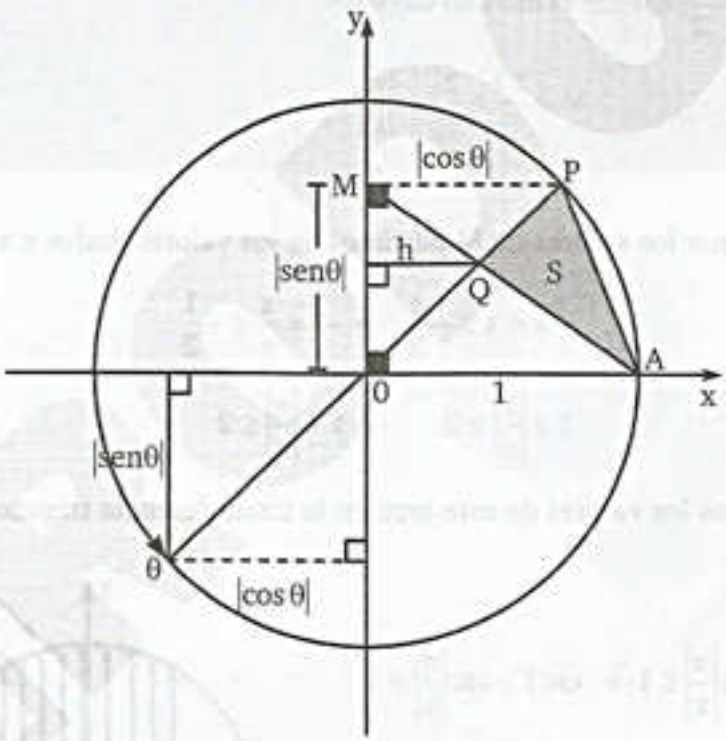
$$\rightarrow 3 \le M < \frac{13}{5} + \frac{2}{5}\csc 1$$

$$\therefore \quad M_{\text{mín.}} = 3$$

**PROBLEMA 20** En la figura mostrada la circunferen-cia es la trigonométrica, m $\widehat{APR} = \theta$
Halle el área de la región triangular APQ.




**Resolución:**




**RECUERDA**

Se cumple: $\boxed{S_1 = S_2}$

Se afirma:

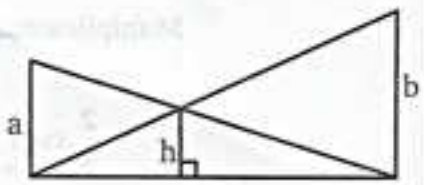
$$\Rightarrow S = S\Delta OMQ = \frac{|\text{sen}\theta| \times h}{2}$$

Pero $\theta \in$ IIIC:

$$\rightarrow S = \frac{-h\,\text{sen}\theta}{2}$$

Calculamos "h":

**RECUERDA**




Se cumple: $\boxed{h = \frac{ab}{a+b}}$

En el problema:

$$h = \frac{|\cos\theta| \times 1}{|\cos\theta| + 1} \rightarrow h = \frac{\cos\theta}{\cos\theta - 1}\ ;\ \text{puesto que } \theta \in \text{IIIC}$$

team CALAPENSHKO


Luego: $$S = \frac{\left(-\frac{\cos\theta}{\cos\theta - 1}\right)(\text{sen}\theta)}{2}$$

$$\therefore S = \frac{\text{sen}\theta.\cos\theta}{2(-1\cos\theta)}$$

**Rpta.: C**

**PROBLEMA 21** Dado: $\theta \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right\rangle$

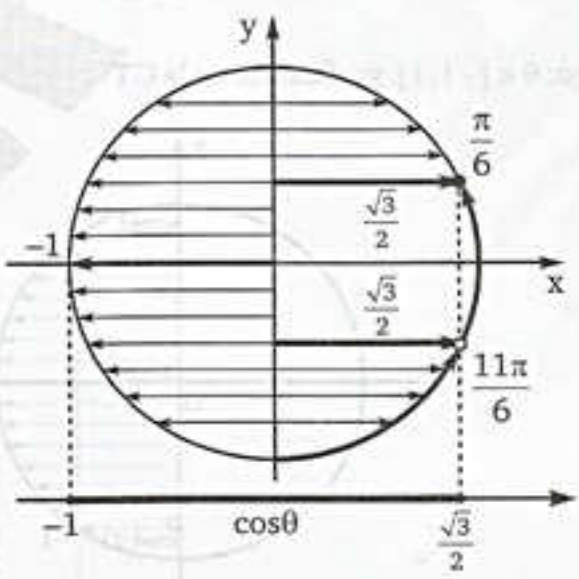
Determine la variación de:

$$T = \cos^2\theta + \cos\theta$$

**Resolución:** Completando cuadrados la expresión "T"

$$T = \left(\cos\theta + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

Luego con el dato $\frac{\pi}{6} \le \theta < \frac{11\pi}{6}$ llevando a la C T




Se observa de la C T: $-1 \le \cos\theta \le \frac{\sqrt{3}}{2}$

Sumando $\left(\frac{1}{2}\right)$: $$-\frac{1}{2} \le \cos\theta + \frac{1}{2} \le \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$$

team CALAPENSHKO


Elevando al cuadrado: $0 \le \left(\cos\theta + \frac{1}{2}\right)^2 \le \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2$

$$0 \le \left(\cos\theta + \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{4+2\sqrt{3}}{4}$$

Restando $\left(\frac{1}{4}\right)$: $-\frac{1}{4} \le \left(\cos\theta + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \le \left(\frac{4+2\sqrt{3}}{4}\right) - \frac{1}{4}$

$$-\frac{1}{4} \le \left(\cos\theta + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \le \frac{2\sqrt{3}+3}{4}$$

Finalmente: $-\frac{1}{4} \le T \le \frac{3+2\sqrt{3}}{4}$

$$\therefore \quad T \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{3+2\sqrt{3}}{4}\right]$$

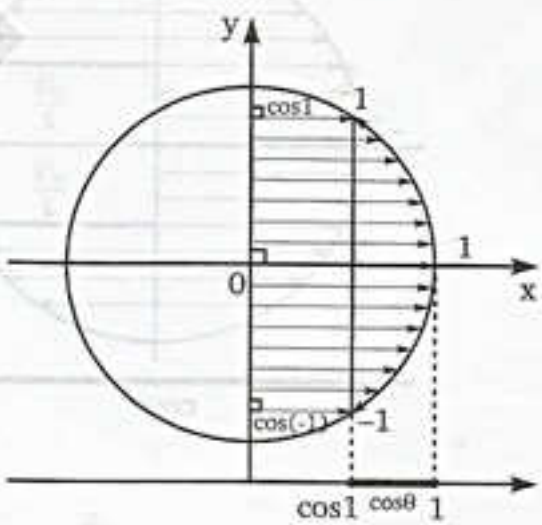
**PROBLEMA 22** Determine la extensión de:

$$f(x) = \frac{\cos(\cos x) + 1}{\cos(\cos x) + 2}$$

**Resolución:** Considerando que $x \in \mathbb{R}$: $-1 \le \cos x \le 1$

Haciendo un cambio de variable: $\cos x = \theta$

Luego: $\theta \in [-1; 1]$; graficando en la C T




De la C T: $-1 \le \theta \le 1$

$$\cos 1 \le \cos\theta \le 1$$

Reemplazando: $\theta = \cos x$: $\cos 1 \le \cos(\cos x) \le 1$

team CALAPENSHKO


Sumando (+2) miembro a miembro:

$$\cos 1 + 2 \le \cos(\cos x) + 2 \le 3$$

Tomando la inversa: $$\frac{1}{3} \le \frac{1}{\cos(\cos x) + 2} \le \frac{1}{\cos(1) + 2}$$

Multiplicando por (–1): $$-\frac{1}{\cos(1) + 2} \le -\frac{1}{\cos(\cos x) + 2} \le -\frac{1}{3}$$

Sumando (+1): $$1 - \frac{1}{\cos 1 + 2} \le 1 - \frac{1}{\cos(\cos x) + 2} \le 1 - \frac{1}{3}$$

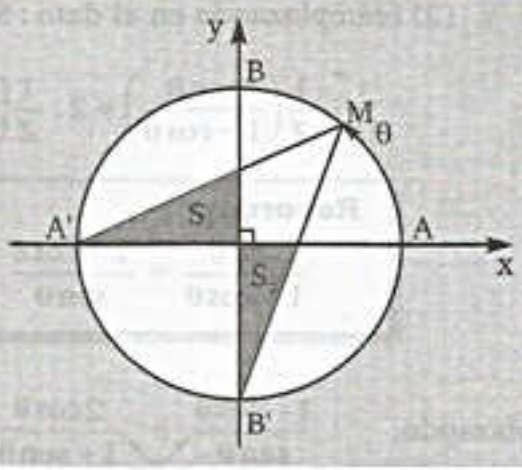
$$\frac{\cos 1 + 1}{\cos 1 + 2} \le \frac{\cos(\cos x) + 1}{\cos(\cos x) + 2} \le \frac{2}{3}$$

Finalmente: $$\frac{1 + \cos 1}{2 + \cos 1} \le f(x) \le \frac{2}{3}$$

$$\therefore \quad \mathbf{f(x) \in \left[\frac{1+\cos 1}{2+\cos 1}; \frac{2}{3}\right]}$$

**PROBLEMA 23** De la C T mostrada, se sabe que $S_1 = 2S_2$

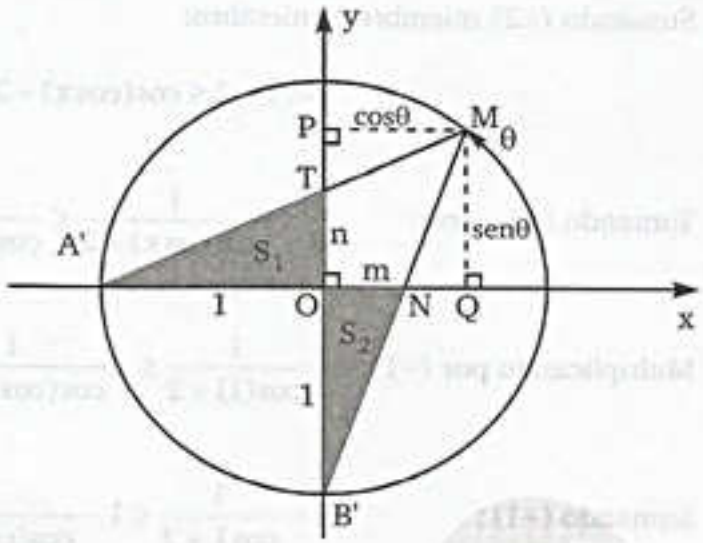
Calcule: $J = \operatorname{sen}\theta - \cos\theta$




**Resolución:** Del extremo de arco AM; trazamos perpendiculares a los ejes coordenados donde:

* $MQ = \operatorname{sen}\theta$
* $MP = \cos\theta$

Sea: $OT = n \ \wedge \ ON = m$




Se observa que el $\triangle_{A'OT} \sim \triangle_{A'QM}$

$$\frac{n}{1} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta} \rightarrow n = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}$$

Además: $S_1 = \frac{n \times 1}{2}$ reemplazando $\rightarrow S_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}\right)$ .....(1)

Se observa también que el $\triangle_{B'ON} \sim \triangle_{B'PM}$

$$\frac{m}{1} = \frac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta} \rightarrow m = \frac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}$$

Además: $S_2 = \frac{m \times 1}{2}$ reemplazando $\rightarrow S_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}\right)$ .....(2)

Del (1) y (2) reemplazando en el dato: $S_1 = 2S_2$

Luego: $$\frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}\right)$$

**Recordar:**

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

Reemplazando: $$\frac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{2\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}$$

Efectuando: $$1+\operatorname{sen}\theta-\cos\theta-\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$
$$\operatorname{sen}\theta-\cos\theta = 3\operatorname{sen}\theta\cos\theta-1 \quad .....(3)$$

Elevando al cuadrado $(3)^2$:

$$(\operatorname{sen}\theta-\cos\theta)^2 = (3\operatorname{sen}\theta\cos\theta-1)^2$$
$$1-2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 9\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta-6\operatorname{sen}\theta\cos\theta+1$$

Luego: $9\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta = 4\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

$$\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{4}{9} \quad .....(4)$$

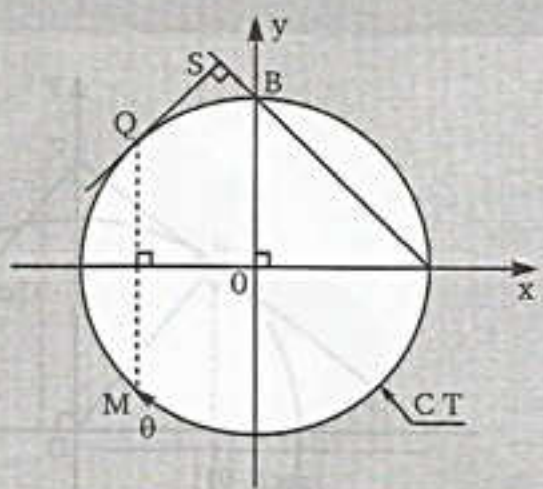
Reemplazando (4) en (3):

$$\operatorname{sen}\theta - \cos\theta = 3\left(\frac{4}{9}\right) - 1$$

$$\operatorname{sen}\theta - \cos\theta = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \quad \mathbf{J = \frac{1}{3}}$$

**PROBLEMA 24** De la circunferencia trigonométrica mostrada, determine el equivalente de: $\sqrt{2}(QS)$




**Resolución:**

Sea: $QS = m$

En el $\triangle_{DSQ}$:

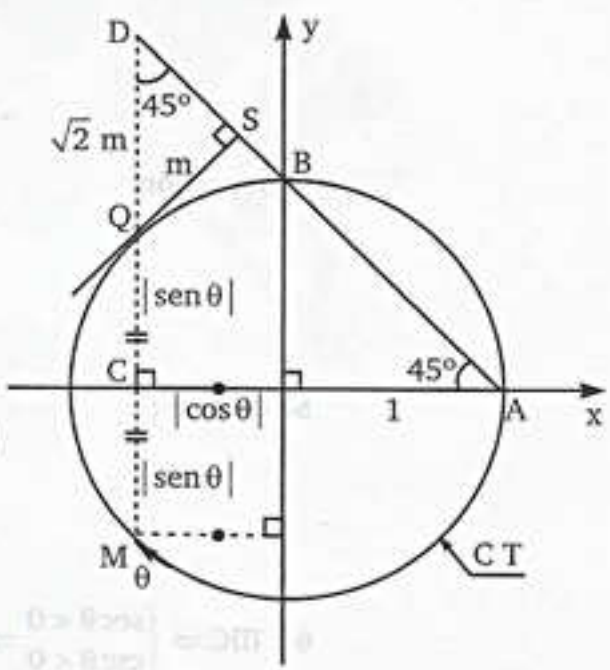
$$QD = \sqrt{2}\ m$$

En el $\triangle_{ACD}(45°)$:

$$CD = CA$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\,m + |\operatorname{sen}\theta| = |\cos\theta| + 1 \quad .....(1)$$

$$\theta \in \text{IIIC} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}\theta < 0 \\ \cos\theta < 0 \end{cases}$$

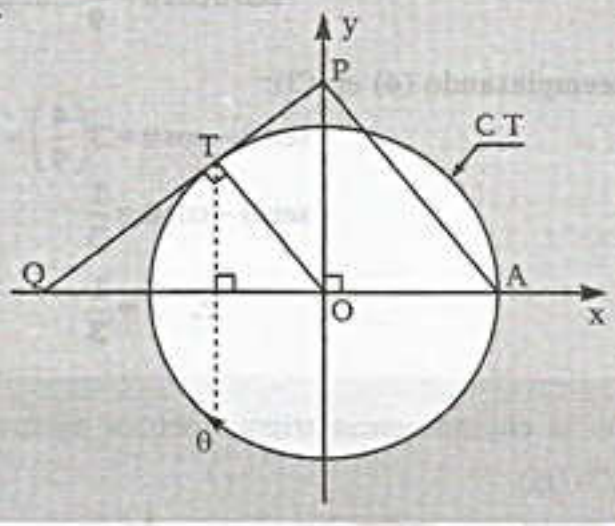



Luego en (*):

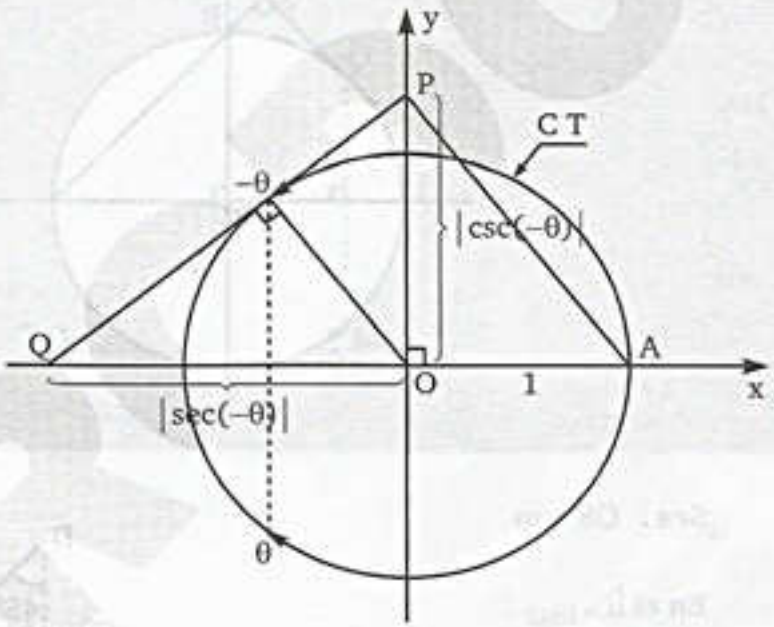
$$\sqrt{2}\ m + (-\operatorname{sen}\theta) = (-\cos\theta) + 1$$

$$\therefore \quad \mathbf{\sqrt{2}\ m = 1 + \operatorname{sen}\theta - \cos\theta}$$

**PROBLEMA 25** En la circunferencia trigonometría mostrada, determine el área de la región triangular APQ.




**Resolución:**




Observación: Si $\theta \in IIIC \Rightarrow -\theta \in IIC$

$$\text{Área } \Delta_{APQ} = \frac{AQ \times PO}{2} = \frac{(|\sec(-\theta)|+1)|\csc(-\theta)|}{2}$$

Se cumple : $\sec(-\theta) = \sec\theta \quad \wedge \quad \csc(-\theta) = -\csc\theta$

$$\text{Área } \Delta_{APQ} = \frac{(|\sec\theta|+1)|-\csc\theta|}{2} = \frac{(|\sec\theta|+1)|\csc\theta|}{2}$$

$$\theta \in IIIC \Rightarrow \begin{cases} \sec\theta < 0 \\ \csc\theta < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Área } \Delta_{APQ} = \frac{(-\sec\theta+1)(-\csc\theta)}{2}$$

$$\therefore \quad \textbf{Área } \Delta APQ = \frac{\sec\theta - 1}{2\operatorname{sen}\theta}$$

team CALAPENSHKO


## PROBLEMAS PROPUESTOS

**1.** Si el punto $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; y_0\right)$ se encuentra en el tercer cuadrante y pertenece a la C T ¿El valor de $y_0$ es?

A) $\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

**2.** Cual de las siguientes alternativas es el de mayor valor:

A) sen30° B) sen80° C) sen135°
D) sen210° E) sen270°

**3.** Que valor puede tomar la expresión:

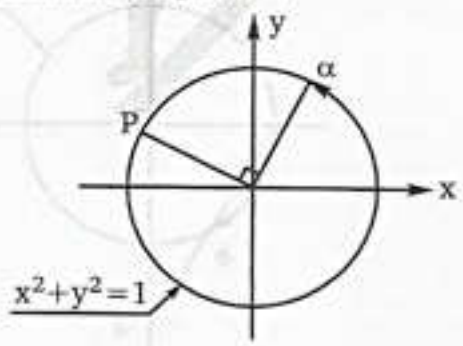
$$E = \frac{8\cos\theta - 3}{5}$$

A) $\left[-\frac{3}{5}; 1\right]$ B) $\left[-\frac{11}{5}; 1\right]$

C) $\left[-\frac{11}{5}; \frac{3}{5}\right]$

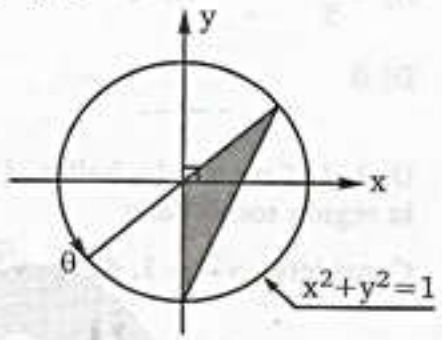
D) $\left[-\frac{11}{5}; -1\right]$ E) $\left[-1; -\frac{3}{5}\right]$

**4.** De la figura mostrada, indique las coordenadas del punto "P"




A) (cosα; senα)
B) (-senα; cosα)
C) (-cosα; senα)
D) (-senα; -senα)
E) (-cosα; -senα)

**5.** Hallar el área de la región triangular sombreada en términos de la variable angular "θ".



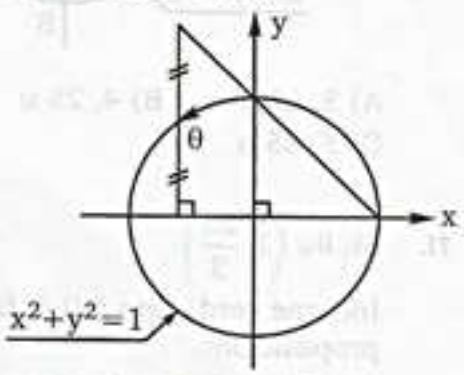

A) $\frac{\text{sen}\theta}{2}$ B) $\frac{\cos\theta}{2}$ C) $-\frac{\text{sen}\theta}{2}$

D) $-\frac{\cos\theta}{2}$ E) $\frac{\text{sen}\theta\cos\theta}{2}$

**6.** De la C T Mostrada, halle:

$$K = 2\text{sen}\theta + \cos\theta$$

A) 0,5
B) 1
C) 2
D) 0,25
E) 1,5




**7.** Calcule la suma del máximo y mínimo valor de la expresión:

$$R = 4\text{sen}\alpha + 5\cos\beta - 3$$

Siendo las variables angulares α y β independientes entre sí:

A) –10 B) –8 C) –6
D) –4 E) –2

**8.** Siendo "P" el punto extremo de arco "θ" del IIIC en posición normal en una circunferencia trigonométrica. Halle el área de la región triangular APA'

A) senθ B) cosθ C) -senθ
D) senθ + cosθ E) -cosθ

**9.** Halle el mínimo valor de "m" que cumple:

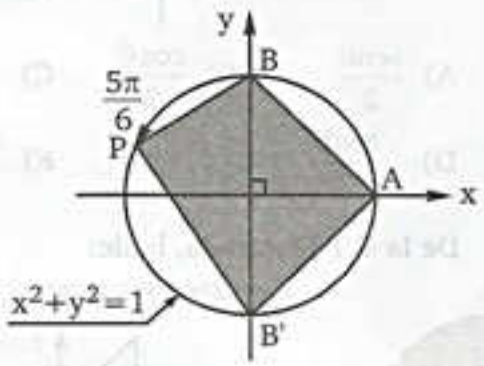
$$\cos^2 x = \frac{m+1}{2} + \frac{m-1}{3}$$

A) $-\frac{1}{5}$ B) -1 C) $-\frac{1}{2}$

D) 0 E) $-\frac{1}{3}$

**10.** De la C T mostrada, hallar el perímetro de la región sombreada

Considere: $\sqrt{2} = 1,41$ ; $\sqrt{3} = 1,73$




A) 3, 85 u B) 4, 25 u C) 4, 75 u

D) 5, 35 u E) 5, 55 u

**11.** Si: $\theta \in \left\langle 1; \frac{2\pi}{3} \right]$

Indique verdadero (V) ó falso (F) a cada proposición:

( ) El máximo valor de $\operatorname{sen}\theta$ es 1

( ) El mínimo valor de $\operatorname{sen}\theta$ es 0, 5

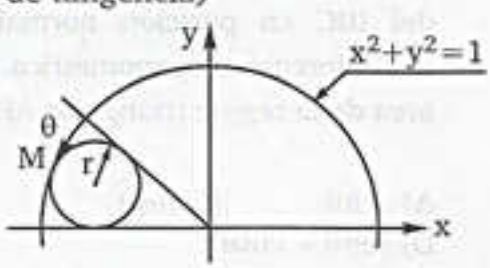
( ) El mínimo valor de $\cos 2\theta$ es $-1$

( ) El máximo valor de $\cos 3\theta$ es 1

A) VVVV B) VFVF C) FFVV

D) VFVV E) FFFV

**12.** En la figura, halle la longitud de "r" en función de la variable angular "θ" (m: es punto de tangencia)




A) $\frac{1}{1-\operatorname{sen}\theta}$ B) $\frac{1}{\csc\theta + 1}$ C) $\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + 1}$

D) $\frac{1}{\sec\frac{\theta}{2} - 1}$ E) $\frac{1}{\csc\frac{\theta}{2} - 1}$

**13.** Halle el mayor valor negativo de "a" que cumple:

$$\sec x = \frac{a-2}{5}$$

A) –5 B) –4 C) –3

D) –2 E) –1

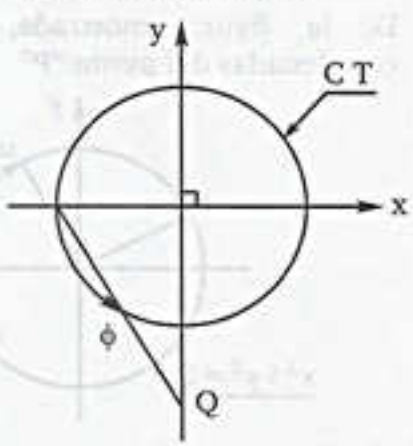
**14.** Consideramos los arcos en posición normal "θ", "$\theta + \frac{\pi}{2}$", "$\theta + \pi$". Siendo $P_1(x_1 ; y_1)$ y $P_3(x_3 ; y_3)$. Los puntos extremos de arcos anteriores.

Reduzca: $E = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{y_1 + y_2 + y_3}\right)^{-1}$

A) $\operatorname{sen}\theta$ B) $\cos\theta$ C) $\tan\theta$

D) $-\cot\theta$ E) $-\cos\theta$

**15.** De la circunferencia trigonométrica, exprese la ordenada del punto Q en términos de variable angular "ϕ"

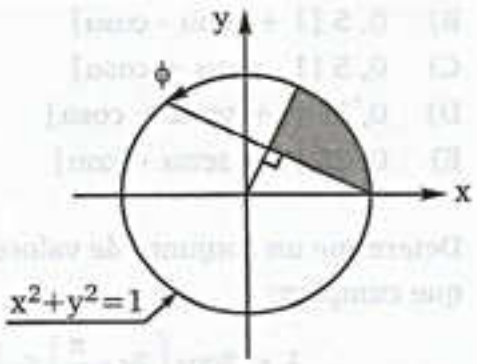



A) $\frac{\operatorname{sen}\phi}{1+\cos\phi}$ B) $\frac{\operatorname{sen}\phi}{1-\cos\phi}$ C) $\frac{\cos\phi}{1+\operatorname{sen}\phi}$

D) $\frac{\cos\phi}{1-\operatorname{sen}\phi}$ E) $\frac{1+\operatorname{sen}\phi}{1-\cos\phi}$

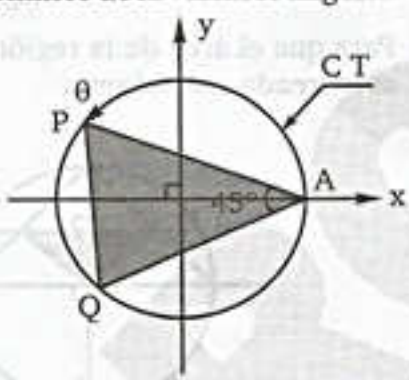
team CALAPENSHKO


**16.** Halle el área de la región sombreada.




A) $0,5(\phi - \cos\phi)$
B) $0,25(\phi - \cos\phi)$
C) $0,5(\phi - \operatorname{sen}\phi)$
D) $0,25(\phi - \operatorname{sen}\phi)$
E) $0,5(\phi - \operatorname{sen}\phi + \cos\phi)$

**17.** De la circunferencia trigonométrica mostrada, halle el área de la región triángular APQ en términos de la variable angular "θ"




A) $\dfrac{1+\operatorname{sen}\theta+\cos\theta}{2}$
B) $\dfrac{(1+\operatorname{sen}\theta)(1+\cos\theta)}{2}$
C) $\dfrac{1+\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}{2}$
D) $\dfrac{(1-\operatorname{sen}\theta)(1-\cos\theta)}{2}$
E) $\dfrac{1-\operatorname{sen}\theta+\cos\theta}{2}$

**18.** ¿Cual ó cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

I. $\tan 2 < \tan 3\dfrac{\pi}{4} < \tan 3$

II. $\sec 2 < \sec 3\dfrac{\pi}{4} < \sec 3$

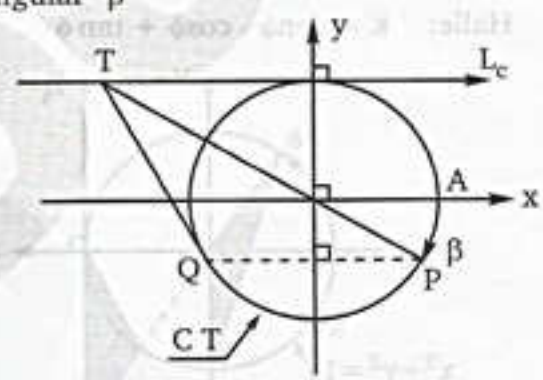
III. $\csc 2 < \csc 3\dfrac{\pi}{4} < \csc 3$

A) sólo I B) sólo II C) sólo III
D) I y II E) todas

**19.** Si se cumple:
$(1+\operatorname{sen}x)(2+\operatorname{sen}x)(3+\operatorname{sen}x)...(n+\operatorname{sen}x)=0$
Halle:
$(1+\cos x)(2+\cos x)(3+\cos x)...(m+\cos x)$
$(m \wedge n \in \mathbb{Z}^+)$

A) 0 B) 1 C) m!
D) $2^n$ E) n!

**20.** Exprese las coordenadas del punto medio del siguiente $\overline{TQ}$ en términos de la variable angular "β"




A) $\left(\dfrac{\operatorname{ctg}\beta}{2};\dfrac{1+\cos\beta}{2}\right)$
B) $\left(\dfrac{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{sen}\beta}{2};\dfrac{\cos\beta}{2}\right)$
C) $(\cot\beta\ ;\ 1+\operatorname{sen}\beta)$
D) $\left(\dfrac{\operatorname{ctg}\beta}{2};\dfrac{1-\operatorname{sen}\beta}{2}\right)$
E) $\left(\dfrac{\operatorname{ctg}\beta-\cos\beta}{2};\dfrac{1+\operatorname{sen}\beta}{2}\right)$

**21.** Halle la suma de todos los valores enteros que toma la expresión:

$$E = \operatorname{sen}\alpha + |\cos\beta| + \operatorname{sen}^2\theta$$

Sabiendo que α, β y θ son variables angulares independientes.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

team CALAPENSHKO


**22.** Si: $\frac{2\pi}{3} \leq x < \frac{5\pi}{4}$. Halle los valores de:

$$P(x) = \operatorname{sen} x \cdot \tan x \cdot \sec x$$

A) [0; 1] B) [0; 3⟩ C) ⟨0; 3⟩
D) ⟨0; 3] E) [0; 3]

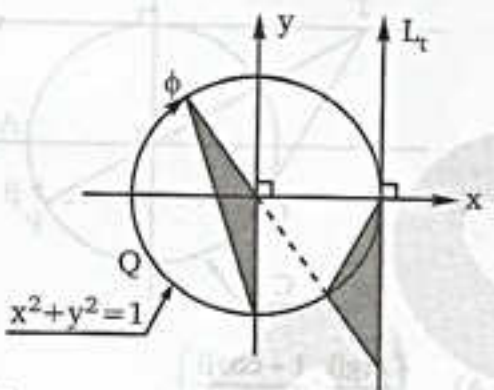
**23.** El mínimo valor de: $f(x) = |\cot x|$

Para; $x \in \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{4}\right]$ es:

A) 0 B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
D) 1 E) $\sqrt{3}$

**24.** Si las áreas de las regiones sombreadas son del mismo valor.

Halle: $K = \operatorname{sen}\phi - \cos\phi + \tan\phi$




A) 0 B) 1 C) –1
D) 0, 5 E) –0, 5

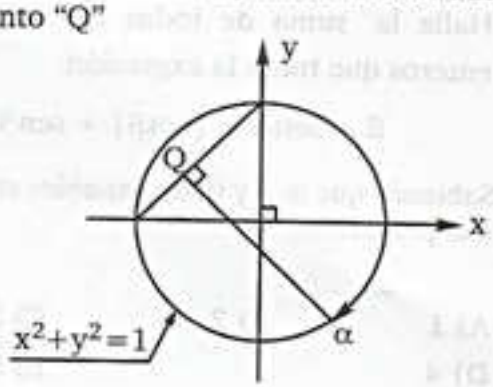
**25.** Halle la suma de valores enteros de:

$$J = \pi \sec\left(\omega + \frac{133\pi}{6}\right)$$

Para: $\omega \in$ II C

A) –22 B) –15 C) –21
D) –9 E) –5

**26.** De la C T mostrada, halle la ordenada del punto "Q"




A) $0, 5[1 + \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha]$
B) $0, 5[1 + \operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha]$
C) $0, 5[1 - \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha]$
D) $0, 25[1 + \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha]$
E) $0, 25[1 + \operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha]$

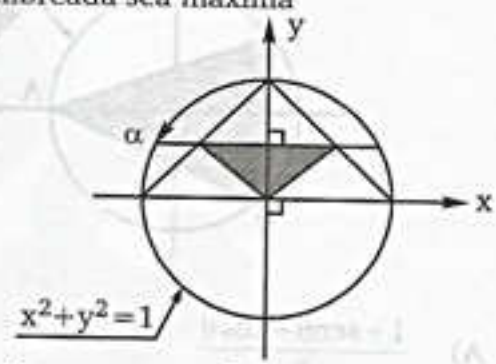
**27.** Determine un conjunto de valores de "z" que cumplen:

$$1 < 2\cos\left(2z + \frac{\pi}{3}\right) \leq \sqrt{3}$$

A) $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\rangle$ B) $\left\langle\frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}\right]$ C) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right\rangle$
D) $\left\langle\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}\right]$ E) $\left\langle\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right]$

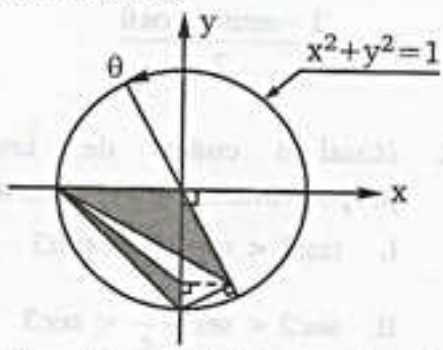
**28.** Halle el valor de "$\alpha$", si: $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$,

Para que el área de la región triangular sombreada sea máxima




A) $\frac{2\pi}{3}$ B) $\frac{3\pi}{4}$ C) $\frac{4\pi}{5}$
D) $\frac{5\pi}{6}$ E) $\frac{7\pi}{8}$

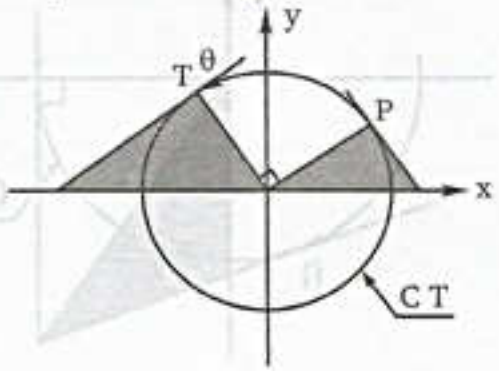
**29.** De la figura mostrada, halle el área de las regiones sombreadas.




A) $\operatorname{sen}\theta$ u² B) $\cos\theta$ u² C) $\operatorname{sen}\theta\cos\theta$ u²
D) 0. 25 u² E) 0. 5 u²

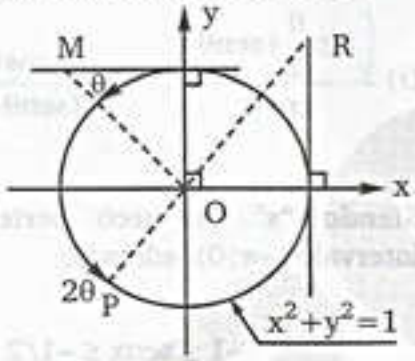
team CALAPENSHKO


**30.** De la CT mostrada, halle el mínimo valor del área de las regiones sombreadas. T y P son puntos de tangencia.




A) $0,5u^2$ B) $1u^2$ C) $\sqrt{2}u^2$
D) $\sqrt{3}u^2$ E) $2u^2$

**31.** Halle el valor de "θ", sabiendo que el área de la región triangular MOR es : $1\ u^2$

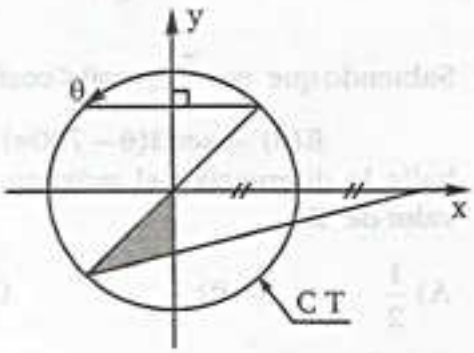



A) $\frac{5\pi}{9}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $\frac{3\pi}{4}$
D) $\frac{5\pi}{8}$ E) $\frac{25\pi}{36}$

**32.** Si el área de la región sombreada mide:

$$\frac{A\,\text{sen}\,\theta\,\cos\theta}{B+C\cos\theta}$$

Halle el valor de: $E = A + B + C$




A) 0 B) 1 C) –1
D) 2 E) –2

**33.** Dado:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\tan\theta} + \sqrt{\tan\alpha - 1}$$

Determine la variación de $\text{sen}(\alpha+\phi)$, si:

$$-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}\ ;\ -\pi < \alpha < 0$$

A) $[-1;0]$ B) $\langle -1;0\rangle$ B) $\langle -1;0]$
D) $[-1;1]$ E) $\langle -1;1\rangle$

**34.** De la siguiente condición:

$$\text{vers}\,3\theta = 1 + \text{sen}\,\frac{\pi}{5}$$

Halle el mayor valor de "θ" en el recorrido de: $\left\langle \frac{\pi}{2};\ \pi \right\rangle$

A) $\frac{3\pi}{10}$ B) $\frac{5\pi}{4}$ C) $\frac{4\pi}{3}$
D) $\frac{9\pi}{10}$ E) $\frac{7\pi}{5}$

**35.** Determine los valores de "x" en:

$$(x-1)\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right) = 2x$$

Sabiendo que: $\frac{\pi}{4} < \theta \le \frac{5\pi}{6}$

A) $x \in \langle -1;\ 2\sqrt{3}-3\rangle$
B) $x \in \langle 0;\ 2\sqrt{3}-3\rangle$
C) $x \in \langle -1;\ 3\sqrt{3}-3\rangle$
D) $x \in \langle -2;\ 2\sqrt{3}+3\rangle$
E) $x \in \langle 2;\ 2\sqrt{3}+3\rangle$

**36.** Sabiendo que:

$$2\tan\phi = \tan\theta + 3\cot\theta$$

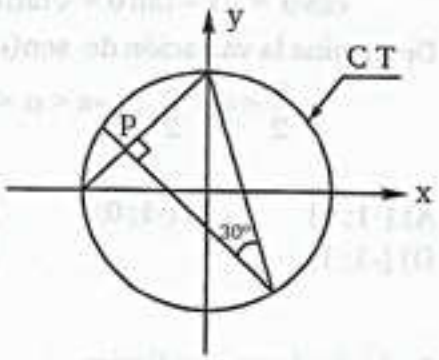
Señale la extensión de: $\cos\phi$

A) $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ B) $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$
C) $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right]-\{0\}$
D) $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]-\{0\}$ E) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right]-\{0\}$

team CALAPENSHKO



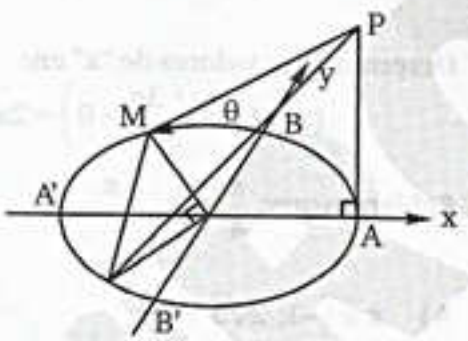
**37.** De la figura, halle la abscisa del punto "P".




A) $-\left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right)$ B) $-\left(\frac{\sqrt{3}+2}{4}\right)$ C) $-\left(\frac{\sqrt{2}+1}{4}\right)$

D) $-\left(\frac{\sqrt{2}+1}{8}\right)$ E) $-\left(\frac{\sqrt{3}+3}{4}\right)$

**38.** En la C T mostrada: AP = 1 es perpendicular al plano de la circunferencia. Si: $\text{sen}\theta - \cos\theta = 1{,}25$, halle la suma de los cuadrados de los lados del triángulo NPM.

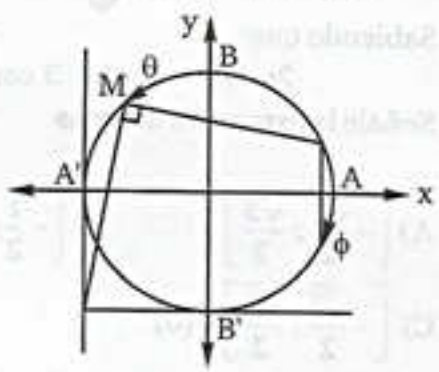



A) 8,5 B) 9,5 C) 10,5
D) 12,5 E) 14,5

**39.** En la C T mostrada:

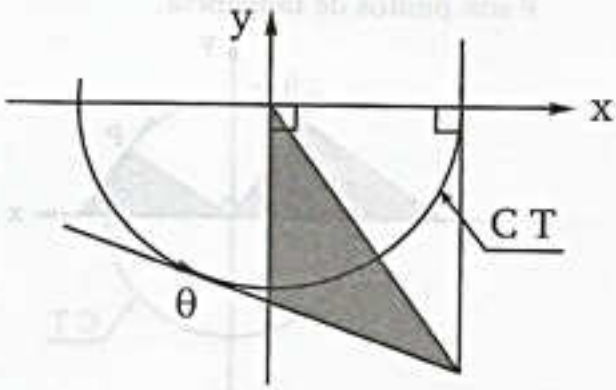
$\text{sen}\theta + \cos\theta = m$ ; $\text{sen}\phi - \cos\phi = n$

Halle: $C = \cos\theta\cos\phi - \text{sen}\theta\,\text{sen}\phi$




A) 1+m–n B) 1–m–n C) 1–m+n
D) 1+m+n E) m+n–1

**40.** Del gráfico, halle el área de la región triangular sombreada.




A) $\frac{(1-\text{sen}\theta)}{(2+\cos\theta)}$ B) $\frac{-\tan\theta}{(1+\cos\theta)}$

C) $\frac{-\text{sen}\theta}{(2+\cos\theta)}$

D) $\frac{\left(\tan\frac{\theta}{2}+\text{sen}\theta\right)}{\cos\theta}$ E) $\frac{\cos\theta}{(\text{sen}\theta-1)}$

**41.** Siendo "x" un arco perteneciente al intervalo $\langle -\pi; 0\rangle$; además:

$$-1 \le \text{sen}x \le -1/2$$

Halle la variación de: $L = \tan\left(\frac{x}{2}\right)+2$

A) $\langle 0; \sqrt{3}\rangle$ B) $\langle -\sqrt{3}; \sqrt{3}\rangle - \{0\}$

C) $\langle -\sqrt{3}; \sqrt{3}\rangle$

D) $\langle -\sqrt{3}; 0\rangle$ E) $\langle -1; 1\rangle$

**42.** Sabiendo que $\cos\frac{\pi}{6} \le \cos\theta \le \cos 6$; además:

$$R(\theta) = \text{sen}3(\theta - 700\pi)$$

halle la diferencia del máximo y mínimo valor de "R"

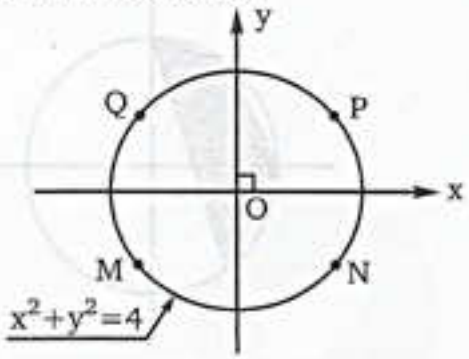
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{8}$

D) $-\frac{1}{4}$ E) $-\frac{1}{2}$

team CALAPENSHKO



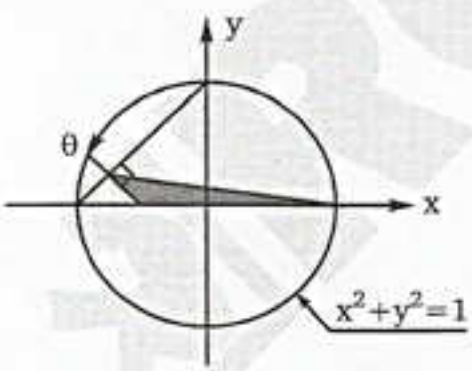
**43.** En el gráfico los puntos: P, Q, M y N son extremos de los arcos en posición normal: $\alpha'$ , $\beta'$ , $\theta'$ y $\omega'$ respectivamente los cuales han sido determinados por los ángulos centrales: $\alpha$ rad, $\beta$ rad, $\theta$ rad y $\omega$ rad respectivamente y menores que una vuelta. Determine la verdad o falsedad de:
(Q; O; N son colineales)




I. $\operatorname{sen}\alpha' > \csc\beta'$
II. $\cos\theta' + \cos\alpha' > 0$
III. $\sec(\beta' + \pi/2) - \csc\omega' < 0$

A) VVF B) VVV C) FFF
D) FVF E) FFV

**44.** Halle el área de la región sombreada en términos de la variable angular $\theta$.



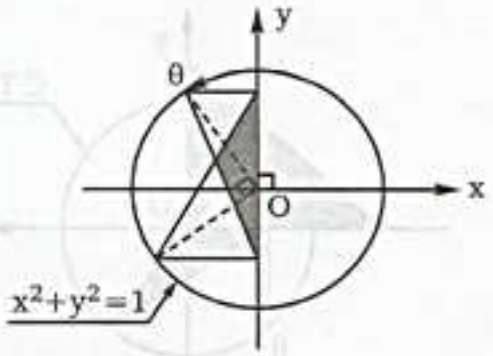

A) $\frac{-\operatorname{sen}\theta}{4}$ B) $\frac{-\operatorname{sen}2\theta}{4}$ C) $\frac{\operatorname{sen}2\theta}{4}$
D) $\frac{\operatorname{sen}\theta}{4}$ E) $\frac{-\operatorname{sen}\theta}{2}$

**45.** Halle la extensión de: $H = \cot(\operatorname{sen}\alpha) + 1$

$a \in \langle 0; 2\pi/3\rangle$

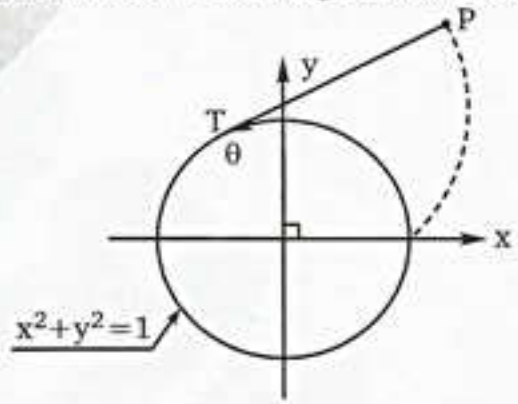
A) $[\cot(1) + 1; +\infty\rangle$
B) $\langle\cot(1) + 1; +\infty\rangle$
C) $[\cot(1); +\infty\rangle$
D) $[\cot(1/2) + 1; +\infty\rangle$
E) $\langle\cot(1/2) + 1; +\infty\rangle$

**46.** En la C T mostrada, halle el área de la región sombreada.




A) $\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{4}$ B) $\frac{\operatorname{sen}2\theta}{4}$ C) $\frac{\cos^2\theta}{4}$
D) $\frac{\cos2\theta}{4}$ E) $\frac{\operatorname{sen}^3\theta}{4}$

**47.** Una cuerda que envuelve a una C T se desarrolla como en la figura mostrada.




Siendo la cuerda tangente a la C T en T. Halle las coordenadas del punto P(x; y)

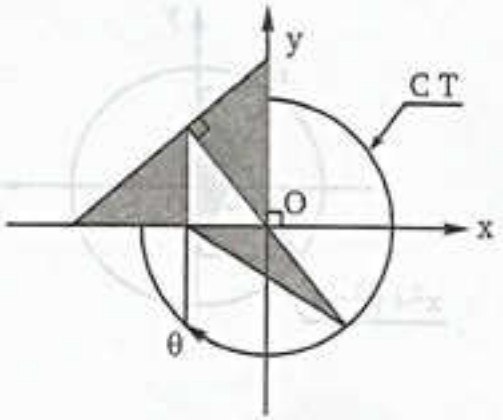
A) $(\theta\operatorname{sen}\theta - \cos\theta; \operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta)$
B) $(\theta\operatorname{sen}\theta + \cos\theta; \operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta)$
C) $(\theta\operatorname{sen}\theta - \cos\theta; \operatorname{sen}\theta + \theta\cos\theta)$
D) $(\theta\operatorname{sen}\theta + \cos\theta; \operatorname{sen}\theta + \theta\cos\theta)$
E) $(\theta\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta; \operatorname{sen}\theta - \cos\theta)$

**48.** Hallar el mínimo valor de:

$$F(\theta) = \cos(\operatorname{sen}^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta)$$

A) cos1 B) cos2 C) cos3
D) cos4 E) cos5

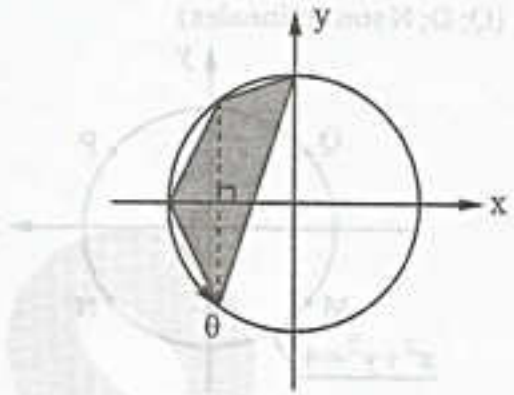
**49.** En la C T mostrada, halle el mínimo valor del área de la región sombreada




A) 4 B) 3 C) 2
D) 1 E) 0,5

**50.** En la C T mostrada; $\theta \in \left[\frac{7\pi}{6}; \frac{4\pi}{3}\right]$

Halle la variación del área "S" de la región sombreada y dar como respuesta: "$S^2_{Máx.} + S^2_{Mín.}$"




A) 5 B) 4 C)3
D) 2 E) 1

**A todo el público en general:**

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

**Este libro no debe ser prostituito monetariamente**, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

**28 de agosto del 2020**

team CALAPENSHKO

Capítulo 8

# Identidades Trigonométricas

**CAPACIDADES**

- Conocer las diversas identidades trigonométricas.
- Aplicar identidades trigonométricas a la resolución de problemas.

## TRIGONOMETRÍA EN MEDIO ORIENTE

Al-Batani, también conocido como Albategnius (alrededor de 850 - 929), fue un príncipe árabe y astrónomo. Su nombre completo es Abu Abdallah Mohammad ibn Jabir ibn Sinan al-Raqqi al-Harrani al-Sabi al-Battani, aunque se usa normalmente el abreviado. Su nombre deriva de su ciudad natal Harrán cerca de Urfa (Mesopotamia). Es muy conocido por haber logrado una determinación precisa del año solar como 365 días, 5 horas, 46 minutos y 24 segundos.

ALBATEGNIUS
PRÍNCIPE ÁRABE

### OBRA MATEMÁTICA

Se puede decir que su obra se centra en el estudio e indagación de relaciones matemáticas trigonométricas, entre ellas se destaca:

$$\tan\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \qquad \sec\alpha=\sqrt{1+\tan^2\alpha}$$

Proporcionó una solución para la ecuación sin x = a cos x descubriendo la fórmula:

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$$

Empleó y usó la idea de al-Marwazi de las tangentes ("sombras") para resolver ecuaciones en las que están involucrados las tangentes y las cotangentes, compilando tablas con sus valores.

### ASTRONOMÍA

De sus observaciones en Aracte y Damasco, donde murió, fue capaz de corregir algunos de los hallazgos de Ptolomeo, que previamente eran tenidos como auténticos. Se dio cuenta, por ejemplo, que el punto que Ptolomeo había indicado como afelio se desplazaba y calculó la velocidad de dicho movimiento con bastante exactitud.

También determinó el momento del equinoccio con un error menor a las dos horas y logró calcular con muy poco error el ángulo que forma el eje de la Tierra con su plano de rotación.

team CALAPENSHKO


## INTRODUCCIÓN

Si consideramos la igualdad $(x + 2) \cdot (x - 2) = 0$, podemos observar fácilmente que esta es cierta sí y sólo sí $x = -2$ ó $x = 2$; pero si consideramos ahora la igualdad $(x + 2) \cdot (x - 2) = x^2 - 4$, podemos observar que esta igualdad se va a verificar para todo valor de x. Estos casos los diferenciamos de la siguiente manera, las del **primer tipo** se denominan **ecuaciones**, y las del **segundo tipo** se denomina **identidades**. Estas identidades van a ser muy importantes para simplificar expresiones matemáticas, y de mucha importancia en el estudio de la Física, Economía, etc. Daremos definiciones importantes para poder comprender bien el presente tema.

# IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

## NOCIONES PREVIAS

### VALOR ADMISIBLE:

Un valor "a" es un valor admisible de "x" para F(x), si sólo si, cuando se sustituye en F(x); se determina un valor para F(x).

**Ejemplos:**

**i)** $F(x) = \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow$ los valores admisibles de "x" para F(x), son los elementos del conjunto: $A = \{x / x \in R \wedge |x| \leq 2\}$ ya que cualquier valor fuera de dicho conjunto como: $x = 3$, al reemplazarlo ocasiona un valor no determinado para F(x).

**ii)** $F(x) = \tan x \Rightarrow$ los valores admisibles de "x" para F(x) son los elementos del conjuntos: $B = \left\{x / x \in R - (2n+1)\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}\right\}$ debido a qué $B = \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}$ no está definida $\forall\ n \in \mathbb{Z}$.

### IDENTIDAD:

Viene a ser aquella igualdad que se cumple para el conjunto de valores admisibles.

## IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Una identidad trigonométrica es aquella igualdad en la que intervienen razones trigonométricas que son verificadas para cualquier valor admisible de la variable.

Podemos clasificar a las identidades trigonométricas en los siguientes cuatro grupos:

I. Identidades trigonométricas fundamentales
II. Identidades trigonométricas para arco compuesto.
III. Identidades trigonométricas para arcos múltiples (doble, mitad y triple).
IV. Identidades trigonométricas para la transformación de la suma o diferencia de senos o cosenos a producto viceversa.

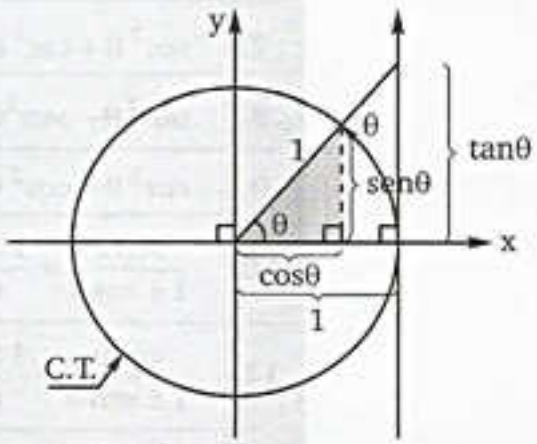
## IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

Involucra a todas aquellas identidades trigonométricas que relacionan las diferentes razones trigonométricas para un mismo ángulo.

team CALAPENSHKO


En la C.T. mostrada se observa:

- $\csc\theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$
- $\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$
- $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$




A continuación presentamos las identidades más utilizadas clasificándolas de la siguiente manera:

## IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS RECÍPROCAS:

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta \cdot \csc\theta = 1 \quad ; \forall\, \theta \neq \{n\pi\},\ n \in \mathbb{Z}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow \cos\theta \cdot \sec\theta = 1 \quad ; \forall\, \theta \neq \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\},\ n \in \mathbb{Z}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \Rightarrow \tan\theta \cdot \cot\theta = 1 \quad ; \forall\theta \neq \left\{n\frac{\pi}{2}\right\},\ n \in \mathbb{Z}$$

## IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS POR COCIENTE:

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \ ; \ \forall\theta \neq \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\} \quad \text{y} \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \ ; \ \forall\theta \neq \{n\pi\}$$

## IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS PITAGÓRICAS:

Se observa en el triángulo sombreado:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta \\ \cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta \end{cases} \qquad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \Rightarrow \begin{cases} \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1 \\ \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1 \end{cases}$$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta \Rightarrow \begin{cases} \cot^2\theta = \csc^2\theta - 1 \\ \csc^2\theta - \cot^2\theta = 1 \end{cases}$$

## IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS AUXILIARES:

A partir de las identidades trigonométricas anteriores y mediante el uso de identidades algebraicas, se pueden demostrar las siguientes identidades auxiliares:

| | |
|---|---|
| 1. | $\operatorname{sen}^4\theta + \cos^4\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta$ |
| 2. | $\operatorname{sen}^6\theta + \cos^6\theta = 1 - 3\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta$ |
| 3. | $\operatorname{sen}^8\theta + \cos^8\theta = 1 - 4\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta + 2\operatorname{sen}^4\theta\cos^4\theta$ |
| 4. | $(1 \pm \operatorname{sen}\theta \pm \cos\theta)^2 = 2(1 \pm \operatorname{sen}\theta)(1 \pm \cos\theta)$ |
| 5. | $(\operatorname{sen}\theta \pm \cos\theta)^2 = 1 \pm 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$ |
| 6. | $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta\csc\theta$ |

team CALAPENSHKO


| | |
|---|---|
| 7. | $\sec^2\theta + \csc^2\theta = \sec^2\theta.\csc^2\theta$ |
| 8. | $\tan^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \tan^2\theta.\operatorname{sen}^2\theta$ |
| 9. | $\cot^2\theta - \cos^2\theta = \cot^2\theta.\cos^2\theta$ |
| 10. | $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1 \pm \cos\theta} = \dfrac{1 \mp \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$ |
| 11. | $\dfrac{\cos\theta}{1 \pm \operatorname{sen}\theta} = \dfrac{1 \mp \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ |
| 12. | $(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta - 1)(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta + 1) = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$ |

**DEMOSTRACIONES:**

2. $\operatorname{sen}^6\theta + \cos^6\theta = 1 - 3\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta$

Partimos de la Ident. Trig. Pitag.

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Elevando al cubo: $\operatorname{sen}^6\theta + \cos^6\theta + 3\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\underbrace{(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)}_{1} = 1$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^6\theta + \cos^6\theta = 1 - 3\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta$$

4. $(1 + \operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2 = 2(1 + \operatorname{sen}\theta)(1 + \cos\theta)$

Partimos de $(1 + \operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2$

$$= 1 + (\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) + 2\operatorname{sen}\theta + 2\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$
$$= 1 + 1 + 2\operatorname{sen}\theta + 2\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$
$$= 2(1 + \operatorname{sen}\theta + \cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta)$$
$$= 2(1 + \operatorname{sen}\theta)(1 + \cos\theta)$$

**PROPIEDAD:**

Si $a\operatorname{sen}x + b\cos x = c$

donde: $a^2 + b^2 = c^2$

Se cumple: $\operatorname{sen}x = \dfrac{a}{c} \wedge \cos x = \dfrac{b}{c}$

**DEMOSTRACIÓN**

Se tiene $a\operatorname{sen}x + b\cos x = c$ ...(1)

Despejamos senx $\Rightarrow a\operatorname{sen}x = c - b\cos x$

elevando al cuadrado $a^2\operatorname{sen}^2x = c^2 - 2bc\cos x + b^2\cos^2 x$

Ademas por la I.T.P : $\operatorname{sen}^2x + \cos^2 x = 1$

team CALAPENSHKO


$$\Rightarrow a^2(1-\cos^2 x) = c^2 - 2bc\cos x + b^2\cos^2 x$$

$$\Rightarrow 0 = (a^2+b^2)\cos^2 x - 2bc\cos x + (c^2-a^2)$$

Pero $a^2 + b^2 = c^2$ , reemplazando :

$$0 = c^2\cos^2 x - 2bc\cos x + b^2$$

$$0 = (c\cos x - b)^2 \Rightarrow \cos x = \frac{b}{c} \qquad ...(2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$a\operatorname{sen} x + b\left(\frac{b}{c}\right) = c$$

$$\Rightarrow a\operatorname{sen} x = \frac{c-b^2}{c} = \frac{c^2-b^2}{c} = \frac{a^2}{c}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{a}{c}$$

$$\therefore \operatorname{sen} x = \frac{a}{c} \wedge \cos x = \frac{b}{c}$$

**Ejemplo:** $3\operatorname{sen} x - 4\cos x = 5$

Aplicando la propiedad se verifica: $(3)^2 + (-4)^2 = 5^2$

$$\therefore \operatorname{sen} x = \frac{3}{5} \wedge \cos x = -\frac{4}{5}$$

A continuación se tiene la demostración de algunas de las identidades auxiliares dadas anteriormente:

- Demostrar que: $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta \cdot \csc\theta$

**Demostración:**

De las I.T Cociente: $\tan\theta + \cot\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

Operando tenemos: $\tan\theta + \cot\theta = \dfrac{\overbrace{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}^{1}}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}$ (I.T. Recíprocas)

Ordenando convenientemente: $\therefore \tan\theta + \cot\theta = \underbrace{\frac{1}{\cos\theta}}_{\sec\theta} \cdot \underbrace{\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}}_{\csc\theta}$ (I.T. Recíprocas)

- Demostrar que: $\operatorname{sen}^4\theta + \cos^4\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta.\cos^2\theta$

**Demostración:**

De la I.T. Pitagórica tenemos: $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

Elevando al cuadrado: $\operatorname{sen}^4\theta + 2\operatorname{sen}^2\theta.\cos^2\theta + \cos^4\theta = 1^2$

Luego despejando obtenemos: $\therefore \operatorname{sen}^4\theta + \cos^4\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta\cos^4\theta$

team CALAPENSHKO



## OBSERVACIÓN

Si se tiene la suma o diferencia de secx y tanx, por ejemplo:

$$\sec x+\tan x=m\ ,\ m\neq 0$$

A partir de ello, se puede obtener todas las razones trigonométricas de x.

**Demostración:**

De I.T.P : $\sec^2 x-\tan^2 x=1$

$\Rightarrow (\sec x+\tan x)(\sec x-\tan x)=1$

Como:

$$\sec x+\tan x=m \qquad ...(1)$$

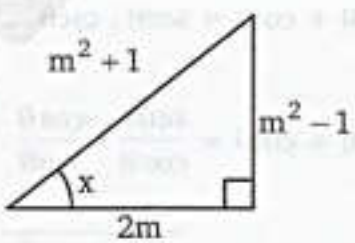
$$\Rightarrow \sec x-\tan x=\frac{1}{m} \qquad ...(2)$$

De (1) y (2):

$$\sec x=\frac{1}{2}\left(m+\frac{1}{m}\right)=\frac{m^2+1}{2m}$$

$$y\ \tan x=\frac{1}{2}\left(m-\frac{1}{m}\right)=\frac{m^2-1}{2m}$$

$\Rightarrow$




Con el triángulo rectángulo se puede hallar todas las R.T. de x.

twitter.com/calapenshko

team CALAPENSHKO


## EJERCICIOS DE APLICACIÓN

**1.** Complete:

a) $\sec\theta \csc\theta =$ .....

b) $\cot\theta =$ ——— $\wedge$ $\tan\theta =$ ———

c) $\text{sen}^2 x +$ ..... $= 1$

**2.** Si: $\cos\theta = 0{,}8$.
Complete usando las identidades:

a) $\text{sen}\,\theta =$ .....

b) $\tan\theta =$ .....

c) $\cot\theta =$ .....

d) $\sec\theta =$ .....

e) $\csc\theta =$ .....

**3.** Simplifique:

a) $(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha) =$ .....

b) $\tan x \cdot \cot x + \text{sen}x \cdot \csc x =$ .....

c) $3 + 3\tan^2 x - 3\sec^2 x =$ .....

**4.** Usando la propiedad, complete:

a) $5\text{sen}\,x + 12\cos x = 13$

* $\tan x =$ ..... * $\text{sen}\,x =$ .....

b) $\sqrt{6}\,\text{sen}\,x + \sqrt{3}\cos x = 3$

* $\cos x =$ ..... * $\cot x =$ .....

c) $\sqrt{23}\cos\beta - 5 = \sqrt{2}\,\text{sen}\,\beta \cdot \cos 180°$

* $\text{sen}\,x =$ ..... * $\cos x =$ .....

**5.** Reduzca:

a) $\dfrac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} - \cos x =$ .....

b) $\text{sen}^3 x + \cos^3 x - (\text{sen}x + \cos x)(1 - \text{sen}x\cos x)$

c) $\dfrac{\sec^2 x - 2}{\tan x + 1} + 1 =$ .....

**6.** Marque (V) o (F):

a) $\dfrac{\text{sen}^3 x + \cos^3 x}{1 - \text{sen}\,x\cos x} - \cos x = \text{sen}\,x$ ..... ( )

b) $\dfrac{\tan^2\theta}{\sec\theta - 1} + \dfrac{\cot^2\theta}{\csc\theta + 1} = 2$ ..... ( )

c) $\dfrac{\text{sen}^4 x + \cos^4 x}{\text{sen}^2 x \cos^2 x} = -1$ ..... ( )

team CALAPENSHKO



## PROBLEMAS RESUELTOS

**PROBLEMA 1** Reduzca la expresión:

$$M = \frac{\text{sen}x}{\csc x} + \frac{\cos x}{\sec x} + \frac{\tan x}{\cot x}$$

**Resolución:** Usando las I.T. Recíprocas, en los denominadores

$$M = \frac{\text{sen}x}{\frac{1}{\text{sen}x}} + \frac{\cos x}{\frac{1}{\cos x}} + \frac{\tan x}{\frac{1}{\tan x}}$$

Operando tenemos:

$$M = \underbrace{\text{sen}^2x + \cos^2 x}_{1} + \tan^2 x \quad \text{..... I.T. pitagórica}$$

$$M = \underbrace{1 + \tan^2 x}_{\sec^2 x} \quad \text{..... I.T. pitagórica}$$

Finalmente:

$$\therefore \ \mathbf{M = \sec^2 x}$$

**PROBLEMA 2** Reduzca:

$$E = \frac{\cos^2\theta + \text{sen}\theta + 1}{\cos^2\theta + 2\text{sen}\theta - 1}$$

**Resolución:** Utilizando la I.T Pitágoras: $\cos^2\theta = 1 - \text{sen}^2\theta$

$$E = \frac{1 - \text{sen}^2\theta + \text{sen}\theta + 1}{1 - \text{sen}^2\theta + 2\text{sen}\theta - 1} = \frac{2 + \text{sen}\theta - \text{sen}^2\theta}{2\text{sen}\theta - \text{sen}^2\theta}$$

Factorizando el numerador y denominador:

$$E = \frac{(1 + \text{sen}\theta)(2 - \text{sen}\theta)}{\text{sen}\theta\,(2 - \text{sen}\theta)} = \frac{1 + \text{sen}\theta}{\text{sen}\theta} = \frac{1}{\text{sen}\theta} + \frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}\theta}$$

Finalmente por I.T. Recíproca:

$$\therefore \ \mathbf{E = \csc\theta + 1}$$

team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 3** Si:

$$\sec x + \tan x = 2$$

Calcule el valor de: $\cos x$

**Resolución:** Utilizando la I T Pitagórica: $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$

Obtenemos: $(\sec x + \tan x)(\sec x - \tan x) = 1$

Utilizando el dato: $2 \cdot (\sec x - \tan x) = 1$

Luego: $\sec x - \tan x = \frac{1}{2}$

Entonces tenemos:

$$\sec x + \tan x = 2 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\sec x - \tan x = \frac{1}{2} \quad \ldots\ldots (2)$$

Sumamos (1) y (2): $2\sec x = 2 + \frac{1}{2} \Rightarrow \sec x = \frac{5}{4}$

Finalmente utilizando I.T. Reciproca.

$$\therefore \quad \cos x = \frac{4}{5}$$

**PROBLEMA 4** Si:

$$\tan x + \cot x = 3$$

Calcule:

$$W = \tan x \cdot \sen^4 x + \cot x \cdot \cos^4 x$$

**Resolución:** Usando la I T auxiliar I en el dato:

$$\sec x \csc x = 3 \quad \ldots\ldots (1)$$

Utilizando I,T. reciproca

$$\left(\frac{1}{\cos x}\right)\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)=3 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} x \cos x=\frac{1}{3} \quad \ldots\ldots (2)$$

En W usando I.T. por cociente:

$$W=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.\operatorname{sen}^4 x+\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}.\cos^4 x=\frac{\operatorname{sen}^5 x}{\cos x}+\frac{\cos^5 x}{\operatorname{sen} x}$$

$$\therefore \quad W=\frac{\operatorname{sen}^6 x+\cos^6 x}{\cos x \operatorname{sen} x}$$

Usando I.T. auxiliar:

$$W=\frac{1-3\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}{\cos x \operatorname{sen} x}=\frac{1}{\cos x \operatorname{sen} x}-3\operatorname{sen} x \cos x$$

$$\therefore \quad W=\sec x \csc x-3 \operatorname{sen} x \cos x$$

Usando (1) y (2): $W=3-3\times\frac{1}{3}$

$$\therefore \quad \mathbf{W=2}$$

**PROBLEMA 5** Determine una relación entre "a" y "b" independiente de la variable angular "x" si:

$$\operatorname{sen} x-\cos x=a \qquad \ldots\ldots (1)$$

$$\operatorname{sen} x \cos x=b \qquad \ldots\ldots (2)$$

**Resolución:** Elevando (1) al cuadrado y desarrollando

$$(\operatorname{sen} x-\cos x)^2=a^2$$

$$\underbrace{\operatorname{sen}^2 x}-2\operatorname{sen} x \cos x+\underbrace{\cos^2 x}=a^2$$

$$1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ I.T. pitagórica}$$

Luego: $1-2\operatorname{sen} x \cos x=a^2 \qquad \ldots\ldots (3)$

Reemplazando (2) en (3) obtenemos la relación:

$$\therefore \quad \mathbf{1-2b=a^2}$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 6** Elimine la variable angular "θ" a partir de:

$$a\,.\,\cot\theta + 1 = \csc\theta \quad \ldots\ldots (1)$$
$$b\,.\,\cot\theta - 1 = \csc\theta \quad \ldots\ldots (2)$$

**Resolución:** De la ecuación (1)

$$a\,.\,\cot\theta = \csc\theta - 1 \ldots\ldots (3)$$

De la ecuación (2)

$$b\,.\,\cot\theta = \csc\theta + 1 \ldots\ldots (4)$$

Multiplicamos (3) y (4)

$$ab\cot^2\theta = \underbrace{\csc^2\theta - 1}$$

$\cot^2\theta$ ..... I.T. pitagórica

De donde obtenemos la relación:

$$\therefore \quad ab = 1$$

**PROBLEMA 7** Halalr el valor de:

$$\int = \frac{1}{1+\tan^2 10^\circ} + \frac{1}{1+\tan^2 20^\circ} + \frac{1}{1+\tan^2 30^\circ} + \ldots + \frac{1}{1+\tan^2 80^\circ}$$

**Resolución:** Cada término de la serie es de la forma:

$$\frac{1}{1+\tan^2\theta}$$

Luego: $$\frac{1}{1+\tan^2\theta} = \frac{1}{\sec^2\theta} = \cos^2\theta$$

En la serie:

$$\int = \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \ldots\ldots + \cos^2 80^\circ$$

Por ángulos complementarios tenemos:

$\cos 80^\circ = \text{sen } 10^\circ$ ; $\cos 70^\circ = \text{sen } 20^\circ$ ; $\cos 60^\circ = \text{sen } 30^\circ$ ; $\cos 50^\circ = \text{sen } 40^\circ$

En la serie tenemos:

$$\int = \cos^2 10° + \cos^2 20° + \cos^2 30° + \cos^2 40° +$$

$$+ \operatorname{sen}^2 40° + \operatorname{sen}^2 30° + \operatorname{sen}^2 20° + \operatorname{sen}^2 10°$$

Agrupando y usando Identidad: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\int = \underbrace{\operatorname{sen}^2 10° + \cos^2 10°}_{1} + \underbrace{\operatorname{sen}^2 20° + \cos^2 20°}_{1} +$$

$$+ \underbrace{\operatorname{sen}^2 30° + \cos^2 30°}_{1} + \underbrace{\operatorname{sen}^2 40° + \cos^2 40°}_{1}$$

$$\therefore \quad \int = 4$$

**PROBLEMA 8** Si la siguiente igualdad:

$$\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} + \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x} = \frac{2}{k}$$

es una identidad; determine el valor de "k"

**Resolución:** Reduciendo el primer miembro:

$$\frac{\cos x(1-\operatorname{sen} x) + \cos x(1+\operatorname{sen} x)}{(1+\operatorname{sen} x)(1-\operatorname{sen} x)} = \frac{2}{k}$$

$$\frac{\cos x - \cos x \operatorname{sen} x + \cos x + \cos x \operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen}^2 x} = \frac{2}{k}$$

$$\frac{2\cos x}{\cos^2 x} = \frac{2}{k}$$

$$\frac{2}{\cos x} = \frac{2}{k}$$

Identificando:

$$\therefore \quad k = \cos x$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 9** Simplificar:

$$M=\sqrt[3]{\frac{(1-\sec x)(1+\cos x)}{(1-\csc x)(1+\operatorname{sen} x)}}$$

**Resolución:** Pasando a senos y cosenos:

$$M=\sqrt[3]{\frac{\left(1-\frac{1}{\cos x}\right)(1+\cos x)}{\left(1-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)(1+\operatorname{sen} x)}}=\sqrt[3]{\frac{\frac{\cos x-1}{\cos x}.(1+\cos x)}{\frac{\operatorname{sen} x-1}{\operatorname{sen} x}.(1+\operatorname{sen} x)}}$$

$$M=\sqrt[3]{\frac{\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\cos x}}{\frac{(1-\operatorname{sen} x)(1+\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x}}}$$

$$M=\sqrt[3]{\frac{\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}}{\frac{1-\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x}}}=\sqrt[3]{\frac{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}}}=\sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^3 x}}=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$\therefore$ **$M=\tan x$**

**PROBLEMA 10** Si:

$$\tan^2 x+\cot^2 x=7 \quad \wedge \quad x\in \text{IVC}$$

Hallar:

$$K=\tan^3 x+\cot^3 x$$

**Resolución:** En la condición, sumando "2" a cada miembro:

$$\tan^2 x+2\overbrace{\tan x\cot x}^{1}+\cot^2 x=7+2$$

$$(\tan x+\cot x)^2=9$$

$$\tan x+\cot x=-3 \quad \text{pues} \quad x\in \text{IVC}$$

Elevando al cubo:

$$(\tan x+\cot x)^3=(-3)^3$$

$$\tan^3 x+3\underbrace{\tan x\cot x}_{1}\underbrace{(\tan x+\cot x)}_{-3}+\cot^3 x=-27$$

$\therefore$ **$\tan^3 x+\cot^3 x=-18$**

team CALAPENSHKO

**PROBLEMA 11** Determine el valor de "m" si la expresión:

$$Y = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^4 x + m(\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x)$$

Es independiente de la variable angular "x".

**Resolución:** Acomodando la expresión utilizando I.T. Pitagórica e I.T. auxiliar:

$$Y = \operatorname{sen}^2 x \underbrace{(1 - \operatorname{sen}^2 x)}_{\cos^2 x} + m(1 - 2\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x)$$

$$Y = \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + m - 2m \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$$

$$Y = m + (1 - 2m)\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$$

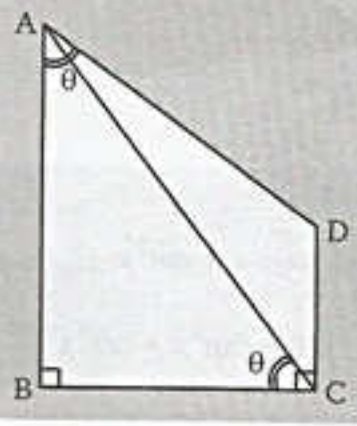
Para que la expresión sea independiente de x entonces: $1 - 2m = 0$

$$\therefore \quad m = \frac{1}{2}$$

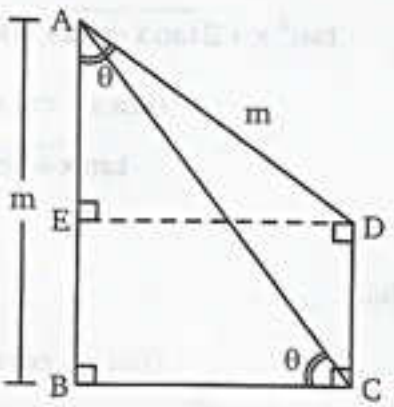
twitter.com/calapenshko

**PROBLEMA 12** Del gráfico, calcule: $\sec\theta + \cos\theta$

Si: AB = AD




**Resolución:** Sea: AB = AD = m




$\triangle_{AED}$: $ED = m \operatorname{sen}\theta$

$\triangle_{ABC}$: $BC = m \cot\theta$

team CALAPENSHKO


Como ED = BC:

$$m\,\text{sen}\,\theta = m\cot\theta \Rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} \Rightarrow \text{sen}^2\theta = \cos\theta \Rightarrow 1-\cos^2\theta = \cos\theta$$

$$\therefore \quad \cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$$

Resolviendo mediante la formula general de una ecuación de 2.° grado:

$$\cos\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Nos quedamos con:

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad \ldots\ldots (1)$$

Luego: $$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{2}{(\sqrt{5}-1)} \times \frac{(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}+1)}$$

$$\therefore \quad \sec\theta = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \qquad \ldots\ldots (2)$$

Finalmente usando (1) y (2):

$$\therefore \quad \boldsymbol{\sec\theta + \cos\theta = \sqrt{5}}$$

**PROBLEMA 13** Determine la medida del ángulo $\phi$ que verifica:

$$3\,\text{sen}\,\phi + 4\cos\phi = 5$$

**Resolución:** Del dato: $3\,\text{sen}\,\phi = 5 - 4\cos\phi$

Elevando al cuadrado y desarrollando:

$$(3\text{sen}\phi)^2 = (5 - 4\cos\phi)^2 \Rightarrow 9\text{sen}^2\phi = 25 - 40\cos\phi + 16\cos^2\phi$$

Utilizando la identidad:

$$\text{sen}^2\phi = 1 - \cos^2\phi$$

Así tenemos: $0 = 16 - 40\cos\phi + 25\cos^2\phi = (4 - 5\cos\phi)^2$

Luego: $4 - 5\cos\phi = 0 \Rightarrow \cos\phi = \frac{4}{5}$

$\therefore \quad \phi = 37°$

**En general:**

Si: $a \operatorname{sen} x + b \cos x = c$

Además: $a^2 + b^2 = c^2$

Se cumple: $\operatorname{sen} x = \frac{a}{c} \wedge \cos x = \frac{b}{c}$

**PROBLEMA 14** Sabiendo que:

$a = \operatorname{sen} x - \tan x - \sec x$

$b = \cos x - \cot x - \csc x$

Exprese "tan x" en términos de a y b.

**Resolución:** De las condiciones tenemos:

$\operatorname{sen} x = a - \tan x - \sec x$ .....(1)

$\cos x = b - \cot x - \csc x$ .....(2)

(1)÷(2): $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{a - \tan x - \sec x}{b - \cot x - \csc x}$

$\tan x = \frac{a - \tan x - \sec x}{b - \cot x - \csc x}$

$\tan x(b - \cot x - \csc x) = a - \tan x - \sec x$

$b\tan x - \underbrace{\tan x \cot x}_{1} - \underbrace{\tan x \csc x}_{\sec x} = a - \tan x - \sec x$

$b\tan x - 1 - \sec x = a - \tan x - \sec x$

$b\tan x + \tan x = a + 1$

$\tan x(b + 1) = a + 1$

$\therefore \quad \tan x = \frac{a+1}{b+1}$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 15** Reduzca:

$$M = \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} + \frac{\operatorname{vers} x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{vers} x - \operatorname{cov} x}{\cos^3 x}$$

**Resolución:** Al sustituir las relaciones auxiliares por sus correspondientes definiciones, para lo cual recordamos que:

$$\boxed{\operatorname{vers} x = 1 - \cos x} \quad \wedge \quad \boxed{\operatorname{cov} x = 1 - \operatorname{sen} x}$$

$$\Rightarrow M = \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} + \frac{1-\cos x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\cos^3 x}$$

Transformamos el término indicado, multiplicando y dividiendo por: $1 - \operatorname{sen} x$.

$$M = \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{1-\cos x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\cos^3 x}$$

Efectuando las divisiones indicadas:

$$M = \frac{1}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\cos x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x} - \frac{\cos x}{\cos^3 x}$$

$$M = \sec x - \tan x + \sec^2 x - \sec x + \tan x \sec^2 x - \sec^2 x$$

Simplificando y ordenando nos queda:

$$M = \tan x \underbrace{(\sec^2 x - 1)}_{\tan^2 x} \qquad \therefore \ \mathbf{M = \tan^3 x}$$

**PROBLEMA 16** Si se cumple que:

$$\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\cos x}} = K\,|\cot x + \csc x + 1|$$

Determine el valor de "K"

**Resolución:** Multiplicando dentro del radicando al numerador y denominador por $(1 + \cos x)$ se tiene:

$$\sqrt{\frac{(1+\operatorname{sen} x)(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}} = K\,|\cot x + \csc x + 1|$$

$$\sqrt{\frac{(1+\operatorname{sen} x)(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}} = K\,|\cot x + \csc x + 1|$$

$$\sqrt{\frac{2(1+\operatorname{sen} x)(1+\cos x)}{2\operatorname{sen}^2 x}} = K\,|\cot x + \csc x + 1|$$

$$\sqrt{\frac{(1+\operatorname{sen} x+\cos x)^2}{2\operatorname{sen}^2 x}} = K\,|\cot x + \csc x + 1|$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{1+\operatorname{sen} x+\cos x}{\operatorname{sen} x}\right| = K\,|\cot x + \csc x + 1|$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{1}{\text{sen}x}+\frac{\text{sen}\,x}{\text{sen}\,x}+\frac{\cos x}{\text{sen}\,x}\right|=K\left|\cot x+\csc x+1\right|$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\csc x+\cot x+1\right|=K\left|\cot x+\csc x+1\right|$$

$$\therefore\ K=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

**PROBLEMA 17** Sabiendo que se cumple la siguiente condición:

$$\sqrt{7}\cos\theta+1=\tan^2\theta$$

Calcule:

$$M=\tan^6\theta-\tan^4\theta-\tan^2\theta$$

**Resolución:** Del dato despejamos:

$$\sqrt{7}\cos\theta=\tan^2\theta-1$$

Elevando al cuadrado:

$$7\cos^2\theta=\tan^4\theta-2\tan^2\theta+1$$

$$7=\frac{1}{\cos^2\theta}\left(\tan^4\theta-2\tan^2\theta+1\right)$$

$$7=\sec^2\theta\left(\tan^4\theta-2\tan^2\theta+1\right)$$

$$7=\left(1+\tan^2\theta\right)\left(\tan^4\theta-2\tan^2\theta+1\right)$$

Efectuando y ordenando como sigue, tendremos:

$$7=\tan^4\theta-2\tan^2\theta+1+\tan^6\theta-2\tan^4\theta+\tan^2\theta$$

Finalmente:

$$\underbrace{\tan^6\theta-\tan^4\theta-\tan^2\theta}_{M}=6$$

$$\therefore\ M=6$$

**PROBLEMA 18** Sabiendo que:

$$\text{sen}\,\alpha+\text{sen}\,\beta+\text{sen}\,\theta=0\ ;\ \alpha\neq\beta\neq\theta.$$

Calcule:

$$N=\frac{\csc\alpha.\csc\beta}{\sec^2\theta}+\frac{\csc\beta.\csc\theta}{\sec^2\alpha}+\frac{\csc\alpha.\csc\theta}{\sec^2\beta}$$

**Resolución:** Expresando en senos y cosenos a "N".

$$N=\frac{\cos^2\theta}{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}+\frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\beta}+\frac{\cos^2\beta}{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\theta}$$

$$N=\frac{\cos^2\theta.\text{sen}\,\theta+\cos^2\alpha\,\text{sen}\alpha+\cos^2\beta\,\text{sen}\beta}{\text{sen}\,\alpha.\text{sen}\,\beta.\text{sen}\,\theta}$$

$$N=\frac{(1-\operatorname{sen}^2\theta).\operatorname{sen}\theta+(1-\operatorname{sen}^2\alpha)\operatorname{sen}\alpha+(1-\operatorname{sen}^2\beta)\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta.\operatorname{sen}\theta}$$

$$N=\frac{\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}^3\theta+\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}^3\alpha+\operatorname{sen}\beta-\operatorname{sen}^3\beta}{\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta.\operatorname{sen}\theta}$$

Recordar la identidad algebraica:

Si: $x+y+z=0 \Rightarrow x^3+y^3+z^3=3xyz$

$\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}\theta=0 \Rightarrow \operatorname{sen}^3\alpha+\operatorname{sen}^3\beta+\operatorname{sen}^3\theta=3\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\theta$

$$N=\frac{\overbrace{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}\beta}^{0}-\overbrace{(\operatorname{sen}^3\alpha+\operatorname{sen}^3\beta+\operatorname{sen}^3\theta)}^{3\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\theta}}{\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta.\operatorname{sen}\theta}$$

$$\Rightarrow N=-\frac{3\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta.\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta.\operatorname{sen}\theta}=-3 \qquad \therefore \ \mathbf{N=-3}$$

**PROBLEMA 19** A partir de las condiciones:

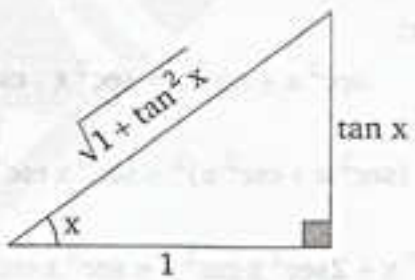
$$p\cos^2x.\operatorname{sen}x=q \quad \ldots\ldots (1)$$

$$p\operatorname{sen}^2x.\cos x=r \quad \ldots\ldots (2)$$

Encuentre una expresión independiente de la variable angular "x".

**Resolución:** Dividiendo (2) ÷ (1): $\dfrac{p.\operatorname{sen}^2x\cos x}{p.\cos^2x.\operatorname{sen}x}=\dfrac{r}{q} \Rightarrow \tan x=\dfrac{r}{q} \ldots\ldots (*)$

Utilizando el siguiente triángulo, podemos escribir la condición (2) en términos de la función "tan x", así:




$$p.\operatorname{sen}^2x.\cos x=r$$

$$\Rightarrow p.\frac{\tan^2x}{1+\tan^2x}.\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2x}}=r \ldots\ldots (**)$$

Sustituyendo (*) en (**) y elevando al cuadrado:

$$p^2.\frac{\left(\frac{r^2}{q^2}\right)^2}{\left(1+\frac{r^2}{q^2}\right)^2}.\frac{1}{\left(1+\frac{r^2}{q^2}\right)}=r^2$$

Efectuando y simplificando obtenemos:

$$\therefore \ r^2p^2q^2=(r^2+q^2)^3$$

**PROBLEMA 20** Eliminar de la variable angular "θ" de:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{a}=\frac{\cos\theta}{b}=\frac{\tan\theta}{c}$$

**Resolución:**

De la condición : $\frac{\operatorname{sen}\theta}{a}=\frac{\cos\theta}{b} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}=\frac{a}{b} \Rightarrow \tan\theta=\frac{a}{b}$ .....(1)

También: $\frac{\operatorname{sen}\theta}{a}=\frac{\tan\theta}{c} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\theta}{a}=\frac{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}{c} \Rightarrow \frac{1}{a}=\frac{1}{c\,.\cos\theta}$

$$\frac{c}{a}=\frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow \sec\theta=\frac{c}{a} \quad .....(2)$$

Por la Id. Pitagórica:

$$\sec^2\theta=\tan^2\theta+1.....(*)$$

(1) y (2) en (*): $\left(\frac{c}{a}\right)^2=\left(\frac{a}{b}\right)^2+1$

Finalmente ordenando:

$$\therefore \quad a^2(a^2+b^2)=b^2c^2$$

**PROBLEMA 21** Si: $f(\tan^2x+\cot^2x)=\sec^4x+\csc^4x$

Calcule $f(2)+f(3)$

**Resolución:**

Recordar la identidad auxiliar:

$$\sec^2x+\csc^2x=\sec^2x\,.\,\csc^2x$$

Elevando al cuadrado : $(\sec^2x+\csc^2x)^2=\sec^4x\csc^4x$

$$\sec^4x+\csc^4x+2\sec^2x\csc^2x=\sec^4x\csc^4x$$

$$\sec^4x+\csc^4x=\sec^4x\csc^4x-2\sec^2x\csc^2x$$

Sumando (1) y restando (1) al segundo miembro para formar un cuadrado perfecto.

$$\sec^4x+\csc^4x=\underbrace{(\sec^2x\csc^2x)^2-2(\sec^2x\csc x^2)+1}-1$$

$$\sec^4x+\csc^4x=[\sec^2x\csc^2x-1]^2-1$$

$$\sec^4x+\csc^4x=[\underbrace{(\sec x\csc x)^2}_{\tan x+\cot x}-1]^2-1$$

..... I. Auxiliar

team CALAPENSHKO



$$\sec^4 x + \csc^4 x = [(\tan x + \cot x)^2 - 1]^2 - 1$$
$$\sec^4 x + \csc^4 x = [\tan^2 x + \cot^2 x + 2 - 1]^2 - 1$$
$$\sec^4 x + \csc^4 x = [\tan^2 x + \cot^2 x + 1]^2 - 1$$

Luego : $f(\tan^2 x + \cot^2 x) = [\tan^2 x + \cot^2 x + 1]^2 - 1$

Haciendo un cambio de variable : $\boxed{\tan^2 x + \cot^2 x = a}$

$$f(a) = [a+1]^2 - 1$$

Evaluando para: $f(2) = [2+1]^2 - 1 \rightarrow f(2) = 8$

$f(3) = [3+1]^2 - 1 \rightarrow f(3) = 15$

$\therefore$ **f(2) + f(3) = 23**

**PROBLEMA 22** Calcule el valor de: $\tan\theta$

Si: $a\cos^4\theta + b\,\text{sen}^4\theta = \dfrac{ab}{a+b}$ ; $a \neq b$

**Resolución:**

Efectuando el dato : $a(a+b)\cos^4\theta + b(a+b)\,\text{sen}^4\theta = ab$

$$a^2\cos^4\theta + ab\cos^4\theta + ab\,\text{sen}^4\theta + b^2\,\text{sen}^4\theta = ab$$

Ordenando : $a^2\cos^4\theta + b^2\,\text{sen}^4\theta + ab(\text{sen}^4\theta + \cos^4\theta) = ab$

Recordar : $\text{sen}^4\theta + \cos^4\theta = 1 - 2\,\text{sen}^2\theta\cos^2\theta$

Reemplazando : $a^2\cos^4\theta + b^2\,\text{sen}^4\theta + ab(1 - 2\,\text{sen}^2\theta\cos^2\theta) = ab$

$$a^2\cos^4\theta + b^2\,\text{sen}^4\theta + \cancel{ab} - 2ab\,\text{sen}^2\theta\cos^2\theta = \cancel{ab}$$

Ordenando nuevamente:

$$(a\cos^2\theta)^2 - 2(a\cos^2\theta)(b\,\text{sen}^2\theta) + (b\,\text{sen}^2\theta)^2 = 0$$

Formando un cuadrado perfecto:

$$[a\cos^2\theta - b\,\text{sen}^2\theta]^2 = 0$$

$$a\cos^2\theta = b\,\text{sen}^2\theta \rightarrow \frac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{a}{b}$$

$$\tan^2\theta = \frac{a}{b}$$

$$\therefore \tan\theta = \pm\sqrt{\frac{a}{b}}$$

**PROBLEMA 23** Elimine la variable angular "x" de:

$$\operatorname{sen}x + \tan x + \sec x = m$$
$$\cos x + \cot x + \csc x = n$$

**Resolución:** Del dato :

$$\operatorname{sen}x + \tan x + \sec x = m \quad \text{.....(1)}$$
$$\cos x + \cot x + \csc x = n \quad \text{.....(2)}$$

A las dos ecuaciones vamos a sumar (1) a cada miembro:

$$\operatorname{sen}x + \tan x + \sec x + 1 = m + 1$$
$$\cos x + \cot x + \csc x + 1 = n + 1$$

Ordenando en cada caso; y pasando a senos y cosenos respectivamente:

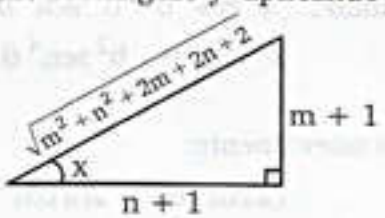
$$\operatorname{sen}x + 1 + \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x} = m + 1$$
$$\cos x + 1 + \frac{\cos x}{\operatorname{sen}x} + \frac{1}{\operatorname{sen}x} = n + 1$$
$$\frac{(1+\operatorname{sen}x)(1+\cos x)}{\cos x} = m + 1 \quad \text{.....(3)}$$
$$\frac{(1+\cos x)(1+\operatorname{sen}x)}{\operatorname{sen}x} = n + 1 \quad \text{.....(4)}$$

Dividiendo (3) ÷ (4), resulta :

$$\frac{\dfrac{(1+\operatorname{sen}x)(1+\cos x)}{\cos x}}{\dfrac{(1+\cos x)(1+\operatorname{sen}x)}{\operatorname{sen}x}} = \frac{m+1}{n+1}$$

$$\tan x = \frac{m+1}{n+1}$$

Llevando a un triángulo rectángulo y aplicando el teorema de Pitágoras:




Luego reemplazando en la ecuación (3):

$$\frac{\left(1+\dfrac{m+1}{\sqrt{m^2+n^2+2m+2n+2}}\right)\left(1+\dfrac{n+1}{\sqrt{m^2+n^2+2m+2n+2}}\right)}{\dfrac{n+1}{\sqrt{m^2+n^2+2m+2n+2}}} = m+1$$

$$\therefore \left(1+\frac{m+1}{\sqrt{m^2+n^2+2m+2n+2}}\right)\left(1+\frac{n+1}{\sqrt{m^2+n^2+2m+2n+2}}\right) = \frac{(m+1)(n+1)}{\sqrt{m^2+n^2+2m+2n+2}}$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 24** Si: $\alpha$, $\beta$ y $\theta$ son tres valores diferentes que verifican:

$$a\sec^2 x + b\cot x = c\,.\,\operatorname{sen} x\,.\,\sec x$$

Calcule:

$$P = \tan\alpha\tan\beta + \tan\beta\tan\theta + \tan\theta\tan\alpha$$

**Resolución:** Recordar las Identidades Trigonométricas fundamentales

Reemplazando en el dato:

$$a(1+\tan^2 x) + b\,.\,\frac{1}{\tan x} = c\,.\,\operatorname{sen} x\,.\,\frac{1}{\cos x}$$

$$a(1+\tan^2 x) + \frac{b}{\tan x} = c\,.\,\tan x$$

Operando : $a\,.\,\tan x + a\,.\,\tan^3 x + b = c\,.\,\tan^2 x$

Pasando a un solo miembro:

$$a\,.\,\tan^3 x - c\,.\,\tan^2 x + a\,.\,\tan x + b = 0$$

Se observa que es una ecuación cúbica entonces hay que recordar:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

i) $x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a}$

ii) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \dfrac{c}{a}$

iii) $x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a}$

Entonces podemos deducir; por la parte (ii) y que las raíces son: tan $\alpha$, tan$\beta$, tan$\theta$

$$\underbrace{\tan\alpha\,.\,\tan\beta + \tan\beta\,.\,\tan\theta + \tan\alpha\,.\,\tan\theta} = \frac{a}{a} \text{ (según la ecuación)}$$

$$\therefore \quad \mathbf{P = 1}$$

**PROBLEMA 25** Simplifique:

$$P = \sqrt{\sec x^2 + \csc x^2}\ \left\{1 + \sqrt{1 - 4\operatorname{sen} x^2\,.\cos x^2}\right\}$$

Además: $x \in \left\langle \pi\,;\ \dfrac{5\pi}{4} \right\rangle$

**Resolución:** Recordar las I. T. Auxiliares:

- $\sec^2 x + \csc^2 x = \sec^2 x\,.\,\csc^2 x$
- $1 + 2\operatorname{sen} x\,.\,\cos x = (\operatorname{sen} x + \cos x)^2$
- $1 - 2\operatorname{sen} x\,.\,\cos x = (\operatorname{sen} x - \cos x)^2$

De la condicion: $P=\sqrt{\sec^2 x\csc^2 x}\ \left\{1+\sqrt{(1+2\operatorname{sen}x\,.\,\cos x)(1-2\operatorname{sen}x\,.\cos x)}\right\}$

Remplazando lo ya conocido:

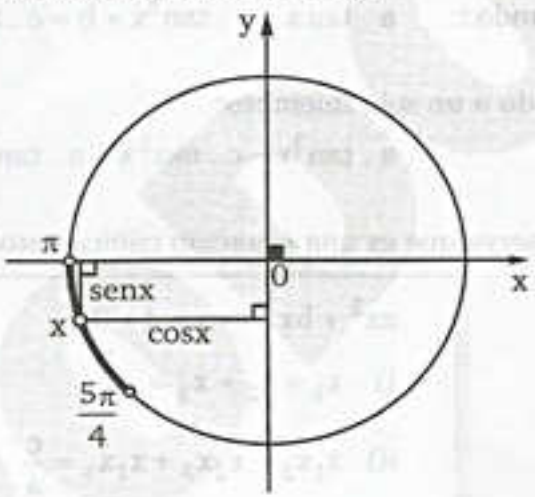
$$P=\sqrt{\sec^2 x\csc^2 x}\ \left\{1+\sqrt{(\operatorname{sen}x+\cos x)^2.(\operatorname{sen}x-\cos x)^2}\ \right\}$$

**Recordar:**

Valor absoluto:

$$|x|=\begin{cases}-x\ ;\ \text{Si } x<0\\ x\ ;\ \text{Si } x\geq 0\end{cases}$$

Para eso nos tenemos que ayudar con la C.T.




Se observa de la C T:

$$\operatorname{sen}x>\cos x$$
$$\operatorname{sen}x-\cos x>0$$

Luego verificando:

$$P=|\overbrace{\sec x.\csc x}^{+}|\left\{1+|\overbrace{\operatorname{sen}x+\cos x}^{-}|\,.\,|\overbrace{\operatorname{sen}x-\cos x}^{+}|\right\}$$

Aplicando la propiedad de valor absoluto:

$$P=\sec x.\csc x\left\{1-(\operatorname{sen}x+\cos x)(\operatorname{sen}x-\cos x)\right\}$$
$$P=\sec x.\csc x\left\{1-(\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x)\right\}$$
$$P=\sec x.\csc x\left\{1-\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x\right\}$$
$$P=\sec x.\csc x\left\{\cos^2 x+\cos^2 x\right\}$$

Pasando a senos y cosenos:

$$P=\frac{1}{\cos x\ .\operatorname{sen}x}\ .\ 2\cos^2 x$$

$$\therefore\quad \mathbf{P=2\cot x}$$

team CALAPENSHKO


## PROBLEMAS PROPUESTOS

**1.** Reduzca:

$$E = \csc x(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^3 x) + \sec x(\cos x + \cos^3 x)$$

A) 2 B) 3 C) 4
D) sen x E) cos x

**2.** De la siguiente identidad:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} = m\cot x$$

Halle el valor de "m".

A) –2 B) –1 C) 1
D) 2 E) 3

**3.** Indique el equivalente de la expresión

$$W = \frac{\tan^2 x + 2\operatorname{sen}^2 x}{\tan^2 x + \cos^2 x - 1}$$

A) $\dfrac{\sec^2 x + 1}{\sec^2 x - 1}$ B) $\dfrac{\sec^2 x - 1}{\sec^2 x + 1}$

C) $\dfrac{\sec^2 x + 2}{\sec^2 x - 1}$

D) $\dfrac{\sec^2 x - 2}{\sec^2 x + 1}$ E) $\dfrac{2\sec^2 x}{\sec^2 x + 2}$

**4.** Al simplificar:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x + \sec^3 x}{\cos^3 x + \csc^2 x}$$

Hay diferentes formas de expresar la respuestas, marque la que no corresponda:

A) $\operatorname{sen}^2 x \sec^3 x$
B) $\tan^3 x \csc x$
C) $\tan^2 x \sec x$
D) $\sec^3 x - \sec x$
E) $\cot^3 x \sec x$

**5** De la siguiente identidad:

$$\operatorname{sen}^4 x(2 - \cos^2 x) + \cos^4 x(2 - \operatorname{sen}^2 x) = a + b\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$$

Halle: a + b

A) –3 B) –2 C) –1
D) 1 E) 2

**6.** Reduzca la expresión:

$$E = \frac{\cos^2 x}{1+\operatorname{sen}^2 y} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\tan^2 y} + \frac{\cos^2 x}{1+\csc^2 y} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\cot^2 y}$$

A) sen x B) cos x C) sen y
D) cos y E) 1

**7.** Si la siguiente igualdad:

$$\frac{\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x}{\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x} = A + \frac{B}{C + \sec^2 x + \csc^2 x}$$

Es una identidad.
Halle: "A + B + C"

A) –4 B) –2 C) 1
D) 2 E) 4

**8.** De la condición:

$$\operatorname{sen} x - \cos x = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Halle:

$$H = \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x$$

A) $\dfrac{13}{16}$ B) $\dfrac{11}{12}$ C) $\dfrac{9}{10}$

D) $\dfrac{17}{18}$ E) $\dfrac{14}{15}$

**9.** Si se cumple:

$$3\text{sen}x + \cos^2 x = 2$$

Halle:

$$K = \csc^2 x + \text{sen}^2 x$$

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

**10.** Determine el signo de "Q" en cada uno de los cuadrantes (I, II, III, IV)

$$Q = \cot x + \text{sen}\, x - \csc x$$

A) + ; + ; + ; +
B) + ; − ; + ; −
C) + ; + ; − ; −
D) − ; + ; − ; +
E) + ; − ; + ; +

**11.** Si se cumple:

$$1 - \text{sen}x = (1 + \cos x)(1 - \cos x)$$

Halle:

$$K = \cos^2 x(1 + \cos^2 x)$$

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$
D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

**12.** Si: $\text{sen}^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{2}\text{sen}\theta$

$$\text{sen}^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{3}\csc\theta$$

Halle:

$$M = \text{sen}\,\theta\,(1 + \text{sen}\theta)$$

A) −1 B) 0 C) 1
D) −2 E) 2

**13.** De la condición:

$$\frac{\sec x}{a} = \frac{\tan x}{b} = \frac{\cos y}{c}$$

Halle "$\cot^2 y$"

A) $\frac{a^2}{a^2 - b^2 - c^2}$ B) $\frac{b^2}{a^2 - b^2 - c^2}$
C) $\frac{c^2}{a^2 - b^2 - c^2}$
D) $\frac{a^2}{a^2 + b^2 - c^2}$ E) $\frac{b^2}{a^2 + b^2 - c^2}$

**14.** Si se cumple:

$$1 + \tan\theta + \cot\theta = \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$$

Halle:

$$K = \cot\theta + \tan^3\theta$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) −1 E) 0

**15.** Si:

$$a\cos^2 x + b\text{sen}^2 x = c$$

Resuelva:

$$a\,\text{sen}^2 x + b\cos^2 x$$

A) a + b − c B) b − c − a C) $\frac{c}{a - b}$
D) $\frac{a + b}{c}$ E) $\frac{ab}{c}$

**16.** Elimine "x" a partir de:

$$a\cos x + b\,\text{sen}\,x = m$$
$$a\,\text{sen}\,x - b\cos x = n$$

A) $a + b = m + n$
B) $a - b = m - n$
C) $a^2 - b^2 = m^2 - n^2$
D) $a^2 + b^2 = m^2 + n^2$
E) $a + b = m - n$

team CALAPENSHKO


**17.** Elimine la variable angular "θ" a partir de :
$\operatorname{sen}\theta + \cos\theta = a$
$\tan\theta + \cot\theta = b$

A) $b(b+1)(a+1) = 1$
B) $a(a+1)(b+1) = 1$
C) $b(a+1)(a-1) = 2$
D) $b(a+1)(a-1) = 1$
E) $a(a+1)(b+1) = 2$

**18.** Elimine la variable angular "x" de:
$\tan x + \cot x = \sqrt{2}m$ ..... (i)
$\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = n$ ..... (ii)

A) $m^2 + n = 1$
B) $m^2(n+1) = 1$
C) $(m^2+1)n = 1$
D) $m^2 - n = 1$
E) $m^2(1-n) = 1$

**19.** Elimine la variable angular "x" a partir de:

$$(1+\operatorname{sen} x)(1+\cos x) = \frac{a}{2} \quad \text{..... (i)}$$

$$(1+\operatorname{sen} x)(1-\cos x) = \frac{b}{2} \quad \text{.....(ii)}$$

Siendo a y b positivos.

A) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$
B) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 2$
C) $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 1$
D) $a + b = 2$
E) $a + b = 1$

**20.** Elimine las variables angulares "x" e "y" de:
$a \cdot \cos x \cos y = 2(1 + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y)$.....(i)
$\sec x - \sec y = b$ .....(ii)
$\tan x + \tan y = c$ .....(iii)

A) $a + b + c = 1$
B) $a^2 + b - c = 1$
C) $b^2 - c^2 - a = 2$
D) $a^2 + b^2 = 1$
E) $a + b^2 - c^2 = 2$

**21.** Si se verifica:
$5\operatorname{sen}\phi - 3\cos\phi = \sqrt{34}$
Halle:
$Q = \sqrt{34}\operatorname{sen}\phi + 5\cot\phi$

A) –2 B) 1 C) 2
D) 4 E) –4

**22.** Si se cumple:
$(\operatorname{sen} x + 4)^2 + (\cos x + 3)^2 = 36$
Halle: "sen x + cos x"

A) 0,8 B) 0,9 C) 1,1
D) 1,2 E) 1,4

**23.** El equivalente de la expresión:
$R = 1 - \cot^2 x + \cot^4 x - \cot^6 x + \ldots$
es:

A) $\operatorname{sen}^2 x$ B) $\cos^2 x$ C) $\tan^2 x$
D) $\cot^2 x$ E) $\sec^2 x$

**24.** Para un ángulo agudo que mide "θ" se cumple: $\tan\theta = \dfrac{a\operatorname{sen} x + b\cos x}{b\operatorname{sen} x - a\cos x}$

Halle el equivalente de:
$$\frac{b\operatorname{sen} x - a\cos x}{\cos\theta}$$

A) a+b B) $\sqrt{a^2+b^2}$ C) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$
D) $\sqrt{\frac{a}{b}}$ E) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

**25.** El producto de 5 razones trigonométricas de un ángulo obtuso es 2. ¿De que ángulo se trata?

A) 105° B) 135° C) 150°
D) 165° E) 120°

**26.** Elimine la variable angular "x" a partir de:

$$a \cdot \sec x = b \cdot \csc x = c \cdot \cot x$$

A) $a^2(a^2+b^2)=b^2c^2$
B) $a^2(b^2+c^2)=b^2c^2$
C) $b^2(a^2+c^2)=a^2c^2$
D) $c^2(a^2+b^2)=a^2b^2$
E) $b^2(a^2+b^2)=a^2c^2$

**27.** Halle:

$$Y = \operatorname{sen} x \cos x$$

Si:

$$\cot x - \cos x = 1$$

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ C) $\sqrt{2}-1$
D) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$

**28.** Si se cumple:

$$\sec x - \tan x = \operatorname{sen} x$$

Halle:

$$W = (1+\operatorname{sen} x)(1+\operatorname{sen}^2 x)$$

A) 0,5 B) 1 C) 1,5
D) 2 E) 2,5

**29.** Halle la suma de todos los valores enteros de "K" que cumplen:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x < k < \sec^2 x + \csc^2 x$$

A) 1 B) 3 C) 5
D) 7 E) 9

**30.** Reduzca:

$$E=\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\alpha+\cos\theta}+\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha-\operatorname{sen}\theta}+\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\alpha-\cos\theta}$$

A) $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\alpha-\operatorname{sen}\theta}$
B) $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta-\operatorname{sen}\alpha}$
C) $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\alpha+\operatorname{sen}\theta}$
D) $\frac{\cos\alpha}{\cos\theta+\operatorname{sen}\alpha}$
E) $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{sen}\theta}$

**31.** Reduzca:

$$L=\frac{\operatorname{sen}^4 x\,(1+\operatorname{sen}^2 x)+\cos^4 x(1+\cos^2 x)-2}{\operatorname{sen}^4 x\,(1-\operatorname{sen}^2 x)+\cos^4 x(1-\cos^2 x)}$$

A) $-5$ B) $-4$ C) $-3$
D) $-2$ E) $-1$

**32.** Halle una expresión de $n^{-1}$, para el cual la igualdad:

$$n+\frac{\operatorname{vers} x}{n}=\operatorname{sen} x+\operatorname{vers} x(\tan x+\cot x)$$

es una identidad.

A) $\tan x$ B) $-\tan x$
C) $\cot x$
D) $-\cot x$ E) $\tan x+\cot x$

team CALAPENSHKO


**33.** De la siguiente identidad:

$$\frac{\cos x-\operatorname{sen} x+1}{\cos x+\operatorname{sen} x-1}-\frac{\cos x+\operatorname{sen} x-1}{\cos x-\operatorname{sen} x+1}=m\cdot\cot^n x$$

Halle: "m – n"

A) –2 B) –1 C) 0
D) 1 E) 2

**34.** Si: $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$

Halle el mínimo valor de:

$$J=\frac{2+\cot^2 x}{\sec x\csc x-\operatorname{sen}^2 x\tan x}$$

A) –2 B) –1 C) 0
D) 1 E) 2

**35.** Halle el equivalente de la expresión:

$$M=\sqrt{\frac{3\csc^2 x+\sec^2 x}{1+2\cos^2 x}}+\sqrt{\frac{\csc^2 x+3\sec^2 x}{2\operatorname{sen}^2 x+1}}$$

Si $x \in$ IIIC

A) $2(\tan x-\cot x)$ B) $\sqrt{2}\sec x\csc x$
C) $2\sec x\csc x$
D) $\sec x\csc x$ E) $-2(\tan x+\cot x)$

**36.** Si se cumple:

$$\tan^2\theta+\cot^2\theta=14$$

Además: $\theta \in$ IIC
Halle:

$$K=(\sec\theta+\csc\theta)^2$$

A) 4 B) 8 C) 12
D) 20 E) 24

**37.** Dado:

$$a\cos x\operatorname{sen} y+b\operatorname{sen} x\cos y=0$$

Halle:

$$N=\frac{a^2\csc^2 x-b^2\cot^2 y}{a}\quad\frac{a^2\cot^2 x-b^2\csc^2 y}{b}$$

A) a + b B) a – b C) 1
D) –1 E) 0

**38.** Si:

$$\operatorname{sen} x-\cos^2 x+\operatorname{sen}^3 x=0$$

Halle:

$$M=\csc x+\operatorname{sen}^3 x$$

A) 1 B) 0 C) $\frac{1}{2}$
D) 2 E) –1

**39.** De la expresión:

$$\frac{\cot x\sec a+\csc x}{\cot x\sec b+\csc x}=\frac{\tan^2 a}{\tan^2 b}$$

Halle:

$$N=\frac{\sec a+\sec b}{1+\sec a\sec b}$$

A) –senx B) –cosx C) –tanx
D) cosx E) senx

**40.** Si se cumple:

$$\frac{\csc x}{\cot\theta}-\frac{\cot x}{\cot\phi}=\sqrt{\sec^2\theta-\sec^2\phi}$$

Halle el valor de "cos x"

A) $\tan\theta\cdot\cot\phi$ B) $\cot\theta\cdot\tan\phi$
C) $\operatorname{sen}\theta\cdot\cot\phi$
D) $\tan\theta\cdot\tan\phi$ E) $\cot\theta\cdot\cot\phi$

**41.** Halle N, de la variable angular sabiendo que es independiente de "x":

$$N=\operatorname{sen}^4 x(1-m\operatorname{sen}^2 x)+\cos^4 x(1-m\cos^2 x)$$

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$
D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{3}$

**42.** Si:

$$\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta-2\cos\theta=\sqrt{7}$$

Halle:

$$\sec^2\theta+\tan^2\theta$$

A) 0,5 B) 1 C) 1,5
D) 2 E) 2,5

team CALAPENSHKO



**43.** Si:
$$c = \text{sen}x + 2\sec x$$
$$a = \cos x + \csc x$$
$$b = \text{sen}x \cdot \cos x$$
¿Qué relación debe existir entre "a" y "c", para que b = f(a; c) adquiera solo valores reales?

A) $ac - 6a + 1 \geq 0$

B) $ac - 6c^2 - 1 \geq 0$

C) $a^2c^2 - 6ac + 1 \geq 0$

D) $a^2c^2 + 6ac - 1 \geq 0$

E) $a^2c^2 - 3ac + 2 \geq 0$

**44.** Elimine la variable angular "θ" de:
$$m\,\text{sen}\theta = ex\sec\theta \cdot \text{cov}\theta$$
$$2 - n = \text{vers}\theta + \text{cov}\theta$$

A) $m^2n^2 = mn$

B) $m(n^2 + 1) = m^2 - 1$

C) $m + 1 = n(1 - m)$

D) $n^2 = 2m + 1$

E) $mn - 1 = 2m^2 + n^2$

**45.** Elimine las variables angulares "x" e "y" de:
$$\sec^2 x + \csc^2 y = a \quad \ldots\ldots(i)$$
$$\cos x \cdot \text{sen}y = b^{-1} \quad \ldots\ldots(ii)$$
$$\sec^4 x + \csc^4 y = c \quad \ldots\ldots(iii)$$

A) $b^2 + c = a^2$ B) $b^2 - c^2 = a^2$

C) $b^2 + c = a^2$

D) $a^2 + c = b$ E) $a^2 + c = b^2$

**46.** Si el valor de "θ" corresponde a un ángulo agudo. $f(\theta) = \dfrac{\text{sen}\theta \cdot \tan\theta - \cos\theta \cdot \cot\theta}{\text{sen}\theta - \cos\theta}$

¿Cuál es el mínimo valor entero de f(θ)?

A) 4 B) 6 C) 8

D) 10 E) 12

**47.** Calcule:
$$\int = \sum_{k=1}^{90} \text{sen}^2 k°$$

A) 44,5 B) 45,5 C) 46,5

D) 47,5 E) 48,5

**48.** ¿Cuál es el menor valor de la suma de los cuadrados de las seis razones trigonométricas de un mismo ángulo?

A) 5 B) 6 C) 7

D) 8 E) 9

**49.** Si:
$$f(\tan^2 x + \cot^2 x) = \sec^4 x + \csc^4 x$$
Halle:
$$E = \frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(4)} + \frac{1}{f(6)} + \frac{1}{f(8)} + \ldots.$$

A) 1 B) 0,75 C) 0,50

D) 0,25 E) 0,20

**50.** De la siguiente condición:
$$\frac{\text{sen}^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} = \frac{1}{a+b}$$

Calcule: $\dfrac{\text{sen}^8 x}{a^3} + \dfrac{\cos^8 x}{b^3}$

A) $\dfrac{3}{(a+b)^3}$ B) $\dfrac{4}{(a+b)^3}$

C) $\dfrac{2}{(a+b)^3}$

D) $\dfrac{5}{(a+b)^3}$ E) $\dfrac{1}{(a+b)^3}$

team CALAPENSHKO

Capítulo 9

# Identidades de Arcos Compuestos

**CAPACIDADES**

- Reconocer arcos compuestos; suma y diferencia de arcos.
- Conocer el desarrollo de las razones trigonométricas con arcos de la forma "$\alpha + \theta$" ó "$\alpha - \theta$"

## APORTES DE LOS ÁRABES A LA MATEMÁTICA

La contribución árabe a la trigonometría nos la reseña Bell de la siguiente forma:

"Los árabes adoptaron y desarrollaron la trigonometría hindú. El primer progreso notable se debió al astrónomo Al-Battani (muerto en el 929), en el siglo IX. Si bien en realidad no fue el primero que aplicó el álgebra en lugar de la sola geometría a la trigonometría, este astrónomo matemático fue el primero que dio un gran paso en esa dirección. Usó además del seno hindú, la tangente y la cotangente.

En el siglo X se calcularon tablas de estas dos últimas, y también hicieron su aparición la secante y la cosecante como razones trigonométricas. Por estar el concepto de función todavía unos 600 años en el futuro, nada en su obra se parece mucho a la trigonometría elemental de hoy día."

**OMAR KHAYYAM**
**FIGURA ÁRABE MATEMÁTICA**

De hecho, la función seno fue traída de la matemática india se supone que a través de un texto de astronomía india Surya Siddhanta. También sen y cos fueron incorporadas de los hindúes. Las funciones tangente y cotangente sí son de origen árabe.

Abul Wafa había realizado un estudio sistemático de las 6 funciones trigonométricas, y en particular dio las relaciones:

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$$

El interés en la trigonometría por parte de los árabes se vio potenciado cuando entraron en contacto con las tablas de los hindúes. De hecho, la finalidad básica era mejorar la exactitud de éstas. Un ejemplo notable es el de al-Kashi que calculó el valor de sen con una exactitud de 16 decimales, usando un método iterativo que aparece en su libro Risala al-watar wa'l-jaib (se traduce como Tratado sobre la cuerda y el seno), y que suponía la resolución de ecuaciones de tercer grado.

Existe consenso entre los historiadores de las matemáticas en que la figura en este terreno más importante fue Abdul-Fath Umar ibn Ibrahim al-Kayyami, Omar Khayyam. Dio reglas para resolver ecuaciones cuadráticas y un método para la resolución de ecuaciones cúbicas con raíces reales, en la tradición de al-Kwarizmi. Ofreció algo parecido al triángulo de Pascal para los coeficientes del binomio. También, intentó una demostración del postulado de las paralelas de Euclides.

## INTRODUCCIÓN

Hasta el desarrollo del capitulo anterior, nuestro trabajo con las identidades, estaba orientado directamente a establecer relaciones entre las razones trigonométricas de un mismo arco. Nuestro objetivo, sobre la base de los capítulos anteriores, es relacionar las razones trigonométricas de un arco en términos de otros, cuya relación directa sea de adición y / o sustracción.

Por ejemplo, para desarrollar "sen(3x + y)" podemos hacerlo.

a. $\text{sen}(3x + y) = \text{sen}3x\cos y + \cos 3x \,\text{sen}y$
b. $\text{sen}(3x + y) = \text{sen}[(x + y) + 2x] = \text{sen}(x + y)\cos 2x + \cos(x + y)\,\text{sen}2x$
c. $\text{sen}(3x + y) = \text{sen}[(2x + y) + x] = \text{sen}(2x + y)\cos x + \cos(x + y)\,\text{sen}x$

entre otras.

Como podemos observar, es posible la descomposición del arco de múltiples maneras, es por esto que el estudiante debe comprender, que un primer paso es conocer las identidades y luego debe tener el criterio de cómo usarlos.

# IDENTIDADES DE ARCOS COMPUESTOS

## IDENTIDADES PARA LA SUMA DE ARCOS

$$\text{sen}(\alpha + \theta) = \text{sen}\alpha\cos\theta + \cos\alpha\,\text{sen}\theta$$
$$\cos(\alpha + \theta) = \cos\alpha\cos\theta - \text{sen}\alpha\,\text{sen}\theta$$
$$\tan(\alpha + \theta) = \frac{\tan\alpha + \tan\theta}{1 - \tan\alpha\tan\theta}$$

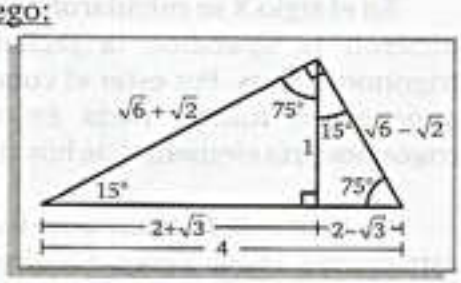
**Ejemplo (1):** $\text{sen}75° = \text{sen}(45° + 30°)$

$\text{sen}75° = \text{sen}45°\cos30° + \cos45°\,\text{sen}30°$

$$\text{sen}75° = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\ \text{sen}75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Luego:




**Ejemplo (2):** $\cos 67° = \cos(30° + 37°)$

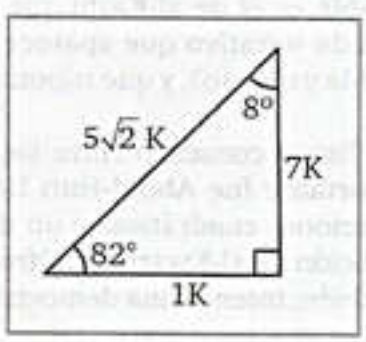
$\cos 67° = \cos30°\cos37° - \text{sen}30°\,\text{sen}37°$

$$\cos 67° = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{4}{5}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}\right) \qquad \therefore\ \cos 67° = \frac{4\sqrt{3}-3}{10}$$

**Ejemplo (3):** $\tan 82° = \tan(45° + 37°)$

$$\tan 82° = \frac{\tan45° + \tan37°}{1 - \tan45°\tan37°}$$

$$\tan 82° = \frac{1+\frac{3}{4}}{1-(1)\left(\frac{3}{4}\right)} \Rightarrow$$




$$\therefore\ \tan 82° = 7$$

team CALAPENSHKO



## IDENTIDADES PARA LA DIFERENCIA DE ARCOS

$$\operatorname{sen}(\alpha - \theta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\theta - \cos\alpha\operatorname{sen}\theta$$

$$\cos(\alpha - \theta) = \cos\alpha\cos\theta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta$$

$$\tan(\alpha - \theta) = \frac{\tan\alpha - \tan\theta}{1 + \tan\alpha\tan\theta}$$

**Ejemplo (1):** $\operatorname{sen} 7^\circ = \operatorname{sen}(37^\circ - 30^\circ) = \operatorname{sen} 37^\circ \cos 30^\circ - \cos 37^\circ \operatorname{sen} 30^\circ$

$$= \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \therefore \quad \operatorname{sen} 7^\circ = \frac{3\sqrt{3} - 4}{10}$$

**Ejemplo (2):** $\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{sen} 30^\circ$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \therefore \quad \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

**Ejemplo (3):** $\tan 23^\circ = \tan(53^\circ - 30^\circ) = \dfrac{\tan 53^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 53^\circ \tan 30^\circ} = \dfrac{\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}$

$$= \frac{3(4 - \sqrt{3})}{9 + 4\sqrt{3}} \qquad \therefore \quad \tan 23^\circ = \frac{48 - 25\sqrt{3}}{11}$$

También

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta + \theta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta\cos\theta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\theta$$

$$\cos(\alpha + \beta + \theta) = \cos\alpha\cos\beta\cos\theta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\theta + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\theta\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta\cos\beta$$

$$\tan(\alpha + \beta + \theta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta + \tan\theta - \tan\alpha\tan\beta\tan\theta}{1 - (\tan\alpha\tan\beta + \tan\beta\tan\theta + \tan\theta\tan\alpha)}$$

## IDENTIDADES AUXILIARES

| | |
|---|---|
| **1.** | $\operatorname{sen}(\alpha + \theta)\operatorname{sen}(\alpha - \theta) = \operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\theta$ |
| **2.** | $\cos(\alpha + \theta)\cos(\alpha - \theta) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\theta$ |
| **3.** | $\tan\alpha + \tan\theta + \tan(\alpha + \theta)\tan\alpha\tan\theta = \tan(\alpha + \theta)$ |

| | |
|---|---|
| **4.** | $\tan\alpha - \tan\theta - \tan(\alpha-\theta)\tan\alpha\tan\theta = \tan(\alpha-\theta)$ |
| **5.** | $\tan\alpha \pm \tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha\pm\theta)}{\cos\alpha\cos\theta}$ |
| **6.** | $\cot\alpha \pm \cot\theta = \dfrac{\operatorname{sen}(\theta\pm\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta}$ |

**Ejercicios:**

1) $\operatorname{sen}^2 7x - \operatorname{sen}^2 2x = \operatorname{sen}(7x+2x)\,.\,\operatorname{sen}(7x-2x)$

$= \operatorname{sen}9x\,.\,\operatorname{sen}5x$

2) $\cos^2 40° - \operatorname{sen}^2 20° = \cos(40°+20°)\,.\,\cos(40°-20°)$

$= \cos60°\cos20°$

3) • $\tan5\alpha + \tan3\alpha + \tan8\alpha\,.\,\tan5\alpha\,.\,\tan3\alpha = \tan8\alpha$

• $\tan40° + \tan20° + \sqrt{3}\tan40°\tan20° = \tan60°$

4) • $\tan35° + \tan10° = \dfrac{\operatorname{sen}(35°+10°)}{\cos35°\cos10°}$

• $\tan4\theta - \tan3\theta = \dfrac{\operatorname{sen}(4\theta-3\theta)}{\cos4\theta\,.\cos3\theta}$

• $\dfrac{\operatorname{sen}3\alpha}{\cos2\alpha\,.\cos\alpha} = \dfrac{\operatorname{sen}(2\alpha+\alpha)}{\cos2\alpha\,.\cos\alpha} = \tan2\alpha + \tan\alpha$

**PROPIEDADES:**

I. $\{a;b\} \subset \mathbb{R}$

$a\operatorname{sen}x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\operatorname{sen}(x+\phi)$

donde:

$\operatorname{sen}\phi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \wedge \cos\phi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

II. $\underbrace{-\sqrt{a^2+b^2}}_{\text{Mín.}} \le a\operatorname{sen}x + b\cos x \le \underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{\text{Máx.}}$

**Ejemplo (1):** $3\operatorname{sen}x + 4\cos x = \sqrt{3^2+4^2}\ \operatorname{sen}(x+\phi)$

$3\operatorname{sen}x + 4\cos x = 5\operatorname{sen}(x+\phi)$

$\operatorname{sen}\phi = \dfrac{4}{5} \wedge \cos\phi = \dfrac{3}{5}$

team CALAPENSHKO


**Ejemplo (2):** a. $-\sqrt{3^2+4^2} \leq 3\operatorname{sen}x+4\cos x \leq \sqrt{3^2+4^2}$

b. $-\sqrt{(5)^2+(-2)^2} \leq 5\operatorname{sen}x-2\cos x \leq \sqrt{(5)^2+(-2)^2}$

c. $-\sqrt{(\sqrt{7})^2+(\sqrt{2})^2} \leq \sqrt{7}\operatorname{sen}x+\sqrt{2}\cos x \leq \sqrt{(\sqrt{7})^2+(\sqrt{2})^2}$

**OBSERVACIÓN**

Por su frecuente aplicación es recomendable que usted recuerde:

$$\operatorname{sen}x \pm \cos x = \sqrt{2}\operatorname{sen}(x \pm 45°)$$
$$\sqrt{3}\operatorname{sen}x \pm \cos x = 2\operatorname{sen}(x \pm 30°)$$
$$\operatorname{sen}x \pm \sqrt{3}\cos x = 2\operatorname{sen}(x \pm 60°)$$

Ejemplo: $\operatorname{sen}10° + \cos 10° = \sqrt{2}\operatorname{sen}(10°+45°) = \sqrt{2}\operatorname{sen}55°$

$\sqrt{3}\operatorname{sen}35° - \cos 35° = 2\operatorname{sen}(35°-30°) = 2\operatorname{sen}5°$

$\operatorname{sen}5° + \sqrt{3}\cos 5° = 2\operatorname{sen}(5°+60°) = 2\operatorname{sen}65°$

## PROPIEDADES PARA 3 ÁNGULOS

I. Si: $\alpha + \beta + \theta = n\pi$ ; $n \in \mathbb{Z}$

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\theta = \tan\alpha \cdot \tan\beta \cdot \tan\theta$$
$$\cot\alpha \cdot \cot\beta + \cot\beta \cdot \cot\theta + \cot\alpha \cdot \cot\theta = 1$$

II. Si: $x + y + z = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ ; $n \in \mathbb{Z}$

$$\cot x + \cot y + \cot z = \cot x \cdot \cot y \cdot \cot z$$
$$\tan x \cdot \tan y + \tan y \cdot \tan z + \tan x \cdot \tan z = 1$$

**Ejemplo (1):** Si: $40° + 80° + 60° = 180°$

$\tan 40° + \tan 80° + \tan 60° = \tan 40° \cdot \tan 80° \cdot \tan 60°$

$\cot 40° \cdot \cot 80 + \cot 80° \cdot \cot 60° + \cot 40° \cdot \cot 60° = 1$

**Ejemplo (2):** Si: $20° + 40° + 30° = 90°$

$\cot 20° + \cot 40° + \cot 30° = \cot 20° \cdot \cot 40° \cdot \cot 30°$

$\tan 20° \cdot \tan 40° + \tan 40° \tan 30° + \tan 20° \cdot \tan 30° = 1$

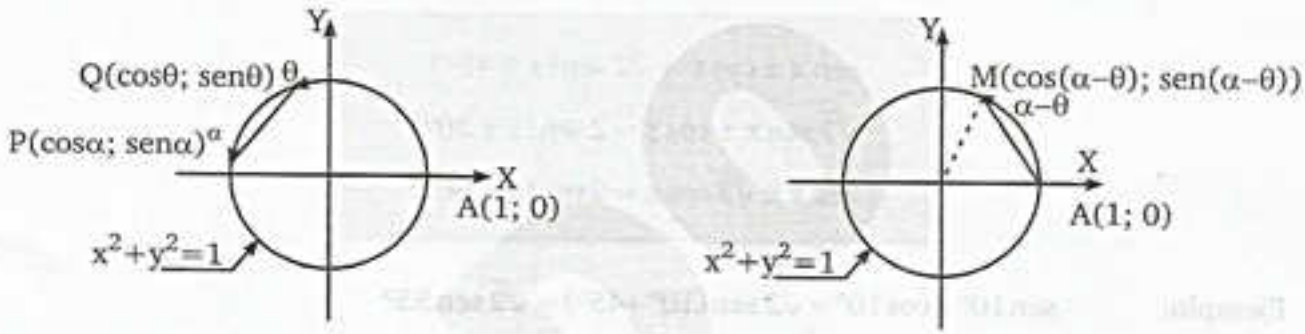
team CALAPENSHKO


## DEMOSTRACIONES

Las demostraciones de las identidades anteriores las realizaremos a partir de la demostración de la siguiente identidad:

$$\cos(\alpha-\theta)=\cos\alpha\cos\theta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta$$

consideremos dos arcos en posición normal $\alpha$ y $\theta$ en una circunferencia trigonométrica como se muestra en la figura , donde $m\widehat{PQ}=\alpha-\theta$ y también se muestra un arco AM en posición normal cuya medida es $\alpha-\theta$.




Notemos de las figuras anteriores que los segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{AM}$ tienen la misma longitud, es decir PQ=AM

Por distancia entre dos puntos tenemos:

$$PQ=\sqrt{(\cos\alpha-\cos\theta)^2+(\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\theta)^2}$$

efectuando:

$$PQ=\sqrt{2-2(\cos\alpha\cos\theta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta)} \qquad ...(I)$$

asimismo:

$$AM=\sqrt{(1-\cos(\alpha-\theta))^2+(0-\operatorname{sen}(\alpha-\theta))^2}$$

Simplificando:

$$AM=\sqrt{2-2\cos(\alpha-\theta)} \qquad ...(2)$$

Igualando (1) y (2) obtenemos:

$$2-2\cos(\alpha-\theta)=2-2(\cos\alpha\cos\theta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta)$$

de donde:

$$\boxed{\cos(\alpha-\theta)=\cos\alpha\cos\theta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta}$$

team CALAPENSHKO


De esta manera queda demostrada la identidad para el coseno de la diferencia de dos arcos, donde es válida para cualquier $\alpha$ y $\theta$ real.

Utilizando la identidad demostrada arriba, tenemos:

1. $\cos(\alpha+\theta)=\cos(\alpha-(-\theta))$

$\cos(\alpha+\theta)=\cos\alpha\cos(-\theta)+\text{sen}\alpha\text{sen}(-\theta)$

$\cos(\alpha+\theta)=\cos\alpha\cos\theta+\text{sen}\alpha(-\text{sen}\theta)$

luego:

$$\boxed{\cos(\alpha+\theta)=\cos\alpha\cos\theta-\text{sen}\alpha\text{sen}\theta}$$

2. $\text{sen}(\alpha+\theta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\theta)\right]$

$\text{sen}(\alpha+\theta)=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\theta\right]$

$\text{sen}(\alpha+\theta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\theta+\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\text{sen}\theta$

$\text{sen}(\alpha+\theta)=\text{sen}\alpha\cos\theta+\cos\alpha\text{sen}\theta$

Luego:

$$\boxed{\text{sen}(\alpha+\theta)=\text{sen}\alpha\cos\theta+\cos\alpha\text{sen}\theta}$$

twitter.com/calapenshko

3. $\text{sen}(\alpha-\theta)=\text{sen}[\alpha+(-\theta)]$

$\text{sen}(\alpha-\theta)=\text{sen}\alpha\cos(-\theta)+\cos\alpha\text{sen}(-\theta)$

$\text{sen}(\alpha-\theta)=\text{sen}\alpha\cos\theta+\cos\alpha(-\text{sen}\theta)$

efectuando obtenemos:

$\text{sen}(\alpha-\theta)=\text{sen}\alpha\cos\theta-\cos\alpha\text{sen}\theta$

4. $\tan(\alpha+\theta)=\frac{\text{sen}(\alpha+\theta)}{\cos(\alpha+\theta)}$

$\tan(\alpha+\theta)=\frac{\text{sen}\alpha\cos\theta+\cos\alpha\text{sen}\theta}{\cos\alpha\cos\theta-\text{sen}\alpha\text{sen}\theta}$

dividiendo numerador y denominador por $\cos\alpha\cos\theta$

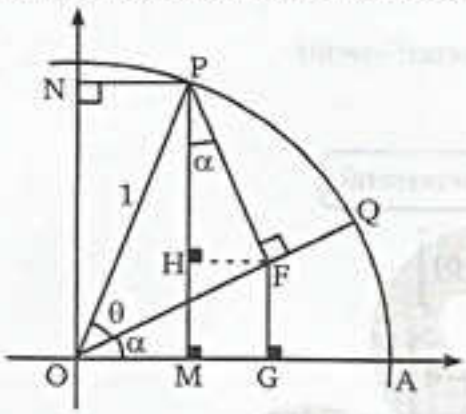
$$\tan(\alpha+\theta)=\frac{\frac{\text{sen}\alpha\cos\theta+\cos\alpha\text{sen}\theta}{\cos\alpha\cos\theta}}{\frac{\cos\alpha\cos\theta-\text{sen}\alpha\text{sen}\theta}{\cos\alpha\cos\theta}}=\frac{\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}}{1-\frac{\text{sen}\alpha\cos\theta}{\cos\alpha\cos\theta}}$$

entonces $\boxed{\tan(\alpha+\theta)=\frac{\tan\alpha+\tan\theta}{1-\tan\alpha\tan\theta}}$

## SENO DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS SEN $(\alpha+\theta)$ Y SEN $(\alpha-\theta)$

Para demostrar estas identidades hay diversos métodos. Emplearé en este caso el método gráifco, pero antes es bueno recordar:

* En la circunferencia trigonométrica ubicamos dos ángulos $\alpha$ y $\theta$ como se muestra en la figura.




* Se traza $\overline{MP}$ entonces: $MP = \text{sen}(\alpha+\theta)$ ...(1)

* Se traza $\overline{PF} \perp \overline{OQ}$, entonces el $\triangle OFP$ se cumple:

$$\overline{PF} = \text{sen}\theta \text{ y } \overline{OF} = \cos\theta$$

* Se trazan $\overline{FG} \perp \overline{OA}$ y $\overline{FH} \perp \overline{MP}$ formandose los triángulos rectángulos OGF y PHF

En el $\triangle OGF$

Se deduce:
$GF = \cos\theta\ \text{sen}\alpha$
$OG = \cos\theta\ \cos\alpha$

En el $\triangle PHF$

Se deduce:
$HF = \text{sen}\theta\ \text{sen}\alpha$
$HP = \text{sen}\theta\ \cos\alpha$

* Observar que:

$$MP = MH + HP$$
$$\text{sen}(\alpha+\theta) \quad \cos\theta\ \text{sen}\alpha \quad \text{sen}\theta\ \cos\alpha$$

* Ordenando queda:

$$\boxed{\text{sen}(\alpha+\theta) = \text{sen}\alpha\cos\theta + \cos\alpha\text{sen}\theta}$$

I.q.q.d.

team CALAPENSHKO


## COSENO DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS COS(α+θ) Y COS(α−θ)

| |
|---|
| $\cos(\alpha+\theta)=\cos\alpha\cos\theta-\text{sen}\alpha\text{sen}\theta$ |
| $\cos(\alpha-\theta)=\cos\alpha\cos\theta+\text{sen}\alpha\text{sen}\theta$ |

### DEMOSTRACIÓN :

Para demostrar esta identidad usamos las figuras de la demostración anterior.

* Observar que: $NP=\cos(\alpha+\theta)$

* Pero: $NP=OM$ y $OM=OG-MG$

Además:

$MG=HF$

Entonces:

$NP=OG-HF$

$\cos(\alpha+\theta)$ — $NP$

$\cos\theta\cos\alpha$ — $OG$

$\text{sen}\theta\,\text{sen}\alpha$ — $HF$

## TANGENTE DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS TAN (α+θ) Y TAN (α − θ)

| | |
|---|---|
| $\tan(\alpha+\theta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\theta}{1-\tan\alpha\tan\theta}$ | $\tan(\alpha-\theta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\theta}{1+\tan\alpha\tan\theta}$ |

### DEMOSTRACIÓN:

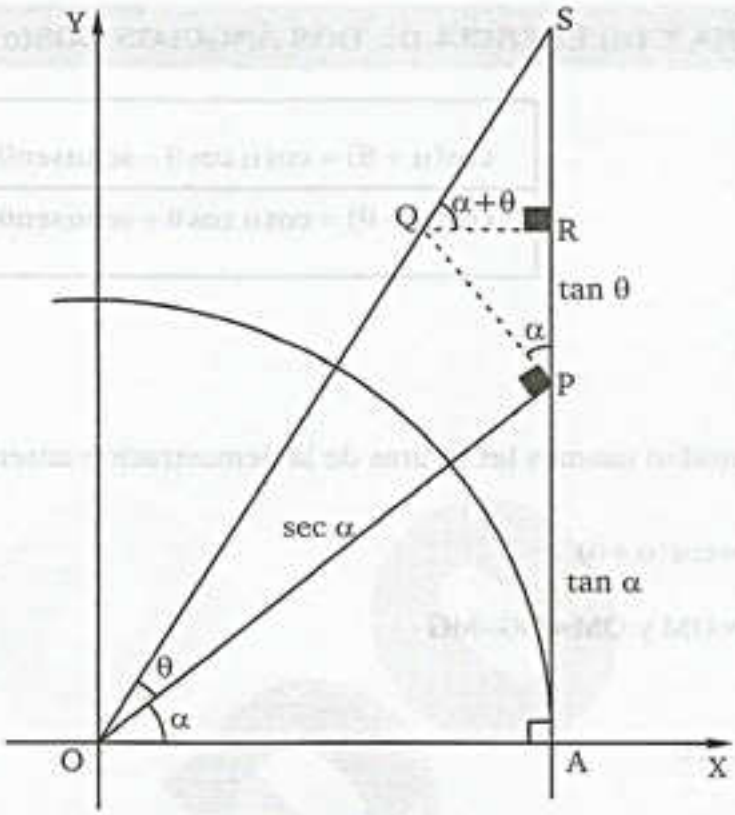
* Se traza el eje de tangentes.

* $\overline{AS}=\tan(\alpha+\theta)$ ... (1)

* Se prolonga el lado final de α hasta intersectar al eje:
  Entonces: $\overline{AP}=\tan\alpha$ y $\overline{OP}=\sec\alpha$

* Por P levantamos una perpendicular a $\overline{OP}$ hasta el punto Q.
  Formándose el triángulo rectángulo OPQ

$$\frac{\overline{PQ}}{\sec\alpha}=\tan\theta\Rightarrow\overline{PQ}=\text{sen}\alpha\tan\theta$$




* Por Q se traza una perpendicular a $\overline{PS}$ formándose el triángulo rectángulo PRQ, además se observa que $\angle QPR=\alpha$.

  Entonces:

$$\frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}}=\cos\alpha \Rightarrow \overline{PR}=\overline{PQ}\cos\alpha$$

$$\overline{PR}=\sec\alpha\tan\theta\cos\alpha \Rightarrow \overline{PR}=\tan\theta \quad \text{, además :}$$

$$\frac{\overline{QR}}{\overline{PR}}=\tan\alpha \Rightarrow \overline{QR}=\overline{PR}\tan\alpha \Rightarrow \overline{QR}=\tan\theta\tan\alpha$$

* En el triángulo rectángulo QRS: $\angle SQR=\alpha+\theta$

$$\frac{\overline{RS}}{\overline{QR}}=\tan(\alpha+\theta) \Rightarrow \overline{RS}=\overline{QR}\tan(\alpha+\theta) \Rightarrow \overline{RS}=\tan\alpha\tan\theta(\alpha+\theta)$$

* De(1) $=\overline{AS}=\tan(\alpha+\theta)$

  De la figura: $\overline{AS}=\overline{AP}+\overline{PR}+\overline{RS}$

  Entonces : $\tan(\alpha+\theta)=\tan\alpha+\tan\theta+\tan\alpha\tan\theta\tan(\alpha+\theta)$

$$\Rightarrow \tan(\alpha+\theta)-\tan\alpha\tan\theta\tan(\alpha+\theta)=\tan\alpha+\tan\theta$$

$$\tan(\alpha+\theta)(1-\tan\alpha\tan\theta)=\tan\alpha+\tan\theta$$

$$\therefore \boxed{\tan(\alpha+\theta)=\frac{\tan\alpha+\tan\theta}{1-\tan\alpha\tan\theta}}$$

team CALAPENSHKO



## IDENTIDADES AUXILIARES

(I)

$$\sen(\alpha+\theta)\sen(\alpha-\theta)=\sen^2\alpha-\sen^2\theta$$

$$\cos(\alpha+\theta)\cos(\alpha-\theta)=\cos^2\alpha-\sen^2\theta$$

**DEMOSTRACIÓN :**

* Sabemos que:

$$\sen(\alpha+\theta)=\sen\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sen\theta \quad ...(1)$$

$$\sen(\alpha-\theta)=\sen\alpha\cos\theta-\cos\alpha\sen\theta \quad ...(2)$$

* Multiplicando (1) y (2):

$$\sen(\alpha+\theta)\sen(\alpha-\theta)=\sen^2\alpha\underbrace{\cos^2\theta}_{1-\sen^2\theta}-\underbrace{\cos^2\alpha}_{1-\sen^2\alpha}\sen^2\theta$$

$$=\sen^2\alpha(1-\sen^2\theta)-(1-\sen^2\alpha)\sen^2\theta$$

$$=\sen^2\alpha-\sen^2\alpha\sen^2\theta-\sen^2\theta+\sen^2\alpha\sen^2\theta$$

$$=\sen^2\alpha-\sen^2\theta$$

$$\boxed{\sen(\alpha+\theta)\sen(\alpha-\theta)=\sen^2\alpha-\sen^2\theta}$$

Desarrollando:

$$=(\cos\alpha\cos\theta-\sen\alpha\sen\theta)(\cos\alpha\cos\theta+\sen\alpha\sen\theta)$$

$$=\cos^2\alpha\cos^2\theta-\sen^2\alpha\sen^2\theta$$

$$=\cos^2\alpha(1-\sen^2\theta)-(1-\cos^2\alpha)\sen^2\theta$$

$$=\cos^2\alpha-\cancel{\cos^2\alpha\sen^2\theta}-\sen^2\theta+\cancel{\sen^2\theta\cos^2\alpha}$$

$$=\cos^2\alpha-\sen^2\theta$$

$$\boxed{\cos(\alpha+\theta)\cos(\alpha-\theta)=\cos^2\alpha-\sen^2\theta}$$

(II)

| | |
|---|---|
| $\tan\alpha+\tan\theta=\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\theta)}{\cos\alpha\cos\theta}$ | $\tan\alpha-\tan\theta=\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha-\theta)}{\cos\alpha\cos\theta}$ |
| $\cot\alpha+\cot\theta=\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\theta)}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta}$ | $\cot\alpha-\cot\theta=\dfrac{\operatorname{sen}(\theta-\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta}$ |

**DEMOSTRACIÓN :**

$$* \tan\alpha+\tan\theta=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

$$\tan\alpha+\tan\theta=\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\theta+\cos\alpha\operatorname{sen}\theta}{\cos\alpha\cos\theta}$$

$$\therefore \boxed{\tan\alpha+\tan\theta=\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\theta)}{\cos\alpha\cos\theta}}$$

$$* \tan\alpha-\tan\theta=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

$$\tan\alpha-\tan\theta=\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\theta-\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{\cos\alpha\cos\theta}$$

$$\therefore \boxed{\tan\alpha-\tan\theta=\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\theta)}{\cos\alpha\operatorname{sen}\theta}}$$

(III)

| |
|---|
| $\tan(\alpha+\theta)=\tan\alpha+\tan\theta+\tan\alpha\tan\theta\tan(\alpha+\theta)$ |
| $\tan(\alpha+\theta)=\tan\alpha-\tan\theta-\tan\alpha\tan\theta\tan(\alpha-\theta)$ |

**DEMOSTRACIÓN :**

* Sabemos que : $\tan(\alpha+\theta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\theta}{1-\tan\alpha\tan\theta}$

* Entonces: $\tan(\alpha+\theta)\left[1-\tan\alpha\tan\theta\right]=\tan\alpha+\tan\theta$

$$\tan(\alpha+\theta)-\tan\alpha\tan\theta\tan(\alpha+\theta)=\tan\alpha+\tan\theta$$

$$\boxed{\tan(\alpha+\theta)=\tan\alpha+\tan\theta+\tan\alpha\tan\theta\tan(\alpha+\theta)}$$

team CALAPENSHKO


## PROPIEDADES

I. $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$

$$a\operatorname{sen}x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\,\operatorname{sen}(x + \phi)$$

donde:

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \wedge \cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

II. $-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a\operatorname{sen}x + b\cos x \leq \sqrt{a^2 + b^2}$

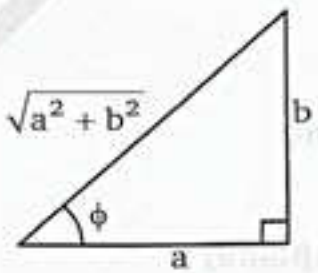
## DEMOSTRACIÓN

I) $a\operatorname{sen}x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\,\operatorname{sen}(x + \phi)$

Multiplicando y dividiendo por $\sqrt{a^2 + b^2}$ obtenemos :

$$a\operatorname{sen}x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\operatorname{sen}x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos x\right)$$

Definimos $\phi$ de tal manera que:




$$\Rightarrow \operatorname{sen}\phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Rightarrow \cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Entonces, reemplazando:

$$a\operatorname{sen}x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\,(\cos\phi\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}\phi\cos x)$$

$$\boxed{a\operatorname{sen}x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\,\operatorname{sen}(x + \phi)}$$

II) Debido a que $\text{sen}(x+\phi) \in [-1, 1]$, es decir :

$$-1 \leq \text{sen}(x+\phi) \leq 1$$

multiplicando por $\sqrt{a^2+b^2}$ :

$$-\sqrt{a^2+b^2} \leq \sqrt{a^2+b^2}\,\text{sen}(x+\phi) \leq \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\boxed{-\sqrt{a^2+b^2} \leq a\,\text{sen}x + b\cos x \leq \sqrt{a^2+b^2}}$$

## PROPIEDADES PARA 3 ÁNGULOS:

I. Si $\alpha+\beta+\theta = n\pi;\ n \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{\tan\alpha + \tan\beta + \tan\theta = \tan\alpha.\tan\beta.\tan\theta}$$

$$\boxed{\cot\alpha.\cot\beta + \cot\beta.\cot\theta + \cot\alpha.\cot\theta = 1}$$

### DEMOSTRACIÓN

Como $\alpha+\beta+\theta = n\pi$

$$\Rightarrow \tan(\alpha+\beta+\theta) = \tan(n\pi)$$

$$\frac{\tan\alpha + \tan(\beta+\theta)}{1-\tan\alpha\tan(\beta+\theta)} = 0$$

$$\Rightarrow \tan\alpha + \tan(\beta+\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \tan(\beta+\theta) = -\tan\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\tan\beta+\tan\theta}{1-\tan\beta\,\tan\theta} = -\tan\alpha$$

$$\Rightarrow \tan\beta + \tan\theta = -\tan\alpha(1-\tan\beta\tan\theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan\alpha + \tan\beta + \tan\theta = \tan\alpha\tan\beta\tan\theta}$$

dividiendo entre $\tan\alpha\tan\beta\tan\theta$ se obtiene:

$$\boxed{\cot\alpha.\cot\beta + \cot\beta.\cot\theta + \cot\alpha.\cot\theta = 1}$$

team CALAPENSHKO


II. Si $x+y+z=(2n+1)\frac{\pi}{2}; n\in\mathbb{Z}$

| |
|---|
| $\cot\alpha+\cot y+\cot z=\cot x.\cot y.\cot z$ |
| $\tan x.\tan y+\tan y.\tan z+\tan x.\tan z=1$ |

**DEMOSTRACIÓN**

$$x+y+z=(2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$x+y=(2n+1)\frac{\pi}{2}-z$$

$$\Rightarrow \tan(x+y)=\tan((2n+1)\frac{\pi}{2}-z)=\cot z$$

$$\Rightarrow \frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x.\tan y}=\frac{1}{\tan z}$$

$$\Rightarrow \tan x.\tan z+\tan y.\tan z=1-\tan x.\tan y$$

$$\Rightarrow \tan x.\tan y+\tan y.\tan z+\tan x.\tan z=1$$

Dividiendo entre tan.tany.tanz se obtiene:

$$\cot x+\cot y+\cot z=\cot x.\cot y.\cot z$$

## EJERCICIOS DE APLICACIÓN

**1.** Reduzca:

- $\text{sen}40^\circ\cos20^\circ + \text{sen}20^\circ\cos40^\circ =$ .....
- $\text{sen}17^\circ\cos13^\circ + \text{sen}13^\circ\cos17^\circ =$ .....
- $\text{sen}23^\circ\cos14^\circ + \text{sen}14^\circ\cos23^\circ =$ .....
- $\text{sen}40^\circ\cos10^\circ - \text{sen}10^\circ\cos40^\circ =$ .....
- $\text{sen}55^\circ\cos10^\circ - \text{sen}10^\circ\cos55^\circ =$ .....
- $\text{sen}42^\circ\cos26^\circ - \text{sen}26^\circ\cos42^\circ =$ .....

**2.** Reduzca:

- $\cos20^\circ\cos10^\circ - \text{sen}10^\circ\text{sen}20^\circ =$ .....
- $\cos80^\circ\cos10^\circ - \text{sen}80^\circ\text{sen}10^\circ =$ .....
- $\cos16^\circ\cos14^\circ - \text{sen}16^\circ\text{sen}14^\circ =$ .....
- $\cos30^\circ\cos15^\circ - \text{sen}30^\circ\text{sen}15^\circ =$ .....
- $\cos65^\circ\cos20^\circ - \text{sen}65^\circ\text{sen}20^\circ =$ .....
- $\cos60^\circ\cos7^\circ - \text{sen}60^\circ\text{sen}7^\circ =$ .....

**3.** Simplifique:

- $\dfrac{\tan3x + \tan2x}{1 - \tan3x\tan2x} =$ .....
- $\dfrac{\tan6\alpha + \tan2\alpha}{1 - \tan6\alpha\tan2\alpha} =$ .....
- $\dfrac{\tan(x-20^\circ) + \tan(x+20^\circ)}{1 - \tan(x-20^\circ)\tan(x+20^\circ)} =$ .....
- $\dfrac{\tan3x - \tan x}{1 + \tan3x\tan x} =$ .....
- $\dfrac{\tan5x - \tan3x}{1 + \tan5x\tan3x} =$ .....
- $\dfrac{\tan(2x+30^\circ) - \tan(2x-15^\circ)}{1 + \tan(2x+30^\circ)\tan(2x-15^\circ)} =$ .....

**4.** Si: $\text{sen}\,\alpha = -\dfrac{5}{13}$, $\alpha \in$ IIIC

$\cos\theta = \dfrac{4}{5}$, $\theta \in$ IVC

Calcule:

- $\text{sen}(\alpha+\theta) =$ .....
- $\cos(\alpha+\theta) =$ .....
- $\tan(\alpha+\theta) =$ .....
- $\text{sen}(\alpha-\theta) =$ .....
- $\cos(\alpha-\theta) =$ .....
- $\tan(\alpha-\theta) =$ .....

**5.** Reduzca:

- $\tan3x+\tan2x+\tan5x\tan3x\tan2x =$ .....
- $\tan40^\circ+\tan20^\circ+\sqrt{3}\tan40^\circ\tan20^\circ =$ .....
- $\tan23^\circ+\tan22^\circ+\tan23^\circ\tan22^\circ =$ .....
- $\tan3x-\tan2x-\tan x\tan3x\tan2x =$ .....
- $\tan50^\circ-\tan30^\circ-\tan20^\circ\tan50^\circ\tan30^\circ =$ .....
- $\tan10^\circ-\tan2^\circ-\dfrac{1}{7}\tan10^\circ\tan2^\circ =$ .....

**6.** Complete:

- $____ \le \text{sen}\,x - \cos x \le ____$
- $____ \le 3\text{sen}\,x + 4\cos x \le ____$
- $____ \le 2\text{sen}\,x - \sqrt{3}\cos x \le ____$
- $____ \le \sqrt{7}\,\text{sen}\,x + \sqrt{2}\cos x \le ____$
- $__ \le (\sqrt{3}+1)\text{sen}\,x - (\sqrt{3}-1)\cos x \le __$

team CALAPENSHKO



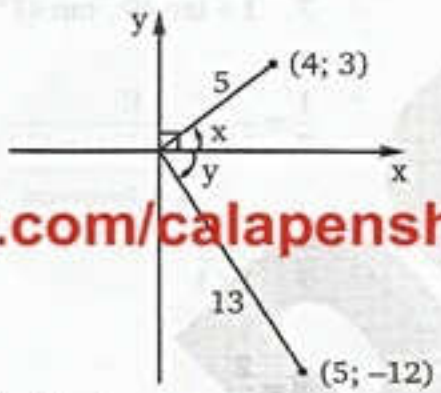
## PROBLEMAS RESUELTOS

**PROBLEMA 1**

Si se cumple: $\tan x = 0{,}75 \ \wedge \ \sec y = 2{,}6$
Además: $x \in IC;\ y \in IVC$
Calcule: $\operatorname{sen}(x+y)$

**Resolución:**

- $\tan x = 0{,}75 = \frac{3}{4}\ ;\ x \in IC$
- $\sec y = 2{,}6 = \frac{13}{5}\ ;\ x \in IVC$




twitter.com/calapenshko

Usando la identidad:

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}x\cos y + \cos x \operatorname{sen} y$$

De la gráfica, tenemos:

$$\operatorname{sen}(x+y) = \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right)$$

$$\therefore \quad \operatorname{sen}(x+y) = -\frac{33}{65}$$

**PROBLEMA 2**

Si: $a - b = \frac{2\pi}{3}$

Calcule: $M = (\cos a + \cos b)^2 + (\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b)^2$

**Resolución:**

Desarrollando M: $M = \cos^2 a + 2\cos a \cos b + \cos^2 b + \operatorname{sen}^2 a + 2\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b + \operatorname{sen}^2 b$

$$M = 1 + 1 + 2(\cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b)$$

$$M = 2 + 2\cos(a - b)$$

Usando el dato: $a - b = \frac{2\pi}{3}$

$$M = 2 + 2\cos\frac{2\pi}{3}$$

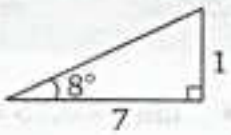
$$M = 2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \quad M = 1$$

**PROBLEMA 3** Calcule aproximadamente:

$$E = \tan 49° - \tan 41°$$

**Resolución:** Sabemos: $\tan 8° = \frac{1}{7}$ (aprox.)




Luego: $\tan 8° = \tan(49° - 41°)$ (por compuestos)

$$\frac{1}{7} = \frac{\tan 49° - \tan 41°}{1 + \tan 49 \,.\, \tan 41°} \quad ; \quad \tan 49° = \cot 41°$$

Reemplazando:

$$\frac{1}{7} = \frac{E}{1 + \underbrace{\cot 41° \tan 41°}_{\text{R. T. Recíprocas}}}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{E}{1+1}$$

$$\therefore \quad \mathbf{E = \frac{2}{7}}$$

**PROBLEMA 4**

Si: $\operatorname{sen}(x-y) = 3\cos(y-x)$ .....(i)

Además: $\cot(x+y) = 0{,}5$ .....(ii)

Calcule: $\tan 2x$

**Resolución:**

$$\boxed{\cos(y-x) = \cos(x-y)}$$

De (i): $\operatorname{sen}(x-y) = 3\cos(x-y)$

$$\tan(x-y) = 3 \quad .....(*)$$

De (ii): $\cot(x+y) = 1/2$

$$\tan(x+y) = 2 \quad .....(**)$$

Luego: $\tan 2x = \tan[(x+y)+(x-y)]$

$$\tan 2x = \frac{\tan(x+y) + \tan(x-y)}{1 - \tan(x+y)\tan(x-y)} \quad .....(\alpha)$$

Reemplazando (*) y (**) en ($\alpha$)

$$\tan 2x = \frac{3+2}{1-(3)(2)}$$

$$\therefore \quad \mathbf{\tan 2x = -1}$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 5** Sean x, y, z las medidas de los ángulos interiores de un triángulo tales que:

$$\cot x + \cot y = -3 \tan z \cot x \cot y$$

Determine tan x en función del ángulo "y". **ADMISIÓN UNMSM 2016 - I**

**Resolución:**

Datos:

I. $x + y + z = 180^\circ$

II. $\dfrac{\cot x + \cot y}{\cot x \cot y} = 3 \tan z$

$\tan x + \tan y = 3 \tan z$

Se cumple por propiedad:

$$\underbrace{\tan x + \tan y}_{3 \tan z} + \tan z = \tan x \tan y \tan z$$

$$3 \tan z + \tan z = \tan x \tan y \tan z$$

$$4 = \tan x \tan y$$

$$\tan x = 4 \cot y$$

**PROBLEMA 6** Si $\tan x + \cot x = \dfrac{5}{2}$ y $M = \dfrac{\operatorname{sen}(45^\circ + x)}{\operatorname{sen}(135^\circ + x)}$ calcule $M^2$.

**ADMISIÓN UNMSM 2016 - II**

**Resolución:**

$$\begin{cases} \tan x + \cot x = \dfrac{5}{2} \\ \sec x \csc x = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} x \cos x = \frac{2}{5}}$$

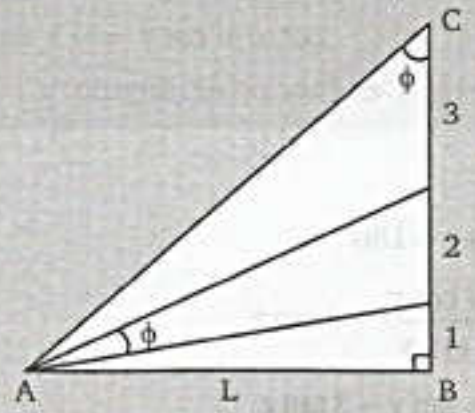
Lo pedido $M^2$ donde: $M = \dfrac{\operatorname{sen}(45^\circ + x)}{\operatorname{sen}(135^\circ + x)} = \dfrac{\operatorname{sen}(45^\circ + x)}{\operatorname{sen}(45^\circ - x)} = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x - \operatorname{sen} x}$

$$M^2 = \frac{1 + 2\operatorname{sen} x \cos x}{1 - 2\operatorname{sen} x \cos x}$$

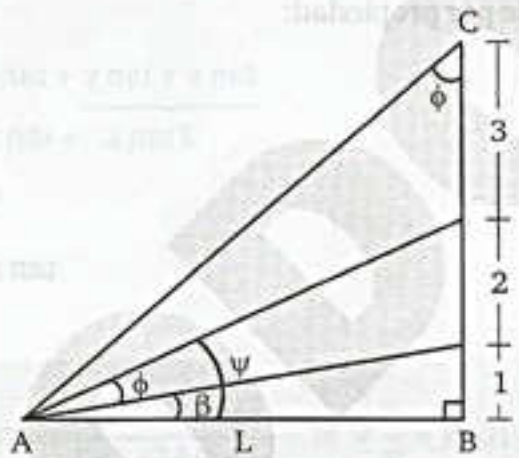
Reemplazando: $\operatorname{sen} x \cos x = \dfrac{2}{5}$

$$\therefore \quad M^2 = \frac{1 + 2\left(\frac{2}{5}\right)}{1 - 2\left(\frac{2}{5}\right)} = 9$$

**PROBLEMA 7** En la figura mostrada calcule el valor de $\tan\phi$




**Resolución:**




Haciendo : $AB = L$

Se observa : $\phi = \psi - \beta$ ; además : $\begin{cases} \tan\psi = \dfrac{3}{L} \\ \tan\beta = \dfrac{1}{L} \\ \tan\phi = \dfrac{L}{6} \end{cases}$

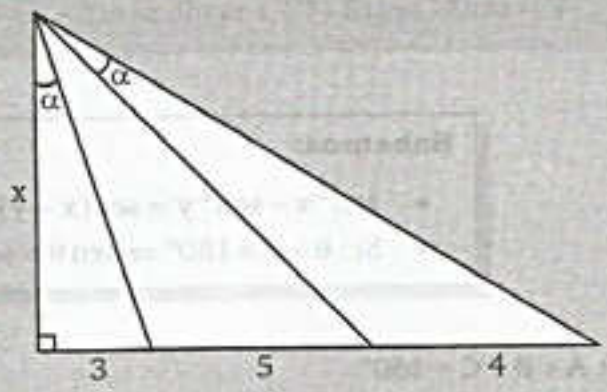
Entonces : $$\tan\phi = \tan(\psi - \beta) = \frac{\tan\psi - \tan\beta}{1 + \tan\psi\tan\beta}$$

Reemplazando : $$\frac{L}{6} = \frac{\frac{3}{L} - \frac{1}{L}}{1 + \left(\frac{3}{L}\right)\left(\frac{1}{L}\right)} = \frac{2L}{L^2 + 3} \Rightarrow L = 3$$

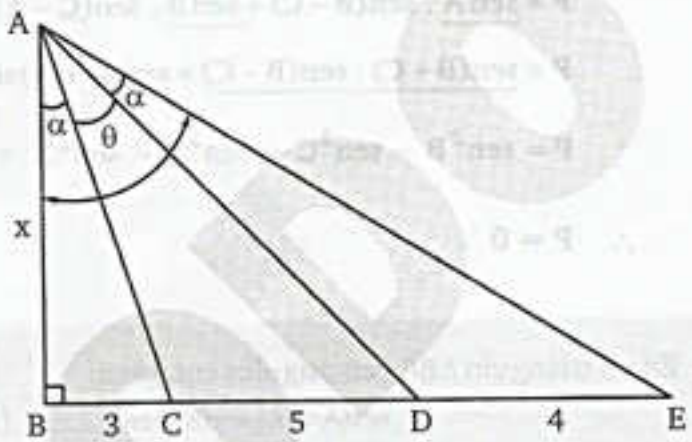
$$\therefore \quad \tan\phi = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 8** Calcule la longitud de "x"




**Resolución:**




Se observa:

- $\triangle_{ABC}$: $\tan\alpha = \frac{3}{x}$ .....(1)
- $\triangle_{ABD}$: $\tan(\alpha+\theta) = \frac{8}{x}$ .....(2)
- $\triangle_{ABE}$: $\tan(2\alpha+\theta) = \frac{12}{x}$ .....(3)

Pero de (3): $\tan(2\alpha+\theta) = \tan[\alpha+(\alpha+\theta)]$

$$\tan(2\alpha+\theta) = \frac{\tan\alpha + \tan(\alpha+\theta)}{1-\tan\alpha.\tan(\alpha+\theta)} \quad .....(*)$$

Reemplazando(1), (2) y (3) en (*) :

$$\frac{12}{x} = \frac{\frac{3}{x}+\frac{8}{x}}{1-\left(\frac{3}{x}\right)\left(\frac{8}{x}\right)} = \frac{11x}{x^2-24}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 12\sqrt{2}}$$

**PROBLEMA 9** De un triángulo ABC, reducir:

$$P = \text{sen}A \cdot \text{sen}(B-C) + \text{sen}B \cdot \text{sen}(C-A) + \text{sen}C \cdot \text{sen}(A-B)$$

**Resolución:**

**Sabemos:**

- $\text{sen}^2 x - \text{sen}^2 y = \text{sen}(x+y)\text{sen}(x-y)$
- Si : $\theta + \beta = 180° \Rightarrow \text{sen}\,\theta = \text{sen}\,\beta$

OBS : $A + B + C = 180°$

$$P = \underline{\text{sen}\,A} \cdot \text{sen}(B-C) + \underline{\text{sen}\,B} \cdot \text{sen}(C-A) + \underline{\text{sen}\,C} \cdot \text{sen}(A-B)$$

$$P = \underline{\text{sen}(B+C) \cdot \text{sen}(B-C)} + \text{sen}(C+A)\text{sen}(C-A) + \text{sen}(A+B)\text{sen}(A-B)$$

$$P = \text{sen}^2 B - \text{sen}^2 C + \text{sen}^2 C - \text{sen}^2 A + \text{sen}^2 A - \text{sen}^2 B$$

$\therefore$ **P = 0**

**PROBLEMA 10** En un triángulo ABC, sus ángulos cumplen:

$$\text{sen}A = m\,\text{sen}B\,\text{sen}C \quad \ldots\ldots\ldots(i)$$

$$\cos A = m\cos B\cos C \quad \ldots\ldots\ldots(ii)$$

Luego "tanA tanB tanC" equivale a:

**Resolución:**

$$A + B + C = 180° \quad \ldots\ldots\ldots(*)$$

(ii) − (i) : $\cos A - \text{sen}\,A = m(\cos B\cos C - \text{sen}\,B\,\text{sen}\,C)$

$\cos A - \text{sen}\,A = m\cos(B+C)$

$\cos A - \text{sen}\,A = m\cos(180° - A)$

$\cos A - \text{sen}\,A = -m\cos A$

$\cos A(m+1) = \text{sen}\,A$

Entonces : $\tan A = m + 1 \quad \ldots\ldots\ldots(iii)$

(i) + (ii) : $\tan A = \tan B \tan C$ (Multiplicando miembro a miembro por "tan A")

Entonces : $\tan A \tan B \tan C = \tan^2 A \quad \ldots\ldots\ldots(iv)$

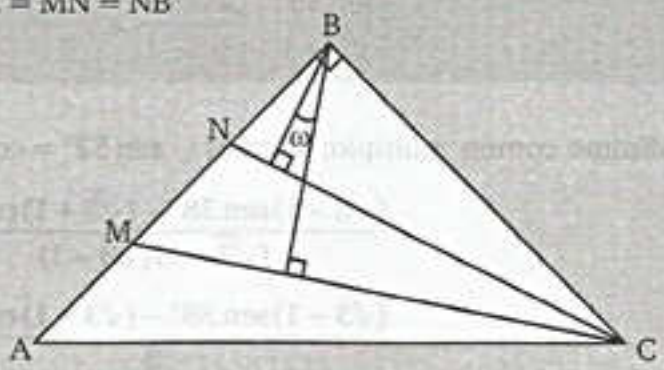
Reemplazando (iii) en (iv):

$\therefore$ $\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C = (m+1)^2$

team CALAPENSHKO

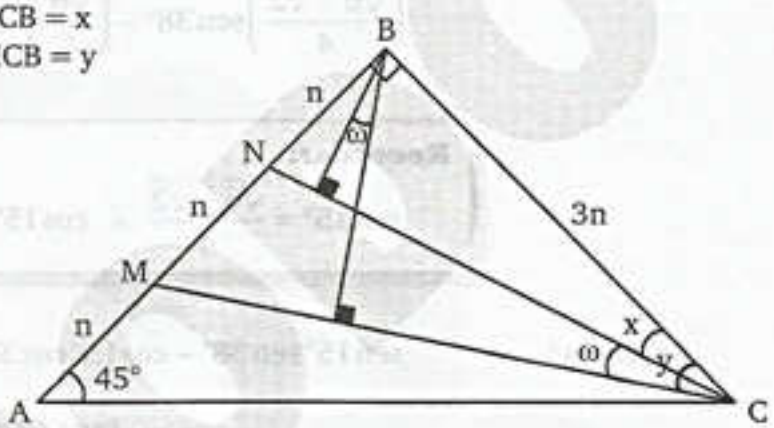


**PROBLEMA 11** Si el triángulo ABC es isósceles, calcule el valor de "tan ω"
Además: AM = MN = NB




**Resolución:** Trasladando el ángulo "ω" tenemos:

Sea: $m\angle NCB = x$
$m\angle MCB = y$




Sea el cateto del $\Delta ABC$ igual a 3n, entonces:

$$AM = MN = NB = n$$

$\triangle_{MBC}$: $\omega = y - x \Rightarrow \tan\omega = \tan(y - x)$

$$\tan\omega = \frac{\tan y - \tan x}{1 + \tan y \tan x} \quad .....(*)$$

Del $\triangle_{NBC}$: $\tan x = \frac{1}{3}$ .....(i)

Del $\triangle_{MBC}$: $\tan y = \frac{2}{3}$ .....(ii)

Reemplazando (i) y (ii) en (*)

$$\tan\omega = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}}{1 + \frac{2}{3}.\frac{1}{3}}$$

$$\therefore \tan\omega = \frac{3}{11}$$

**PROBLEMA 12** Determine el valor de "k" en:

$$\frac{\operatorname{sen}38^\circ}{\sqrt{3}+1}-\frac{\operatorname{sen}52^\circ}{\sqrt{3}-1}=\frac{3\sqrt{2}}{k}$$

**Resolución:** Mínimo común múltiplo; además : $\operatorname{sen}52^\circ=\cos38^\circ$

$$\frac{(\sqrt{3}-1)\operatorname{sen}38^\circ-(\sqrt{3}+1)\cos38^\circ}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{3\sqrt{2}}{k}$$

$$\frac{(\sqrt{3}-1)\operatorname{sen}38^\circ-(\sqrt{3}+1)\cos38^\circ}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{k}$$

Multiplicando $\times\ \frac{\sqrt{2}}{2}$, tenemos :

$$\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)\operatorname{sen}38^\circ-\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)\cos38^\circ=\frac{3\sqrt{2}}{k}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

**Recordar:**

$$\operatorname{sen}15^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\ \wedge\ \cos15^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Entonces :

$$\operatorname{sen}15^\circ\operatorname{sen}38^\circ-\cos15^\circ\cos38^\circ=\frac{3}{k}$$

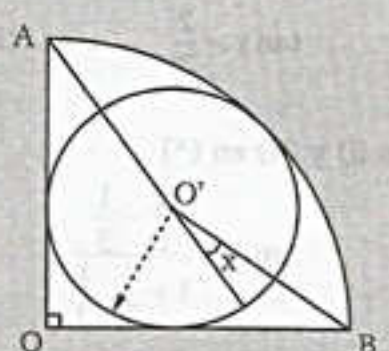
$$-\cos(38^\circ+15^\circ)=\frac{3}{k}$$

$$-\cos53^\circ=\frac{3}{k}$$

$$-\frac{3}{5}=\frac{3}{k}$$

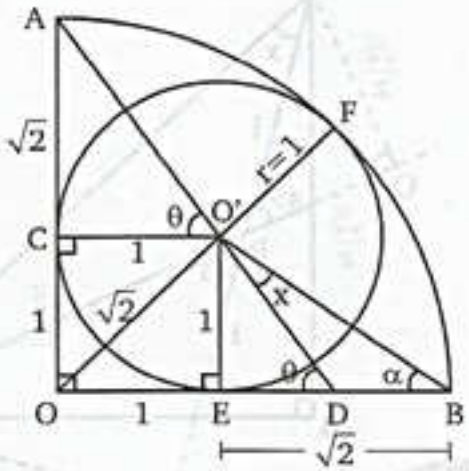
$$\therefore\ \mathbf{k=-5}$$

**PROBLEMA 13** De la figura, determine el valor de: "cotx"
AOB: Cuadrante



team CALAPENSHKO


**Resolución:**




Consideramos r = 1 (radio de la circunferencia de centro O') entonces el radio del cuadrante AOB:

$$OA = OB = OF = \sqrt{2}+1$$

- $\triangle_{BO'D}$: $\alpha + x = \theta$

$$\tan x = \tan(\theta - \alpha)$$

$$\tan x = \frac{\tan\theta - \tan\alpha}{1+\tan\theta\tan\alpha} \quad \text{.....(*)}$$

- $\triangle_{ACO'}$: $\tan\theta = \sqrt{2}$ .....(i)

- $\triangle_{BEO'}$: $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .....(ii)

Reemplazando (i) y (ii) en (*):

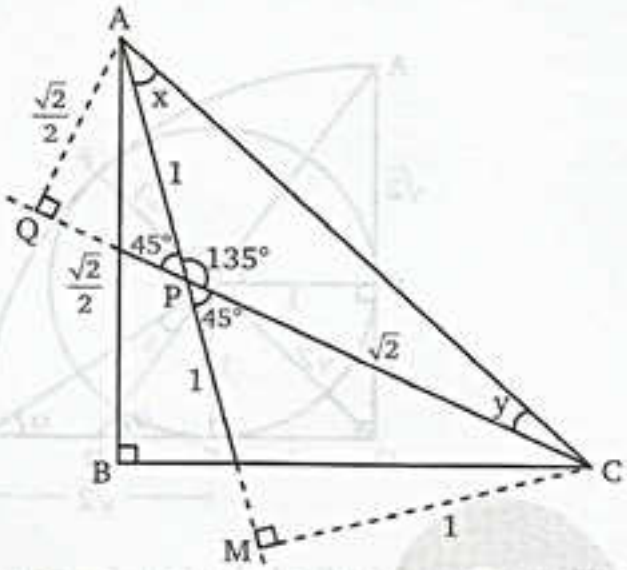
$$\tan x = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \ \cot x = 2\sqrt{2}$$

**PROBLEMA 14** En un triángulo ABC (B = 90°) se traza del vértice "A" una ceviana que forma con la hipotenusa un ángulo "x"; del vértice "C" se traza otra ceviana que corta a la anterior en el punto "P" y forma con la hipotenusa un ángulo que mide "y". El valor del ángulo formado por las cevianas es 135°, además $CP = \sqrt{2}$, $AP = 1$. Calcule: $\tan(x-y)$

team CALAPENSHKO


**Resolución:**




Prologamos AP ∧ CP y se trazan perpendiculares a las prolongaciones, formando dos triángulos rectángulos (AQP ∧ PMC)

Del gráfico : $\tan x = \frac{1}{2} \wedge \tan y = \frac{1}{3}$

Lo pedido : $\tan(x-y)$

Entonces : $\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \,.\, \tan y}$

Reemplazando : $\tan(x-y) = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{2} \,.\, \frac{1}{3}}$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\tan(x-y) = \frac{1}{7}}$$

**PROBLEMA 15** Si : $\operatorname{sen} x + \cos y = \cos(x+y)$

Calcule:

$$K = \frac{\operatorname{sen} x(1 - \operatorname{sen} y)}{\cos y(1 + \cos x)}$$

**Resolución:** Del dato : (ángulos compuestos)

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x + \cos y = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \\ \cos y - \cos x \cos y = -\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \\ \cos y(1 - \cos x) = -\operatorname{sen} x(1 + \operatorname{sen} y) \quad \ldots\ldots\ldots(1) \end{cases}$$

team CALAPENSHKO



De: $$K=\frac{\operatorname{sen}x(1-\operatorname{sen}y)}{\cos y(1+\cos x)}$$

Multiplicando por la conjugada al numerador y denominador convenientemente:

$$K=\frac{\operatorname{sen}x\overbrace{(1-\operatorname{sen}y)(1+\operatorname{sen}y)}^{\cos^2 y}(1-\cos x)}{\cos y\underbrace{(1+\cos x)(1-\cos x)}_{\operatorname{sen}^2 x}(1+\operatorname{sen}y)}$$

$$K=\frac{\operatorname{sen}x\,.\cos^2 y(1-\cos x)}{\cos y\,.\operatorname{sen}^2 x(1+\operatorname{sen}y)}$$

$$K=\frac{\cos y(1-\cos x)}{\operatorname{sen}x(1+\operatorname{sen}y)}$$

Reemplazando (1) en:

$$K=\frac{-\operatorname{sen}x(1+\operatorname{sen}y)}{\operatorname{sen}x(1+\operatorname{sen}y)}$$

$$\therefore\quad \mathbf{K=-1}$$

**PROBLEMA 16** Si: $$\frac{\operatorname{sen}^2x-\operatorname{sen}^2y+\operatorname{sen}^2(x+y)}{\operatorname{sen}^2x-\operatorname{sen}^2y+\operatorname{sen}^2(x-y)}=\frac{5}{3}$$

Calcule:

$$P=\frac{\tan x}{\tan y}$$

**Resolución:**

**Sabemos:**

$$\operatorname{sen}^2A-\operatorname{sen}^2B=\operatorname{sen}(A+B)\operatorname{sen}(A-B)$$

$$\frac{\operatorname{sen}(x+y)\operatorname{sen}(x-y)+\operatorname{sen}^2(x+y)}{\operatorname{sen}(x+y)\operatorname{sen}(x-y)+\operatorname{sen}^2(x-y)}=\frac{5}{3}$$

Simplificando: $$\frac{\operatorname{sen}(x+y)[\operatorname{sen}(x-y)+\operatorname{sen}(x+y)]}{\operatorname{sen}(x-y)[\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(x-y)]}=\frac{5}{3}$$

Se obtiene: $$3\operatorname{sen}(x+y)=5\operatorname{sen}(x-y)$$

team CALAPENSHKO



$$3[\operatorname{sen}x\cos y+\cos x\operatorname{sen}y]=5[\operatorname{sen}x\cos y-\cos x\operatorname{sen}y]$$

$$3\operatorname{sen}x\cos y+3\cos x\operatorname{sen}y=5\operatorname{sen}x\cos y-5\cos x\operatorname{sen}y$$

$$8\cos x\operatorname{sen}y=2\operatorname{sen}x\cos y$$

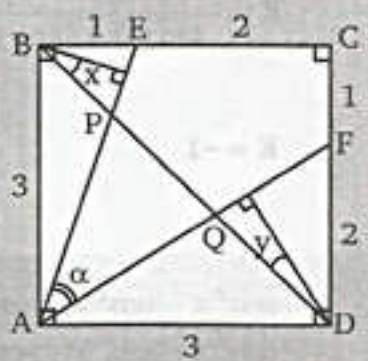
$$4\frac{\operatorname{sen}y}{\cos y}=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}$$

$$\tan x=4\tan y$$

Piden : $P=\dfrac{\tan x}{\tan y}=\dfrac{4\tan y}{\tan y}$

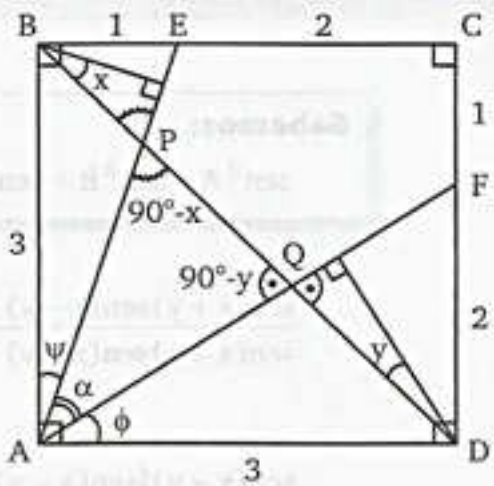
$\therefore$ **P = 4**

**PROBLEMA 17** Del gráfico mostrado, ABCD es un cuadrado.




Calcule: $G=\tan x+\tan y+\tan x\ \tan y\ \tan\alpha$

**Resolución:** Del gráfico:




Se observa del $\Delta APQ$:

$$\alpha+90°-x+90°-y=180°$$

$$\alpha=x+y$$

team CALAPENSHKO


**Sabemos:**
$$\tan(A+B) = \tan A + \tan B + \tan A \cdot \tan B \cdot \tan(A+B)$$

Nos piden : $G = \tan x + \tan y + \tan x \cdot \tan y \cdot \tan\alpha$
$\downarrow$
$(x+y)$

Luego : $G = \tan\alpha$ .....(1)

Hallando el valor de "$\tan\alpha$"

Asumiendo ángulos al gráfico : "$\psi$" y "$\phi$"

Como : $\psi + \alpha + \phi = 90°$

Por propiedad : $\tan\alpha\tan\psi + \tan\alpha\tan\phi + \tan\psi\tan\phi = 1$ .....(2)

Luego del : $\triangle_{ABE}$ ; $\tan\psi = \frac{1}{3}$

$\triangle_{ADF}$ ; $\tan\phi = \frac{2}{3}$

Reemplazando en (2) : $\tan\alpha\left(\frac{1}{3}\right) + \tan\alpha\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = 1$

$$\tan\alpha\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right) = 1 - \frac{2}{9}$$

$$\tan\alpha = \frac{7}{9}$$

$$\therefore \quad G = \frac{7}{9}$$

**PROBLEMA 18** Si se cumple : $\operatorname{sen}^2 y - \operatorname{sen}^2 z = \tan^2 x \cdot [\cos(y-z) \cdot \cos(y+z)]$

Calcule:

$$M = \tan(y-x) \cdot \tan(x+y) - \tan^2 z$$

**Resolución:** De la condición : $\operatorname{sen}^2 y - \operatorname{sen}^2 z = \tan^2 x \cdot [\cos(y-z) \cdot \cos(y+z)]$

Identidad auxiliar : $\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta = \operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$

$$\operatorname{sen}(y+z) \cdot \operatorname{sen}(y-z) = \tan^2 x \cdot \cos(y-z) \cdot \cos(y+z)$$

$$\frac{\operatorname{sen}(y+z)}{\cos(y+z)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(y-z)}{\cos(y-z)} = \tan^2 x$$

$$\tan(y+z) \cdot \tan(y-z) = \tan^2 x$$

team CALAPENSHKO


$$\left(\frac{\tan y+\tan z}{1-\tan y\tan z}\right)\left(\frac{\tan y-\tan z}{1+\tan y\tan z}\right)=\tan^2 x$$

Aplicando diferencia de cuadrados:

$$\frac{\tan^2 y-\tan^2 z}{1-\tan^2 y\tan^2 z}=\tan^2 x$$

Efectuando : $\tan^2 y-\tan^2 z=\tan^2 x-\tan^2 y\tan^2 x\tan^2 z$

Luego : $\tan^2 y-\tan^2 x=\tan^2 z-\tan^2 y\tan^2 x\tan^2 z$

Factorizando en el segundo miembro "$\tan^2 z$"

$$\tan^2 y-\tan^2 x=\tan^2 z(1-\tan^2 y\tan^2 x)$$

Diferencia de cuadrados:

$$(\tan y-\tan x)(\tan y+\tan x)=\tan^2 z\,.\,(1-\tan y\tan x)(1+\tan y\tan x)$$

$$\underbrace{\frac{(\tan y-\tan x)}{(1+\tan y\tan x)}}_{\tan(y-x)}\cdot\underbrace{\frac{(\tan y+\tan x)}{(1-\tan y\tan x)}}_{\tan(y+x)}=\tan^2 z$$

$$\therefore\ \tan(y-x)\,.\,\tan(x+y)-\tan^2 z=0$$

**PROBLEMA 19** Determine los valores de: $K=\operatorname{sen}\pi\theta+\cos\pi\theta$

Si : $\theta=\tan x+2\tan 2x+\tan 3x\tan 2x(\tan 5x+\tan x)$

Tal que : $x\in\left\langle\frac{\pi}{20};\frac{\pi}{15}\right\rangle$

**Resolución:**

**Sabemos:**

$\tan(A+B)=\tan A+\tan B+\tan A\,.\,\tan B\,.\,\tan(A+B)$

Del dato : $\theta=\underbrace{\tan x+\tan 2x+\tan x\tan 2x\tan 3x}+\tan 2x+\tan 2x\tan 3x\tan 5x$

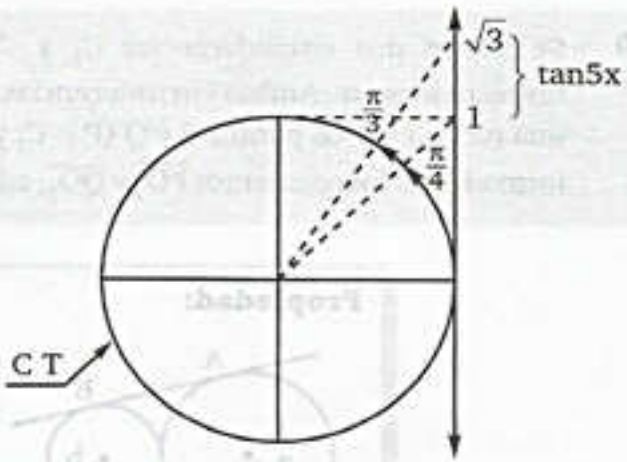
$$\theta=\underbrace{\tan 3x+\tan 2x+\tan 2x\tan 3x\tan 5x}$$

$$\theta=\tan 5x$$

También : $\frac{\pi}{20}<x<\frac{\pi}{15}$

Multiplicando $\times 5$ : $\frac{\pi}{4}<5x<\frac{\pi}{3}$

team CALAPENSHKO


Luego : $1 < \tan 5x < \sqrt{3}$

$1 < \quad \theta \quad < \sqrt{3}$ .....(1)

**Sabemos:**

$$\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$$

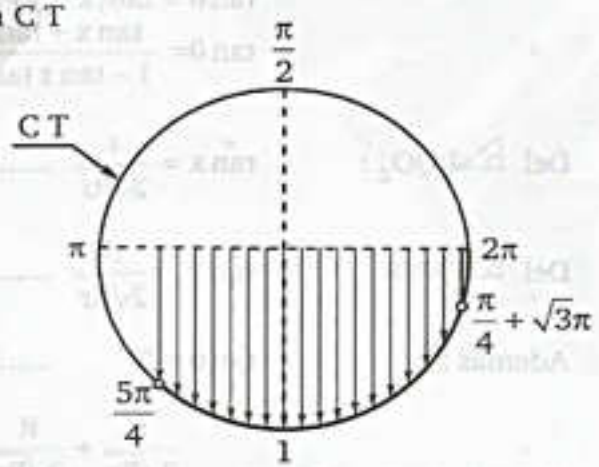
$$K = \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \pi\theta\right)$$

De (1) : $1 < \quad \theta \quad < \sqrt{3}$

Multiplicando $\times \pi$ : $\pi < \quad \pi\theta \quad < \sqrt{3}\pi$

Sumando $\frac{\pi}{4}$ : $\frac{5\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + \pi\theta < \frac{\pi}{4} + \sqrt{3}\pi$

Graficando la C T




Se observa que : $-1 \leq \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \pi\theta\right) \quad < \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \sqrt{3}\pi\right)$

Multiplicando por $\sqrt{2}$ : $-\sqrt{2} \leq \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \pi\theta\right) < \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \sqrt{3}\pi\right)$

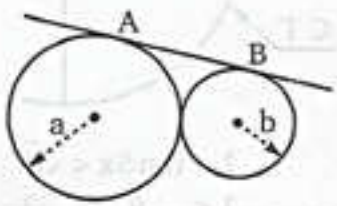
$$-\sqrt{2} \leq K < \operatorname{sen}\sqrt{3}\pi + \cos\sqrt{3}\pi$$

$$\therefore \quad K \in \left[-\sqrt{2}\,;\ \operatorname{sen}\pi\sqrt{3} + \cos\pi\sqrt{3}\right\rangle$$

**PROBLEMA 20** Se tienen dos circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ de centros $O_1$, $O_2$ y radios R y r respectivamente. Ambas circunferencias son tangentes exteriormente entre sí y a una recta $\mathfrak{L}$ en los puntos P y Q ($P \in \mathcal{C}_1$ y $Q \in \mathcal{C}_2$). Siendo "θ" el valor del ángulo formado por los segmentos $\overline{PO_2}$ y $\overline{QO_1}$, además $\tan\theta = 2$. Calcule "R/r".

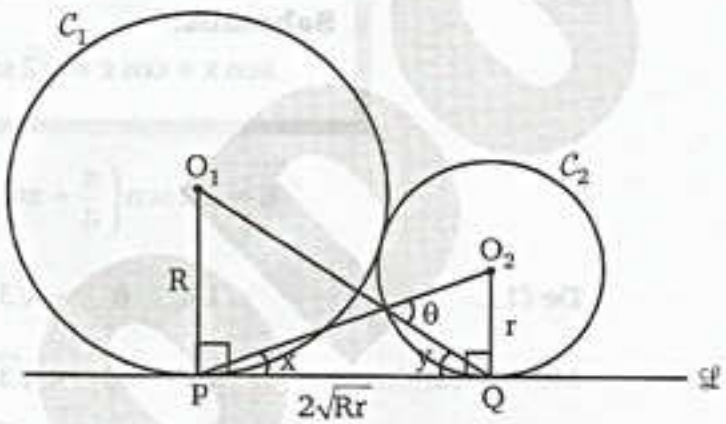
**Resolución:**

**Propiedad:**




$$AB = 2\sqrt{ab}$$

Graficando:




En el problema, del gráfico:

$$\theta = x + y$$

$$\tan\theta = \tan(x+y)$$

$$\tan\theta = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \quad \text{.....(*)}$$

Del $\triangle PQO_2$: $\tan x = \dfrac{r}{2\sqrt{Rr}}$ .....(i)

Del $\triangle QPO_1$: $\tan y = \dfrac{R}{2\sqrt{Rr}}$ .....(ii)

Además: $\tan\theta = 2$ .....(iii)

(i), (ii) y (iii) en (*): $2 = \dfrac{\frac{r}{2\sqrt{Rr}} + \frac{R}{2\sqrt{Rr}}}{1 - \frac{r}{2\sqrt{Rr}} \cdot \frac{R}{2\sqrt{Rr}}}$

Operando y reduciendo:

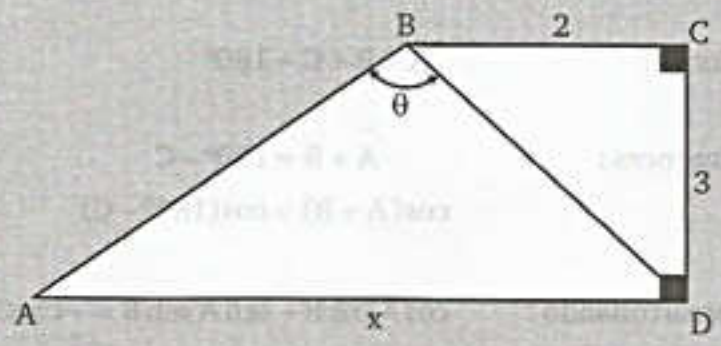
$$\sqrt{\frac{R}{r}} + \sqrt{\frac{r}{R}} = 3$$

$$\therefore \quad \frac{R}{r} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$$

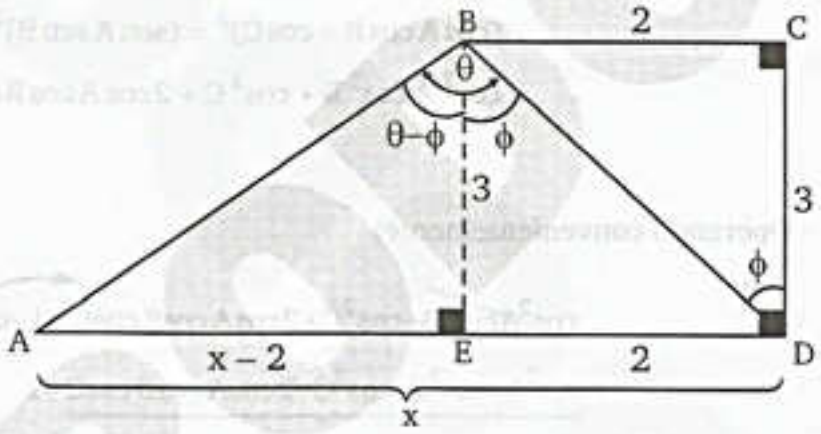
team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 21** Del gráfico siguiente hallar la longitud de $\overline{AD}$ si: $\tan\theta = \frac{12}{5}$




**Resolución:**




Trazamos la altura BE, formándose el rectángulo BCDE, luego:

$$DE = 2 \;;\; BE = 3$$

En $\triangle BEA$: $\tan(\theta - \phi) = \frac{x-2}{3}$

Como : $\tan\theta = \frac{12}{5}$ y $\tan\phi = \frac{2}{3}$

Luego : $\tan(\theta - \phi) = \frac{\tan\theta - \tan\phi}{1 + \tan\theta\,\tan\phi}$

$$\frac{x-2}{3} = \frac{\frac{12}{5} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{12}{5}\cdot\frac{2}{3}}$$

$$\therefore \; \mathbf{x = 4}$$

**PROBLEMA 22** En un triángulo ABC; calcule:

$$L = \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C$$

**Resolución:** Como : $A + B + C = 180^\circ$

Entonces : $A + B = 180^\circ - C$

$$\cos(A + B) = \cos(180^\circ - C)$$

Desarrollando : $\cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = -\cos C$

$$\cos A \cos B + \cos C = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

Elevando al cuadrado:

$$(\cos A \cos B + \cos C)^2 = (\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B)^2$$

$$\cos^2 A \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = \underbrace{\operatorname{sen}^2 A}_{(1-\cos^2 A)} \cdot \underbrace{\operatorname{sen}^2 B}_{(1-\cos^2 B)}$$

Operando convenientemente:

$$\cancel{\cos^2 A \cos^2 B} + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B + \cancel{\cos^2 A \cos^2 B}$$

$$\underbrace{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C}_{} = 1$$

$$\therefore \quad L = 1$$

**PROBLEMA 23** Sabiendo que:

$$\sum_{i=1}^{5} \{\operatorname{sen} \alpha_i\} = 0 \; ; \quad \sum_{i=1}^{5} \{\cos \alpha_i\} = 0$$

Calcule:

$$C = \sum_{i=1}^{5} \{\operatorname{sen}(\alpha_i + \theta)\} + \sum_{i=1}^{5} \{\cos(\alpha_i + \theta)\}$$

**Resolución:** Efectuando cada una de las sumatorias dadas:

$$\operatorname{sen} \alpha_1 + \operatorname{sen} \alpha_2 + \operatorname{sen} \alpha_3 + \operatorname{sen} \alpha_4 + \operatorname{sen} \alpha_5 = 0 \quad \ldots\ldots(1)$$

$$\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \cos \alpha_3 + \cos \alpha_4 + \cos \alpha_5 = 0 \quad \ldots\ldots(2)$$

De C : $C = \operatorname{sen}(\alpha_1 + \theta) + \operatorname{sen}(\alpha_2 + \theta) + \operatorname{sen}(\alpha_3 + \theta) + \operatorname{sen}(\alpha_4 + \theta) + \operatorname{sen}(\alpha_5 + \theta) +$

$$\cos(\alpha_1 + \theta) + \cos(\alpha_2 + \theta) + \cos(\alpha_3 + \theta) + \cos(\alpha_4 + \theta) + \cos(\alpha_5 + \theta)$$

team CALAPENSHKO


Desarrollando:

$$C = (\overbrace{\operatorname{sen}\alpha_1+\operatorname{sen}\alpha_2+\ldots+\operatorname{sen}\alpha_5}^{0})\cos\theta+(\overbrace{\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\ldots+\cos\alpha_5}^{0})\operatorname{sen}\theta$$

$$(\overbrace{\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\ldots+\cos\alpha_5}^{0})\cos\theta-(\overbrace{\operatorname{sen}\alpha_1+\operatorname{sen}\alpha_2+\ldots+\operatorname{sen}\alpha_5}^{0})\operatorname{sen}\theta$$

$\therefore \quad \mathbf{C = 0}$

**PROBLEMA 24** Sabiendo que:

$$\tan A\left(1-\tan^2 B\,.\,\tan^2 x\right)=\sec^2 x\,.\,\tan B$$

Determine un equivalente de:

$$E=\sec^2 x\,.\,\tan B-\tan(A-B)$$

**Resolución:** Expresando en términos de tangentes para hallar "tan (A – B)"

$$\tan A\left(1-\tan^2 B\,.\,\tan^2 x\right)=\left(1+\tan^2 x\right)\tan B$$

$$\tan A-\tan A\,.\,\tan^2 B\,.\,\tan^2 x=\tan B+\tan B\,.\,\tan^2 x$$

$$\tan A-\tan B=\tan B\,.\,\tan^2 x(1+\tan A\,.\,\tan B)$$

$$\underbrace{\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\,.\,\tan B}}=\tan B\,.\,\tan^2 x$$

$$\tan(A-B)=\tan B\,.\,\tan^2 x$$

Finalmente reemplazamos el valor de tan(A – B) en la expresión E:

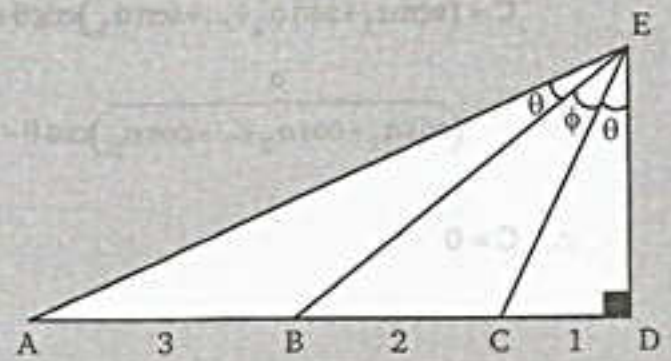
$$E=\sec^2 x\,.\,\tan B-\tan(A-B)$$

$$E=\sec^2 x\,.\,\tan B-\tan B\,.\,\tan^2 x$$

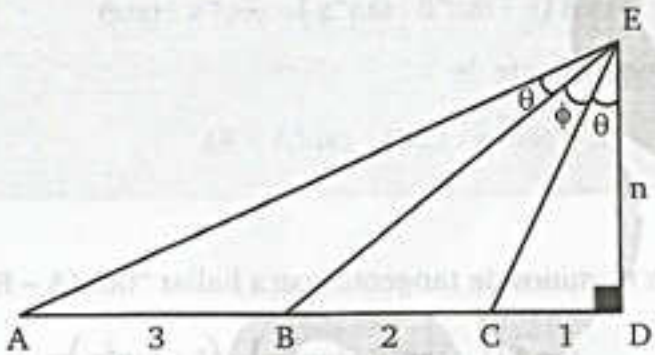
$$E=\tan B\underbrace{\left(\sec^2 x-\tan^2 x\right)}_{1}$$

$\therefore \quad \mathbf{E = \tan B}$

**PROBLEMA 25** Del gráfico adjunto, determine los valores de "tanθ" y "tanϕ"




**Resolución:**




* En $\triangle_{CDE}$: $\tan\theta = \frac{1}{n}$

* En $\triangle_{BDE}$: $\tan(\theta+\phi) = \frac{3}{n}$

* En $\triangle_{ADE}$: $\tan(2\theta+\phi) = \frac{6}{n}$

Notamos en el gráfico:

$$\tan(2\theta+\phi) = \tan[(\theta+\phi)+\theta]$$

$$\downarrow$$

$$\frac{6}{n} = \frac{\tan(\theta+\phi)+\tan\theta}{1-\tan(\theta+\phi)\tan\theta} = \frac{\frac{3}{n}+\frac{1}{n}}{1-\frac{3}{n}\cdot\frac{1}{n}}$$

Resolviendo: $2n^2 = 18 \rightarrow n = 3$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad \tan(\theta+\phi) = 1$$

Luego: $$\frac{\tan\theta+\tan\phi}{1-\tan\theta\,\tan\phi} = 1$$

Reemplazando: $\tan\theta = \frac{1}{3}$

Se tendrá: $\tan\phi = \frac{1}{2}$

**A todo el público en general:**

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

**Este libro no debe ser prostituito monetariamente**, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

**28 de agosto del 2020**

team CALAPENSHKO


## PROBLEMAS PROPUESTOS

**1.** Cuál o cuales de las siguientes igualdades son identidades:

I. $2\text{sen}(x + 30°) = \sqrt{3}\ \text{sen}x + \cos x$

II. $\text{sen}(x + y)\,\text{sen}(x - y) = \text{sen}^2x - \text{sen}^2y$

III. $\cot x - \cot y = \dfrac{\text{sen}(x-y)}{\text{sen}x\,\text{sen}y}$

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y II E) Todas

**2.** Siendo "$\alpha$ y $\beta$" las medidas de los ángulos que cumplen:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\beta\cos\alpha + \frac{1}{3}\cos\beta$$

Halle: "$\cos\alpha$"

A) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ B) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ C) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
D) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\dfrac{2}{3}$

**3.** Calcule el valor de:

$$M = \left(\cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{\pi}{9}\right)^2 + \left(\text{sen}\frac{4\pi}{9} + \text{sen}\frac{\pi}{9}\right)^2$$

A) 2 B) 3 C) $\dfrac{5}{2}$
D) $\dfrac{7}{2}$ E) 4

**3.** En un triángulo ABC se cumple:

$$\tan A + \tan B = 5\tan C$$

Hallar:

$$\frac{\cos(A+B)}{\cos A\cos B}$$

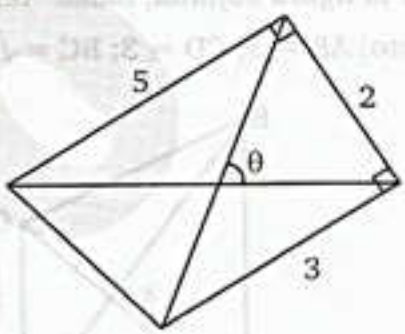
A) 4 B) –6 C) 6
D) –5 E) 5

**5.** Hallar:

$$M = \text{sen}40° - 2\text{sen}5°\cos35°$$

A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\dfrac{1}{2}$ C) 1
D) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ E) $\dfrac{3}{5}$

**6.** De la figura hallar: "tan θ"




A) $\dfrac{8}{11}$ B) $\dfrac{16}{13}$ C) $\dfrac{16}{11}$
D) $\dfrac{7}{13}$ E) $\dfrac{11}{8}$

**7.** Calcule aproximadamente el valor de:

$$F = \frac{\text{sen}22°}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} + \frac{\cos22°}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

A) 0, 2 B) 0, 4 C) 0, 6
D) 0, 8 E) 1

**8.** Calcule el valor de:

$$E = \frac{\tan70° - \tan20°}{\tan50°}$$

A) 0, 5 B) 1 C) 2
D) 2, 5 E) 3

**9.** Reducir la siguiente expresión:

$$P = (\text{sen}3x + \cos3x)(\text{sen}2x - \cos2x) + \text{sen}x$$

A) sen 5x B) cos 5x C) cos x
D) –cos 5x E) –sen 5x

**10.** Eliminar la variable angular "x" de:

$\operatorname{sen}(x-45°).\operatorname{sen}(x+45°) = m$ .....(1)

$\cos(x-60°).\cos(x+60°) = n$ .....(2)

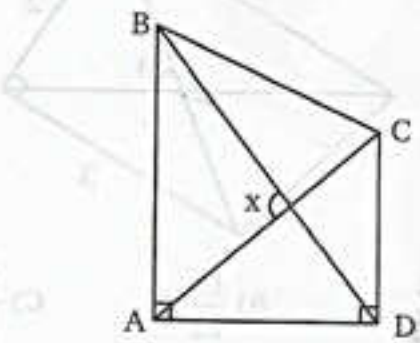
A) $m+n=0$ B) $m+n=\frac{1}{4}$

C) $m+n=-\frac{1}{4}$

D) $m\,.\,n=-\frac{1}{2}$ E) $m\,.\,n=\frac{1}{2}$

**11.** De la figura adjunta, hallar "tan x".

Dato: $AB = 5$; $CD = 3$; $BC = \sqrt{13}$




A) –1 B) –2 C) –3

D) –4 E) –5

**12.** Hallar:

$$M=\frac{\cos 10°+\operatorname{sen}10°}{\sqrt{3}\cos 5°-\operatorname{sen}5°}$$

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

**13.** Con los datos:

$$\tan\left(x+\frac{\pi}{5}\right)=1{,}5 \text{ ..... (i)}$$

$$\tan\left(x-\frac{\pi}{5}\right)=0{,}5 \text{ ..... (ii)}$$

Hallar: $\sec^2 2x$

A) 52 B) 65 C) 72

D) 81 E) 94

**14.** Si los catetos de un triángulo rectángulo son: "senx + cosy" ∧ "seny + cosx". Hallar la longitud de la hipotenusa del triángulo si:

$$x + y = 30°$$

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$

D) 2 E) $\sqrt{5}$

**15.** Si: $\tan(x+y)=\pi$

Además:

$$\tan^2 x+\tan^2 x\tan^2 y=1+\tan^2 y$$

Hallar: "tan(x − y)"

A) $\pi^{-1}$ B) $-\pi^{-1}$ C) $\pi$

D) $-\pi$ E) 1

**16.** Si:

$$\tan 3x+\tan x+\tan 4x\,.\,\tan 3x\,.\,\tan x=\sqrt{3}$$

Siendo "x" el valor de un ángulo agudo.

Hallar:

$$M=\frac{\tan 3x+\tan 2x+\tan 5x\,.\,\tan 3x\,.\,\tan 2x}{\tan 2x+\tan x+\tan 3x\,.\,\tan 2x\,.\,\tan x}$$

A) $\sqrt{3}-1$ B) $2+\sqrt{3}$ C) $2-\sqrt{3}$

D) $\sqrt{3}+1$ E) 1

**17.** Si se cumple:

$$\cos 69° + \cos 21°\tan 12° = m\cos 57°$$

Indique el equivalente de "sec78°"

A) m B) $\frac{1}{m}$ C) $\sqrt{\frac{1}{m}-1}$

D) $\sqrt{\frac{m^2}{m^2-1}}$ E) 2m

**18.** Hallar:

$$K=\frac{3\operatorname{sen}53°}{\cos 33°\,.\,\cos 22°}+4\tan 33°\,.\,\tan 20°$$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

**19.** El mínimo valor de:

$$R = \sqrt{2}\left(\frac{1-\cot x}{1+\cot x}\right)(\operatorname{sen}x+\cos x)$$

es:

A) $-\frac{1}{2}$ B) $-1$ C) $-2$

D) $-\sqrt{2}$ E) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

**20** Si: $a + b = \frac{\pi}{3}$

Hallar:

$R = (1+\tan(a+b)\,.\,\tan a)(\cot(a+b)+\tan b)$

A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C) $\sqrt{3}$

D) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ E) 1

**21.** Simplificar:

$$J=\frac{\operatorname{sen}(x-y)\operatorname{sen}z+\operatorname{sen}(y-z)\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}(z-x)\operatorname{sen}y}{\operatorname{sen}x\,.\,\operatorname{sen}y\,.\,\operatorname{sen}z}$$

A) $-1$ B) 1

C) 0

D) $\operatorname{sen}(x+y+z)$ E) $\cos(x+y+z)$

**22.** Si en un triángulo ABC se cumple:

$(1-\tan A)(1-\tan B) = 1+\tan C$

¿Luego C mide?

A) 30° B) 37° C) 45°

D) 53° E) 60°

**23.** En un triángulo rectángulo ABC (recto en C), calcular el valor de:

$$E=\frac{\left[1+\tan\left(\frac{A}{2}\right)\right]\left[1+\tan\left(\frac{B}{2}\right)\right]}{\left[1+\tan\left(\frac{C}{2}\right)\right]}$$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 0, 5

**24.** Si: $\tan 2\theta + \cot 5\theta = \sec^2 2\theta$

Hallar:

$K = \tan 3\theta + \tan 2\theta$

A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) 1

D) $\frac{3}{2}$ E) 3

**25.** Simplificar:

$$M=\frac{\operatorname{sen}^2(A+B)-\operatorname{sen}^2A-\operatorname{sen}^2B}{\operatorname{sen}A\,.\,\operatorname{sen}B\,.\,\cos(A+B)}$$

A) 1 B) 2

C) sen A . sen B

D) 2sen A sen B E) sen B cos A

**26.** Hallar el máximo valor de:

$$F=2\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

D) $\sqrt{3}+1$ E) $\sqrt{2}+1$

**27.** De la siguiente condición:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}x}=\frac{b}{\operatorname{sen}y}=\frac{c}{\sqrt{\operatorname{sen}(x+y)}}$$

Expresar "sen (x – y)" en términos de a, b y c.

A) $\frac{a^2+b^2}{c^2}$ B) $\frac{a^2+c^2}{b^2}$ C) $\frac{a^2-b^2}{c^2}$

D) $\frac{a+b}{c}$ E) $\frac{a-b}{c}$

**28.** Luego de reducir la expresión:

$E(x)=\tan x+2\tan 2x+\tan 2x.\tan 3x(\tan 5x+\tan x)$

Hallar: $E\left(\frac{\pi}{20}\right)$

A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{4}{3}$

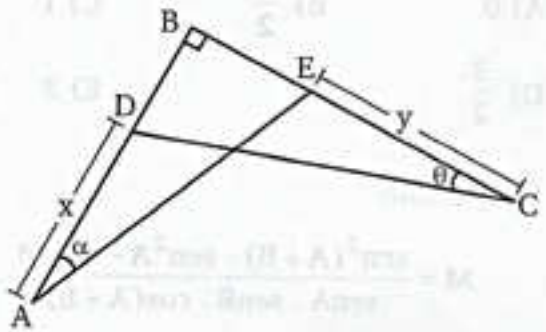
D) 1 E) $\sqrt{3}$

**29.** En la figura mostrada:

$AD = x$ ; $EC = y$ ; $AB = BC$

Entonces:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\theta)}{2\cos\alpha\cos\theta-\operatorname{sen}(\alpha+\theta)}$$

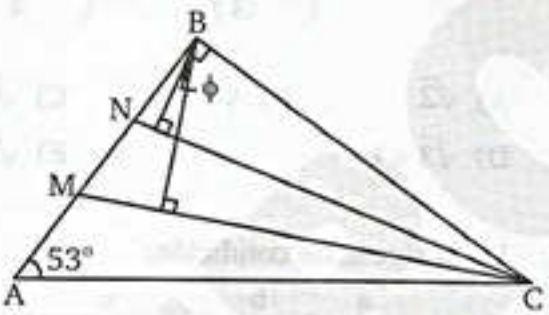



A) $\frac{x}{x+y}$ B) $\frac{y}{x+y}$ C) $\frac{x-y}{x+y}$

D) $\frac{y-x}{x+y}$ E) $\frac{2x}{x-y}$

**30.** Del gráfico mostrado, si: $AM = MN = NB$

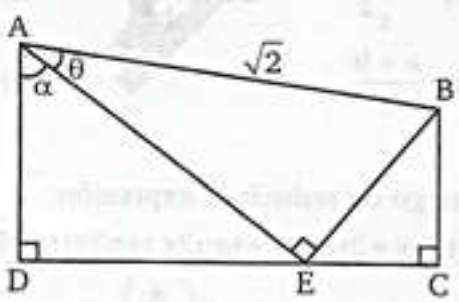
Hallar: "tan $\phi$"




A) 0, 111 B) 0, 222 C) 0, 333

D) 0, 444 E) 0, 555

**31.** Del gráfico hallar el área de la región del trapecio ABCD, en términos de "$\alpha$" y "$\theta$".




A) $\operatorname{sen}(\theta-\alpha)\cos(\theta-\alpha)$

B) $\operatorname{sen}(\theta-\alpha)\cos(\theta+\alpha)$

C) $\operatorname{sen}(\theta+\alpha)\cos(\theta-\alpha)$

D) $\operatorname{sen}(\theta+\alpha)\cos(\theta+\alpha)$

E) $1/2(\operatorname{sen}(\theta-\alpha)\cos(\theta-\alpha))$

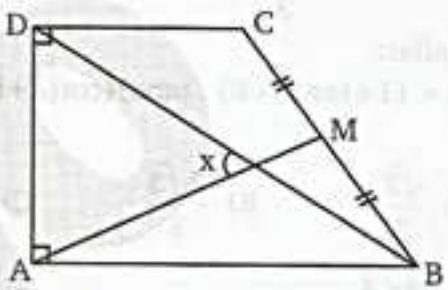
**32.** Indicar la diferencia entre el mayor valor de A y el menor valor de B, tal que:

$$A \le 1+\cos x+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos(x+\pi) \le B$$

A) $-\sqrt{5}$ B) $\sqrt{5}$ C) $2\sqrt{5}$

D) $-2\sqrt{5}$ E) 2

**33.** Del gráfico, calcular: "cotx" si: $AB = 12$, $AD = 10$, $DC = 6$




A) $\frac{33}{56}$ B) $\frac{23}{64}$ C) $\frac{19}{48}$

D) $\frac{29}{75}$ E) $\frac{17}{43}$

**34.** Si en un triángulo ABC se cumple:

$\tan A \cdot \tan B = m$ ..... (i)

$\tan A + \tan B = n \cdot \tan C$ ..... (ii)

Indicar una relación entre "m" y "n"

A) $m - n = 0$

B) $m + n = 1$

C) $m - n = 1$

D) $2m - n = 1$

E) $m - n = -1$

**35.** Hallar "tg C" en un triángulo ABC cuyos ángulos cumplen:

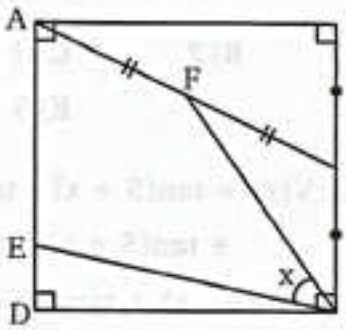
$\operatorname{sen} C = p \cdot \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$ ..... (i)

$\cos C = p \cdot \cos A \cos B$ ..... (ii)

A) p B) p + 1 C) p – 1

D) $p^2$ E) $p^2 - 1$

**36.** Hallar "cot x" siendo A B C D un cuadrado, además AE = 3ED ; BG = GC ; AF = FG

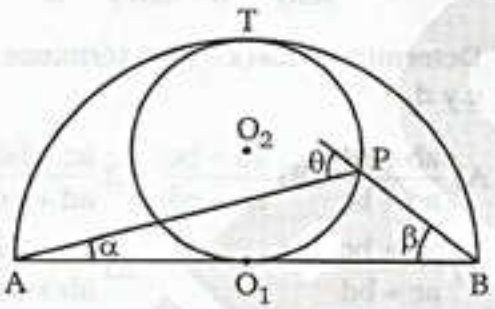



A) $\frac{18}{11}$ B) $\frac{11}{10}$ C) $\frac{17}{10}$

D) $\frac{12}{5}$ E) $\frac{13}{10}$

**37.** Del gráfico mostrado, hallar:

$$\frac{\cot\alpha + \cot\beta}{1 + 2\cot\theta}$$

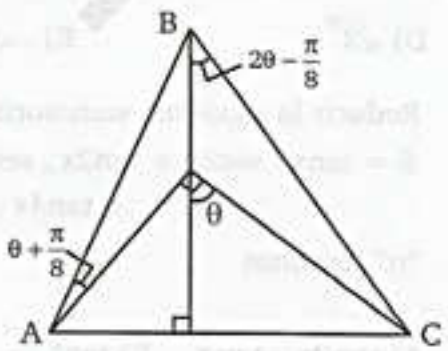



($O_1$; $O_2$ son centros y "T" punto de tangencia)

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 6

**38.** Del gráfico mostrado halle: tan3θ . tanθ

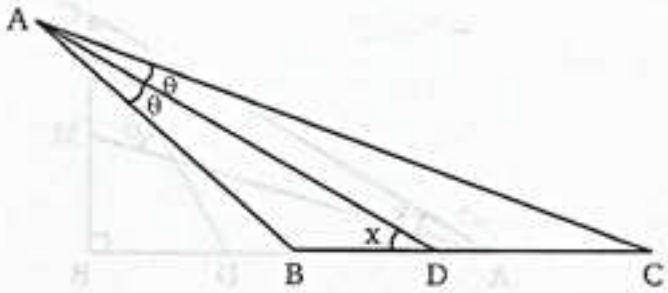



A) 1 B) 4 C) $2+\sqrt{3}$

D) $2-\sqrt{3}$ E) $3-2\sqrt{2}$

**39.** Del gráfico CD = 2 . BD

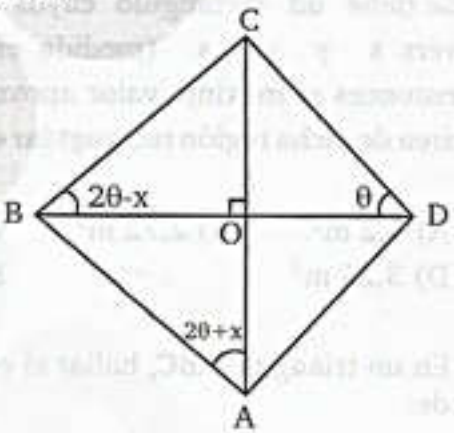
Hallar "tanx" en términos de "θ"




A) 3tanθ B) cotθ C) 2 + tanθ

D) 2cotθ E) 3 + tanθ

**40.** Hallar $\tan^2 x$, expresado como producto de tangentes.




A) tanθ . tan3θ B) tan2θ . tan4θ

C) tanθ . tan4θ

D) tan2θ . tan3θ E) tan4θ . tan6θ

**41.** Si A, B y C son los valores de los ángulos de un triángulo y:

$\tan^2\phi \,.\, \tan A = \tan B + \tan C$ .....(1)

$\cot^2\theta \,.\, \tan B = \tan A + \tan C$ .....(2)

$\tan^2\alpha \,.\, \tan C = \tan A + \tan B$ .....(3)

Cuál de las siguientes relaciones es correcta:

A) $\cos^2\alpha + \cos^2\phi = \cos^2\theta$

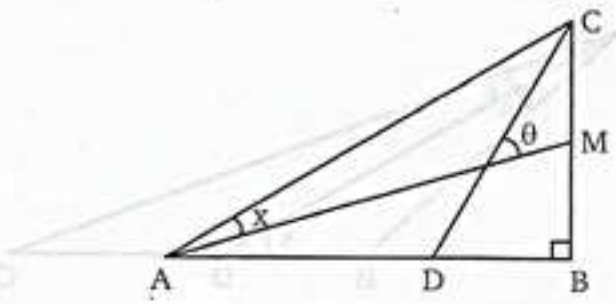
B) $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\phi = \operatorname{sen}^2\theta$

C) $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\alpha = \cos^2\phi$

D) $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\alpha = \cos^2\phi$

E) $\operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\phi = \operatorname{sen}^2\theta$

**42.** Del gráfico, calcular "tan x", si "θ" es máximo y AD = 3DB ∧ CM = MB.




A) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{5}$
D) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

**43.** Se tiene un rectángulo cuyos lados son vers x y cov x (medida en metros), entonces el máximo valor aproximado del área de dicha región rectangular es?

A) 4,2 $m^2$ B) 2,72 $m^2$ C) 5,43 $m^2$
D) 3,25 $m^2$ E) 2,91 m

**44.** En un triángulo ABC, hallar el equivalente de:

$M = (\cot A + \cot B)(\cot B + \cot C) \cdot (\cot C + \cot A)$

A) senA . senB . senC
B) cosA . cosB . cosC
C) tanA . tanB . tanC
D) secA . secB . secC
E) cscA . cscB . cscC

**45.** Si en un triángulo ABC se cumple:

$\tan A + \tan B = \cot^2 x \cdot \tan C$ ..... (i)
$\tan B + \tan C = \cot^2 y \cdot \tan A$ ..... (ii)
$\tan C + \tan A = \cot^2 z \cdot \tan B$ ..... (iii)

Hallar:

$E = \sen^2 x + \sen^2 y + \sen^2 z$

A) 0,5 B) 0,75 C) 1
D) 1,5 E) 2

**46.** Si: $\cot 6x = \frac{1+\tan^3 x}{1+\tan x}$

Hallar: $K = \tan 5x + \tan x$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

**47** Dadas: $V(x) = \tan(5+x) - \tan(10+x) + \tan(5+x)\tan(5-x)\tan 10$

$Q(x) = \tan(5-x) + \tan x + \sqrt{2}\tan x \tan 10$

Halle "$\sec^2(x+10) + \csc^2(x+10)$"

Cuando: $V(x) + Q(x) = 0$

A) $\frac{2}{9}$ B) $\frac{9}{2}$ C) $\frac{3}{8}$
D) $\frac{8}{3}$ E) $\frac{2}{7}$

**48.** Siendo: $\frac{\sen x}{\sen y} = \frac{a}{b}$ ; $\frac{\cos x}{\cos y} = \frac{c}{d}$

Determinar $\cos(x-y)$ a términos de a, b, c y d.

A) $\frac{ab+cd}{ad+bc}$ B) $\frac{ad+bc}{ab+cd}$ C) $\frac{ac+bd}{ad+bc}$
D) $\frac{ad+bc}{ac+bd}$ E) $\frac{ac+bd}{ab+cd}$

**49.** Halle el equivalente de:

$$V = \prod_{i=0}^{n-1}\left[\sqrt{3} + \cot\left(x - (i+1)\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $n\sqrt{3}$
D) $\sqrt{3}^n$ E) $-\sqrt{3}$

**50.** Reducir la siguiente sumatoria:

$S = \tan x \cdot \sec 2x + \tan 2x \cdot \sec 4x + \tan 4x \cdot \sec 8x + \ldots$

"n" términos

A) $\tan 2x - \tan x$ B) $\tan^2 2x - \tan x$
C) $\tan^n 2x - \tan x$
D) $\tan 2x - \tan^n x$ E) $\tan 2^n x - \tan x$

team CALAPENSHKO

Capítulo 10

# Identidades de Arcos Múltiples

**CAPACIDADES**

- Conocer el desarrollo de las razones trigonométricas con arcos de la forma "$2\alpha$"; "$\alpha/2$"; "$3\alpha$" en términos de $\alpha$.
- Aplicar correctamente las propiedades que se establecen entre los arcos y sus múltiplos.

## ABRAHAM DE MOIVRE

Matemático británico de origen francés, Abraham de Moivre nació en Vitry-le-François, Champagne, Francia el 26 de mayo de 1667 y murió en Londres el 27 de noviembre de 1754. En 1685, Louis XIV revoca el edicto de Nantes y comienza la persecución religiosa a los protestantes. Se produce la expulsión de los hugonotes. De Moivre marcha a Londres, donde se convierte en instructor privado de matemáticas. Enseñando también en los cafés.

ABRAHAM DE MOIVRE

En esa época estudia el Principia de Newton, un libro recién publicado e intenta sin éxito obtener una plaza de profesor de matemáticas edn alguna universidad. Sin embargo, sus investigaciones si tienen éxito, conoce personalmente a Newton. En marzo de 1695, Halley comunica su primer artículo titulado Method of fluxions a la Royal Society. Siendo elegido, en 1697, miembro de dicha sociedad.

De Moivre fue pionero en el desarrollo de la geometría analítica y de la teoría de probabilidades. En 1718, publicó su libro The Doctrine of Chance: A method of calculating the probabilities of events in play. En 1711, ya había publicado una versión en latín en la revista Philosophical Transactions. La definición de independencia estadística aparece en este libro junto con problemas de dados y juegos.

En su trabajo, Miscellanea Analytica de 1730, ya aparece la llamada erróneamente fórmula de Stirling, que usó posteriormente en 1733 para derivar la curva normal como una aproximación a la distribución binomial. La atribución errónea quizás sea debida a que en la segunda edición del libro en 1738, de Moivre da crédito a Stirling por una mejora de la fórmula.

De Moivre es recordado por la fórmula que ya usó en 1707: $e^{inx} = (\cos x + i \sin x)^n$

La cual introdujo la trigonometría en el analísis, y que fue importante en el desarrollo de la aritmética de los números complejos. También, en su obra Miscellanea analytica, publicada en Londres en 1730, aparece por vez primera la solución general de una ecuación lineal en recurrecia. Obteniendo mucho antes que Binet, la hoy erróneamente llamada fórmula de Binet para obtener el término n-ésimo de la sucesión de Fibonacci:

$$F_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)\right)^n - \left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right)^n}{\sqrt{5}}$$

team CALAPENSHKO



## INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo, desarrollaremos las identidades que relacionan las razones trigonométricas de un arco en términos de sus submúltiplos enteros. Por ejemplo "sen2α" "cos3α" en términos de la variable angular "α".

Este desarrollo, facilitará al estudiante establecer las relaciones entre razones usadas, pues nos permite desarrollar razones trigonométricas de arco igual y el uso de las identidades fundamentales.

## IDENTIDADES DEL ARCO DOBLE

Sabemos:

**I.** $\operatorname{sen}(\beta + \alpha) = \operatorname{sen}\beta\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\beta$ ..... (1)

Sea: $\beta = \alpha$

Reemplazando en (1) tenemos:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \alpha) = \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$\therefore \quad \boxed{\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}$$

**II.** $\cos(\beta + \alpha) = \cos\beta\cos\alpha - \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha$ ..... (2)

Sea: $\beta = \alpha$

Reemplazando en (2) tenemos:

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \,.\, \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha$$

$$\therefore \quad \boxed{\cos2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}$$

Usando $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, tenemos:

$$\boxed{\cos2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha}$$

$$\boxed{\cos2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$$

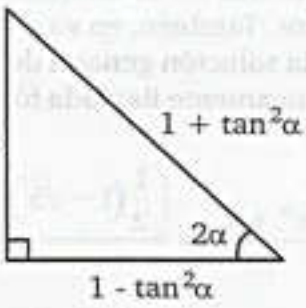
**III.** $\tan(\beta + \alpha) = \dfrac{\tan\beta + \tan\alpha}{1 - \tan\beta\tan\alpha}$ ..... (3)

Sea: $\beta = \alpha$

Reemplazando en (3) tenemos:

$$\tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha \,.\, \tan\alpha}$$

$$\therefore \quad \boxed{\tan2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}} \Rightarrow$$



**EN RESUMEN:**

$\text{sen}2\alpha = 2\text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$

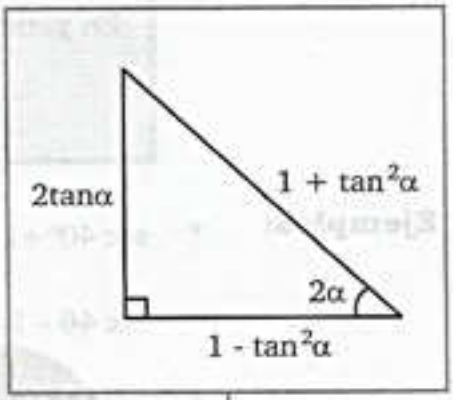
$\cos2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$

$\cos2\alpha = 1 - 2\text{sen}^2\alpha$ $\qquad$ $\cos2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

Despejando:

$2\text{sen}^2\alpha = 1 - \cos2\alpha$ $\qquad$ $2\cos^2\alpha = 1 + \cos2\alpha$

También de manera práctica




**Ejemplos:**

- $\text{sen}40° = 2\text{sen}20° \cdot \cos20°$
- $\cos20° = \begin{cases} \cos^2 10° - \text{sen}^2 10° \\ 1 - 2\text{sen}^2 10° \\ 2\cos^2 10° - 1 \end{cases}$
- $\tan60° = \dfrac{2\tan30°}{1-\tan^2 30°}$
- $\text{sen}40° = \dfrac{2\tan20°}{1+\tan^2 20°}$
- $\cos40° = \dfrac{1-\tan^2 20°}{1+\tan^2 20°}$

## IDENTIDADES AUXILIARES

| |
|---|
| $\sec2\alpha + 1 = \tan2\alpha.\cot\alpha$ |
| $\sec2\alpha - 1 = \tan2\alpha.\tan\alpha$ |
| $\cot\alpha + \tan\alpha = 2\csc2\alpha$ |
| $\cot\alpha - \tan\alpha = 2\cot2\alpha$ |
| $(\text{sen}\alpha \pm \cos\alpha)^2 = 1 \pm \text{sen}2\alpha$ |

| |
|---|
| $\text{sen}^4 x = \dfrac{3 - 4\cos2x + \cos4x}{8}$ |
| $\cos^4 x = \dfrac{3 + 4\cos2x + \cos4x}{8}$ |
| $\text{sen}^4 x + \cos^4 x = \dfrac{3 + \cos4x}{4}$ |
| $\text{sen}^6 x + \cos^6 x = \dfrac{5 + 3\cos4x}{8}$ |

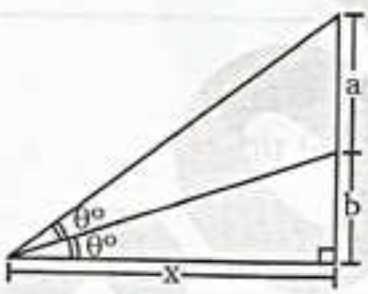
$$\cos x \cos 2x \cos 4x \ldots\ldots \cos 2^{n-1}x = \frac{\operatorname{sen} 2^n x}{2^n \operatorname{sen} x}$$

En general:

$$\frac{1}{2^{n-1}} \leq \operatorname{sen}^{2n}x + \cos^{2n}x \leq 1;\ \forall x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}^+$$

**Ejemplos:**

* $\sec 40^\circ + 1 = \tan 40^\circ . \cot 20^\circ$
* $\sec 4\theta - 1 = \tan 4\theta . \tan 2\theta$
* $\cot 15^\circ + \tan 15^\circ = 2\csc 30^\circ$
* $\cot \frac{\pi}{8} - \tan \frac{\pi}{8} = 2 \cot \frac{\pi}{4}$
* $(\operatorname{sen} 20^\circ + \cos 20^\circ)^2 = 1 + \operatorname{sen} 40^\circ$
* $\operatorname{sen}^4 20^\circ + \cos^4 20^\circ = \frac{3 + \cos 80^\circ}{4}$
* $\operatorname{sen}^6 10^\circ + \cos^6 10^\circ = \frac{5 + 3\cos 40^\circ}{8}$
* $\frac{1}{2^{3-1}} \leq \operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x \leq 1$
* $\frac{1}{2^{5-1}} \leq \operatorname{sen}^{10} x + \cos^{10} x \leq 1$




$$x = b\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$$

* En forma general si n y m son números enteros positivos, tal que al menos uno de ellos es impar se cumple:

$$-\sqrt{\frac{n^n . m^m}{(n+m)^{n+m}}} \leq (\operatorname{sen} x)^n . (\cos x)^m \leq \sqrt{\frac{n^n . m^m}{(n+m)^{n+m}}}$$

**Ejemplo:**

* $-\sqrt{\frac{2^2 . 1^1}{(2+1)^{2+1}}} \leq \operatorname{sen}^2 x . \cos x \leq \sqrt{\frac{2^2 . 1^1}{(2+1)^{2+1}}} \rightarrow -\frac{2\sqrt{3}}{9} \leq \operatorname{sen}^2 x . \cos x \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}$

** En el caso de que m y n sean números pares positivos, se cumple que:

$$0 \leq (\operatorname{sen} x)^n . (\cos x)^m \leq \sqrt{\frac{n^n . m^m}{(n+m)^{n+m}}}$$

**Ejemplo:**

** $0 \leq \operatorname{sen}^2 x . \cos^4 x \leq \sqrt{\frac{2^2 . 4^4}{(2+4)^{2+4}}} \rightarrow 0 \leq \operatorname{sen}^2 x . \cos^4 x \leq \frac{4}{27}$

team CALAPENSHKO


# IDENTIDADES DEL ARCO MITAD

Debemos entender que las identidades de arco mitad pueden ser deducidos como consecuencia directa de las identidades de arco doble. Así tenemos:

**I.** $2\text{sen}^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$ Despejando "sen $\frac{\alpha}{2}$": $\text{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$ $\text{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

**II.** $2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$ Despejando "cos $\frac{\alpha}{2}$": $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$ $\text{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

**EN RESUMEN:**

$$\text{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad \tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

El signo (+) ó (-) dependerá del cuadrante del arco "$\frac{\alpha}{2}$"

**Ejemplos:**

- $\text{sen}15° = \sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}}$
- $\cos 20° = \sqrt{\frac{1+\cos 40°}{2}}$
- Si: $180° < x < 270° \rightarrow 90° < \frac{x}{2} < 135°$ (II C)

  Luego: $\tan\frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

**Observación:** Si: $x \in [0; \pi]$ se cumplen:

$$2\text{sen}\left(\frac{x}{2^n}\right) = \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+2\cos x}}}}}_{\text{"n" radicales}}$$

$$2\cos\left(\frac{x}{2^n}\right) = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+2\cos x}}}}}_{\text{"n" radicales}}$$

**Ejemplo:** Calcule: $M = 2\cos\left(\frac{\pi}{48}\right)$

$$M = 2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}}{16}\right) = 2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}}{2^4}\right) = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{3}}}}}$$

$$M = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

## OTRAS IDENTIDADES

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\csc\alpha-\cot\alpha$$

$$\cot\frac{\alpha}{2}=\csc\alpha+\cot\alpha$$

$$\csc x+\csc 2x+\csc 4x+\csc 8x+.....+\csc 2^n x=\cot\frac{x}{2}-\cot 2^n x$$

$$\csc x-\csc 2x-\csc 4x-\csc 8x-.....-\csc 2^n x=\tan\frac{x}{2}-\cot 2^n x$$

$$\sqrt{1+\operatorname{sen} x}=\left|\operatorname{sen}\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|$$

$$\sqrt{1+\cos x}=\sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|$$

$$\sqrt{1-\operatorname{sen} x}=\left|\operatorname{sen}\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right|$$

$$\sqrt{1-\cos x}=\sqrt{2}\left|\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right|$$

**Ejemplos:**

- $\tan 15^\circ=\csc 30^\circ-\cot 30^\circ=2-\sqrt{3}$
- $\cot\frac{\pi}{8}=\csc\frac{\pi}{4}+\cot\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}+1$
- $\cot 15^\circ=\csc 30^\circ+\cot 30^\circ=2+\sqrt{3}$
- $\tan\frac{\pi}{8}=\csc\frac{\pi}{4}-\cot\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}-1$

**También:**

$$\cot\frac{\alpha}{2}-\tan\frac{\alpha}{2}=2\cot\alpha$$

$$\cot\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\alpha}{2}=2\csc\alpha$$

**Ejemplos:**

- $\cot\frac{\pi}{16}-\tan\frac{\pi}{16}=2\cot\frac{\pi}{8}=2(\sqrt{2}+1)$
- $\cot\frac{\pi}{24}+\tan\frac{\pi}{24}=2\csc\frac{\pi}{12}=2(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

team CALAPENSHKO



# IDENTIDADES DEL ARCO TRIPLE

Debemos entender que las identidades de arco triple pueden ser deducidos como consecuencia directa de las identidades del arco compuesto y arco doble.

**I.** * $\operatorname{sen}3\alpha = \operatorname{sen}(2\alpha + \alpha)$
$\operatorname{sen}3\alpha = \operatorname{sen}2\alpha\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos2\alpha$
$\operatorname{sen}3\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos2\alpha$
$\operatorname{sen}3\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos2\alpha$
$\operatorname{sen}3\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha(1 - \operatorname{sen}^2\alpha) + \operatorname{sen}\alpha(1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha)$ ..... en términos de sen$\alpha$

$$\therefore \boxed{\operatorname{sen}3\alpha = 3\operatorname{sen}\alpha - 4\operatorname{sen}^3\alpha}$$

** $\operatorname{sen}3\alpha = \operatorname{sen}\alpha(3 - 4\operatorname{sen}^2\alpha)$ ..... factorizando sen$\alpha$
$\operatorname{sen}3\alpha = \operatorname{sen}\alpha(3 - 2 \cdot 2\operatorname{sen}^2\alpha)$
$\operatorname{sen}3\alpha = \operatorname{sen}\alpha(3 - 2(1 - \cos2\alpha))$
$\operatorname{sen}3\alpha = \operatorname{sen}\alpha(3 - 2 + 2\cos2\alpha)$

$$\therefore \boxed{\operatorname{sen}3\alpha = \operatorname{sen}\alpha(2\cos2\alpha + 1)}$$

**II.** * $\cos3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha)$
$\cos3\alpha = \cos2\alpha\cos\alpha - \operatorname{sen}2\alpha\operatorname{sen}\alpha$
$\cos3\alpha = \cos2\alpha\cos\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha$
$\cos3\alpha = \cos2\alpha\cos\alpha - 2\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha$ ..... en términos del cos$\alpha$
$\cos3\alpha = (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2(1 - \cos^2\alpha)\cos\alpha$

$$\therefore \boxed{\cos3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha}$$

** $\cos3\alpha = \cos\alpha(4\cos^2\alpha - 3)$ ..... factorizando cos$\alpha$
$\cos3\alpha = \cos\alpha(2 \cdot 2\cos^2\alpha - 3)$
$\cos3\alpha = \cos\alpha(2(1 + \cos2\alpha) - 3)$

$$\therefore \boxed{\cos3\alpha = \cos\alpha(2\cos2\alpha - 1)}$$

**III.** $\tan3\alpha = \tan(2\alpha + \alpha)$

$$\tan3\alpha = \frac{\tan2\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan2\alpha\tan\alpha}$$

$$\tan3\alpha = \frac{\dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} + \tan\alpha}{1 - \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} \cdot \tan\alpha}$$

$$\therefore \boxed{\tan3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}}$$

**EN RESUMEN:**

$$\text{sen}3\alpha = 3\text{sen}\alpha - 4\text{sen}^3\alpha \qquad \text{sen}3\alpha = \text{sen}\alpha\,(2\cos 2\alpha + 1)$$

DESPEJANDO: $4\text{sen}^3\alpha = 3\text{sen}\alpha - \text{sen}3\alpha$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \qquad \cos 3\alpha = \cos\alpha(2\cos 2\alpha - 1)$$

DESPEJANDO: $4\cos^3\alpha = 3\cos\alpha + \cos 3\alpha$

$$\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$$

**Ejemplos:**

- $\text{sen}\,6\theta = 3\text{sen}\,2\theta - 4\text{sen}^3 2\theta = \text{sen}2\theta(2\cos 4\theta + 1)$
- $\cos 12x = 4\cos^3 4x - 3\cos 4x = \cos 4x(2\cos 8x - 1)$
- $\tan 222° = \dfrac{3\tan 74° - \tan^3 74°}{1 - 3\tan^2 74°}$
- $4\text{sen}^3 10° = 3\text{sen}\,10° - \text{sen}\,30°$
- $4\cos^3 5° = 3\cos 5° + \cos 15°$
- $4\text{sen}^3 8° = 3\text{sen}\,8° - \text{sen}\,24°$

## OTRAS IDENTIDADES

$$4\text{sen}\,(60° - \alpha)\,\text{sen}\alpha\,\text{sen}(60° + \alpha) = \text{sen}3\alpha$$

$$4\cos\,(60° - \alpha)\,\cos\alpha\,\cos(60° + \alpha) = \cos 3\alpha$$

$$\tan\alpha\,.\,\tan(60° - \alpha)\,\tan(60° + \alpha) = \tan 3\alpha$$

**Ejemplos:**

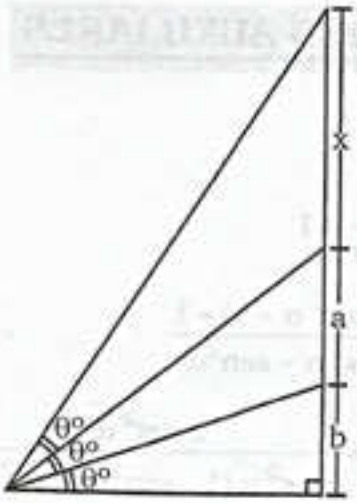
- $4\text{sen}\underbrace{50°}_{60°-\alpha}\,\text{sen}\underbrace{10°}_{\alpha}\,\text{sen}\underbrace{70°}_{60°+\alpha} = \text{sen}30°$
- $4\cos 40°\cos 20°\cos 80° = \cos 60°$
- $\tan 12°\,.\,\tan 48°\,.\,\tan 72° = \tan 36°$

## IDENTIDAD AUXILIAR

$$\frac{\tan 3x}{\tan x} = \frac{2\cos 2x + 1}{2\cos 2x - 1}$$

team CALAPENSHKO






$$x = \frac{a^2}{2b - a}$$

## TRIÁNGULO RECTÁNGULO DE 18° Y 36°

Sabemos que:

$$\operatorname{sen}36^\circ = \cos 54^\circ$$

$$2\operatorname{sen}18^\circ\cos 18^\circ = 4\cos^3 18 - 3\cos 18^\circ$$

Usando la identidad del arco doble y triple

$$2\operatorname{sen}18^\circ\cos 18^\circ = \cos 18^\circ(4\cos^2 18^\circ - 3)$$

$$2\operatorname{sen}18^\circ = 4(1 - \operatorname{sen}^2 18^\circ) - 3$$

$$2\operatorname{sen}18^\circ = 1 - 4\operatorname{sen}^2 18^\circ$$

Formando la ecuacion se segundo grado.

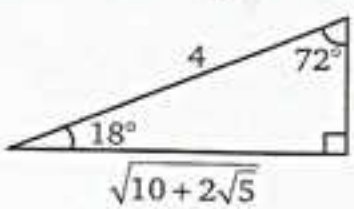
$$4\operatorname{sen}18^\circ + 2\operatorname{sen}18^\circ - 1 = 0$$

$$\operatorname{sen}18^\circ = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(4)(-1)}}{2(4)}$$

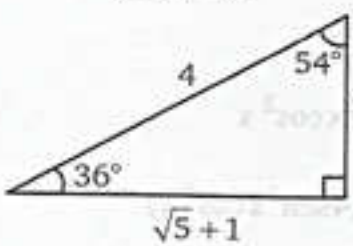
$$\operatorname{sen}18^\circ = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \quad \vee \quad \operatorname{sen}18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

Considerando: $\frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ (por ser 18° agudo)

$$\therefore \operatorname{sen}18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$




$$\operatorname{sen}18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$




$$\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$$

# IDENTIDADES AUXILIARES

* $\sec 2\alpha + 1 = \tan 2\alpha . \cot \alpha$

Solución:

$$\sec 2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos 2\alpha} + 1$$

$$= \frac{1 + \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{(2\cos^2 \alpha - 1) + 1}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}$$

$$= \frac{2\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{2\cancel{\cos^2 \alpha}}{\cancel{\cos^2 \alpha}(1 - \operatorname{sen}^2 \alpha / \cos^2 \alpha)}$$

$$= \frac{2}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2\tan \alpha - \cot \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$= \tan 2\alpha . \cot \alpha$$

* $\cot \alpha + \tan \alpha = 2\csc 2\alpha$

Solución:

$$\cot \alpha + \tan \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} + \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}$$

$$= \frac{2}{2\operatorname{sen} \alpha . \cos \alpha} = \frac{2}{\operatorname{sen} 2\alpha} = 2\csc 2\alpha$$

twitter.com/calapenshko

* $\operatorname{sen}^4 x = \dfrac{3 - 4\cos 2x + \cos 4x}{8}$

Solución

$$\operatorname{sen}^4 x = \frac{1}{4}(2\operatorname{sen}^2 x)^2 = \frac{1}{4}(1 - \cos 2x)^2$$

$$= \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) = \frac{1}{8}(2 - 4\cos 2x + 2\cos^2 2x)$$

$$= \frac{1}{8}(2 - 4\cos 2x + \cos 4x + 1) = \frac{1}{8}(3 - 4\cos 2x + \cos 4x)$$

* $\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = \dfrac{5 + 3\cos 4x}{8}$

Solución:

Sabemos por identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$$

luego:

$$1 - 3\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}(4\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x)$$

team CALAPENSHKO


$$= 1 - \frac{3}{4}\text{sen}^2 2x = 1 - \frac{3}{8}(2\text{sen}^2 2x)$$

$$= 1 - \frac{3}{8}(1 - \cos 4x) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$$

## PROPIEDAD:

$$\boxed{\frac{1}{2^{n-1}} \leq \text{sen}^{2n}x + \cos^{2n}x \leq 1;\ \forall x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}^+}$$

## DEMOSTRACIÓN

Sabemos que: $-1 \leq \text{sen}x \leq 1 \ \wedge\ -1 \leq \cos x \leq 1;\ \forall x \in \mathbb{R}$

eleveando a la $(2n-2)$ cada desigualdad

$$\Rightarrow \text{sen}^{2n-2} \leq 1 \ \wedge\ \cos^{2n-2}x \leq 1$$

$$\Rightarrow \text{sen}^{2n}x \leq \text{sen}^2 x \ \wedge\ \cos^{2n}x \leq \cos^2 x$$

Sumando las desigualdades:

$$\text{sen}^{2n}x + \cos^{2n}x \leq \underbrace{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}_{1} \Rightarrow \text{sen}^{2n}x + \cos^{2n}x \leq 1 \quad \ldots\ldots(\alpha)$$

Ahora: se cumple que la media potencial es mayor o igual que la media aritmética. Para 2 números se tiene:

$$\sqrt[n]{\frac{a^n + b^n}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$$

y la igualdad se cumple si $a=b$.

Haciendo : $a = \text{sen}^2 x,\ b = \cos^2 x$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{\frac{\text{sen}^{2n}x + \cos^{2n}x}{2}} \geq \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{sen}^{2n}x + \cos^{2n}x}{2} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \text{sen}^{2n}x + \cos^{2n}x \geq \frac{1}{2^{n-1}} \quad \ldots\ldots(\beta)$$

y la igualdad se dá si $\text{sen}^2 x = \cos^2 x$

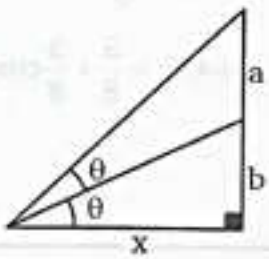
si $x \in [0; 2\pi\rangle$

$$\Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$$

De $(\alpha) \wedge (\beta)$ se obtiene:

$$\therefore\ \boxed{\frac{1}{2^{n-1}} \leq \text{sen}^{2n}x + \cos^{2n}x \leq 1\ ;\ \forall x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}^+}$$

## PROPIEDAD




$$x = b\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$$

## DEMOSTRACIÓN

Del gráfico: $\tan\theta = \frac{b}{x} \wedge \tan 2\theta = \frac{a+b}{x}$

Se cumple que: $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

Reemplazando: $\frac{a+b}{x} = \frac{2\left(\frac{b}{x}\right)}{1-\left(\frac{b}{x}\right)^2}$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{x} = \frac{2bx}{x^2-b^2}$$

$$\Rightarrow (a+b)x^2 - b^2(a+b) = 2bx^2$$

$$\Rightarrow x^2(a-b) = b^2(a+b)$$

$$\therefore \boxed{x = b\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}}$$

## PROPIEDAD

I) Si $m, n \in \mathbb{Z}^+$ y al menos uno de ellos es impar

se cumple:

$$\sqrt{\frac{n^n.m^m}{(n+m)^{n+m}}} \le (\text{sen}x)^n.(\cos x)^m \le \sqrt{\frac{n^n.m^m}{(n+m)^{n+m}}}$$

II) Si $m, n \in \mathbb{Z}^+$ y ambos son pares

se cumple :

$$0 \le (\text{sen}x)^n.(\cos x)^m \le \sqrt{\frac{n^n.m^m}{(n+m)^{n+m}}}$$

team CALAPENSHKO



## DEMOSTRACIÓN

(I) Se cumple: M.A ≥ M.G

y la igualdad se da si los números son iguales.

$$\Rightarrow \frac{\overbrace{\frac{sen^2x}{n}+\frac{sen^2x}{n}+....+\frac{sen^2x}{n}}^{n}+\overbrace{\frac{cos^2x}{m}+...+\frac{cos^2x}{m}}^{m}}{m+n} \geq \sqrt[m+n]{\left(\frac{sen^2x}{n}\right)^n\left(\frac{cos^2x}{m}\right)^m}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{sen^2x+cos^2x}{m+n}\right)^{m+n} \geq \frac{sen^{2n}x}{n^n}\frac{cos^{2m}x}{m^m} \Rightarrow \frac{1}{(m+n)^{m+n}} \geq \frac{sen^{2n}x.cos^{2m}x}{m^n.m^m}$$

$$\Rightarrow \left[(senx)^n(cosx)^m\right]^2 \leq \frac{n^n.m^m}{(m+n)^{m+n}}$$

* Sacando raíz cuadrada

$$\therefore \quad \boxed{-\sqrt{\frac{n^n.m^m}{(n+m)^{m+n}}} \leq (senx)^n(cosx)^m \leq \sqrt{\frac{n^n.m^m}{(m+n)^{m+n}}}}$$

Debido a que entre m y n existe un impar , la expresión $(senx)^n(cosx)^m$ puede ser positiva o negativa.

(II) Como m y n son pares, la expresión $(senx)^n(cosx)^m$ es positiva. Entonces:

$$\boxed{0 \leq (senx)^n(cosx)^m \leq \sqrt{\frac{n^n.m^m}{(n+m)^m}}}$$

### * DEMOSTRACIONES DE ALGUNAS IDENTIDADES DEL ARCO MITAD

## OBSERVACIÓN

Si $x \in [0, \pi]$ se cumplen :

i) $$2sen\left(\frac{x}{2^n}\right) = \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+....+\sqrt{2+2cosx}}}}_{\text{"n" radicales}}$$

ii) $$2cos\left(\frac{x}{2^n}\right) = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+2cosx}}}}_{\text{"n" radicales}}$$

## DEMOSTRACIÓN

$$\sqrt{2+2\cos x} = \sqrt{2+2\left(2\cos^2\frac{x}{2}-1\right)}$$

$$\sqrt{2+2\cos x} = 2\cos\frac{x}{2}$$

$$\sqrt{2+2\cos\frac{x}{2}} = \sqrt{2+2\left(2\cos^2\frac{x}{4}-1\right)}$$

$$\sqrt{2+2\cos\frac{x}{2}} = 2\cos\frac{x}{4}$$

Realizando el proceso "n – 1" veces

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+....+\sqrt{2+2\cos x}}}}_{\text{"n – 1" radicales}} = 2\cos\frac{x}{2^{n-1}}$$

Ahora reemplazando en:

i) $$\sqrt{2-\sqrt{2+....+\sqrt{2+2\cos x}}} = \sqrt{2-2\cos\frac{x}{2^{n-1}}} = \sqrt{2-2\left(1-2\text{sen}^2\frac{x}{2^n}\right)} = 2\text{sen}\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

ii) $$\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+2\cos x}}} = \sqrt{2+2\cos\frac{x}{2^{n-1}}} = \sqrt{2+2\left(2\cos^2\frac{x}{2^n}-1\right)} = 2\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

Esto prueba lo afirmado en la observación.

## OTRAS IDENTIDADES

* $\tan\frac{\alpha}{2} = \csc\alpha - \cot\alpha$

**Demostración:** $\csc\alpha - \cot\alpha = \frac{1}{\text{sen}\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}$

$$\csc\alpha - \cot\alpha = \frac{1-(1-2\text{sen}^2\frac{\alpha}{2})}{2\text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$$

team CALAPENSHKO


$$\csc\alpha-\cot\alpha=\frac{2\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{2\text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\tan\frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore\quad \boxed{\tan\frac{\alpha}{2}=\csc\alpha-\cot\alpha}$$

* $\cot\frac{\alpha}{2}=\csc\alpha+\cot\alpha$

**DEMOSTRACIÓN**

$$\csc\alpha+\cot\alpha=\frac{1}{\text{sen}\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}$$

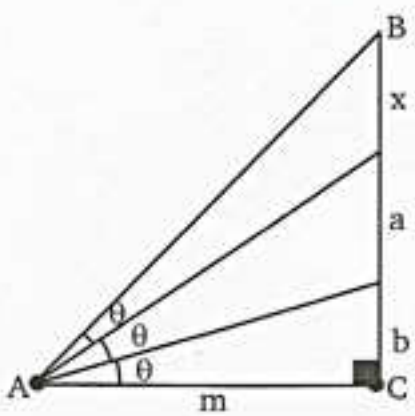
$$\csc\alpha+\cot\alpha=\frac{1+\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}=\frac{1+(2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1)}{\text{sen}\alpha}$$

$$\csc\alpha+\cot\alpha=\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\cot\frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore\quad \boxed{\cot\frac{\alpha}{2}=\csc\alpha+\cot\alpha}$$

## * DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD DE IDENTIDADES DEL ARCO TRIPLE

### PROPIEDAD:




Se cumple: $\boxed{x=\frac{a^2}{2b-a}}$

## DEMOSTRACIÓN

Sea AC = m

$$* \quad \tan\theta = \frac{b}{m} \qquad \ldots(1)$$

$$\tan 2\theta = \frac{a+b}{m} \qquad \ldots(2)$$

$$\tan 3\theta = \frac{a+b+x}{m} \qquad \ldots(3)$$

(2) ÷ (1):

$$\frac{\tan 2\theta}{\tan\theta} = \frac{a+b}{b}$$

$$\frac{2}{1-\tan^2\theta} = \frac{a+b}{b} \qquad \ldots(4)$$

(3) ÷ (1):

$$\frac{\tan 3\theta}{\tan\theta} = \frac{a+b+x}{b}$$

$$\frac{3-\tan^2\theta}{1-3\tan^2\theta} = \frac{a+b+x}{b} \qquad \ldots(5)$$

De (4): Despejamos $\tan^2\theta$

$$\tan^2\theta = \frac{a-b}{a+b}$$

Reemplazando en (5) y operando

se obtiene: $\boxed{x = \frac{a^2}{2b-a}}$

team CALAPENSHKO



## EJERCICIOS DE APLICACIÓN

**1.** Indicar verdadero (V) ó falso (F) según corresponda:

I. $\operatorname{sen}12x = 2\operatorname{sen}6x \cdot \cos 6x$ ( )

II. $\cos 4x = \cos^2 2x - \operatorname{sen}^2 2x$ ( )

III. $\tan 6x = \dfrac{\tan 3x}{1-\tan^2 3x}$ ( )

IV. $\cos 8x = 2\cos^2 4x + 1$ ( )

**2.** ¿Cuál de las siguientes expresiones no representa al cos2x?

I. $2\cos^2 x - 1$ II. $1 - 2\operatorname{sen}^2 x$

III. $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ IV. $\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

V. $\dfrac{1-\cot^2 x}{1+\cot^2 x}$

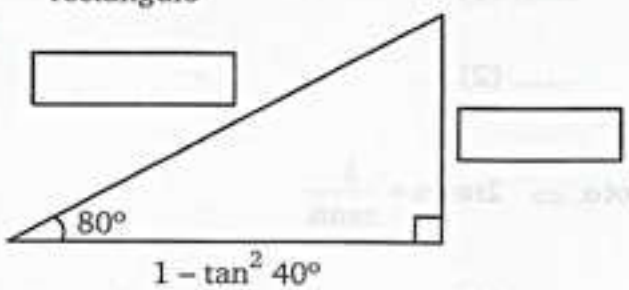
A) I B) II C) III
D) IV E) V

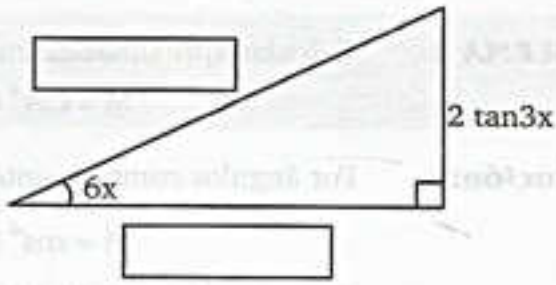
**3.** Completar la siguiente proposición:

El doble producto del ..... del coseno de un ángulo es igual al coseno del ..... más la unidad.

A) cuadrado, triple
B) cuadrado, doble
C) cubo, doble
E) cubo, doble
E) cuadrado, cuádruple

**4.** Completar los lados del triángulo rectángulo




**5.** Simplifique:

A) $\sqrt{\dfrac{1-\cos 6x}{2}} =$ _____

B) $\sqrt{\dfrac{1+\cos\frac{x}{2}}{2}} =$ _____

C) $\sqrt{\dfrac{1-\cos 40°}{1+\cos 40°}} =$ _____

**6.** Calcule:

A) sen22°30' = ____ B) cos18°30' = ____

C) tan22°30' = ____ D) cot15° = ____

**7.** Reduzca:

A) $\cot\dfrac{x}{4} - \tan\dfrac{x}{4} =$ _____

B) $\csc 4x + \cot 4x =$ _____

C) $\csc 80° - \cot 80° =$ _____

D) $\csc x + \csc 2x + \csc 4x + \cot 4x =$ _____

**8.** Complete la igualdad:

A) $3\operatorname{sen}3x - 4\operatorname{sen}^3 3x =$ _____

B) $\operatorname{sen}2x(2\cos 4x + 1) =$ _____

C) $4\cos^3 4x - 3\cos 4x =$ _____

D) $\cos 3x(2\cos 6x - 1) =$ _____

E) $\dfrac{3\tan 2x - \tan^3 2x}{1-3\tan^2 2x} =$ _____

## PROBLEMAS RESUELTOS

**PROBLEMA 1** Calcular aproximadamente el valor de:

$$M = \cos^4 8° - \cos^4 82°$$

**Resolución:** Por ángulos complementarios: $\cos 82° = \operatorname{sen} 8°$

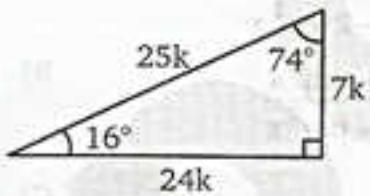
$$M = \cos^4 8° - \operatorname{sen}^4 8°$$

Factorizando usando diferencia de cuadrados.

$$M = \underbrace{(\cos^2 8° + \operatorname{sen}^2 8°)}_{1}\underbrace{(\cos^2 8° - \operatorname{sen}^2 8°)}_{\cos 2\times 8°}$$

$$M = \cos 16°$$

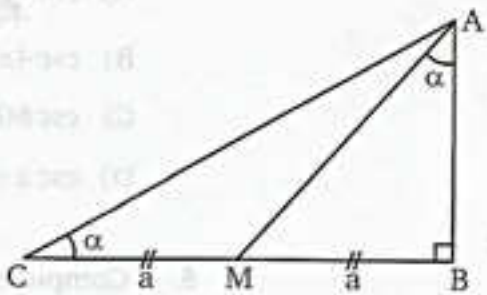
Recordar:




$$M = \frac{24k}{25k} \qquad \therefore \quad M = 0{,}96$$

**PROBLEMA 2** En un triángulo rectángulo ABC se traza la mediana $\overline{AM}$ (M en $\overline{BC}$)
Si: $m\angle BAM = m\angle ACM = \alpha$
Calcule: $\cos 2\alpha$

**Resolución:** Sea: $CM = MB = a$




$\triangle_{ABM}$: $AB = a \cdot \cot\alpha$ ..... (1)

$\triangle_{ABC}$: $AB = 2a \cdot \tan\alpha$ ..... (2)

(2) = (1): $2a \cdot \tan\alpha = a \cdot \cot\alpha \Rightarrow 2\tan\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

Luego: $\tan^2\alpha = \dfrac{1}{2}$ ..... (3)

team CALAPENSHKO


De la identidad:

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \quad \ldots\ldots (*)$$

Usando (3) en (*):

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \quad \boxed{\cos 2\alpha = \frac{1}{3}}$$

**PROBLEMA 3** Simplifique la expresión matemática:

$$E = \frac{\operatorname{sen} 2x + \cos 2x}{\operatorname{sen} x \cos x} + \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos 2x}$$

**Resolución:** Usando $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ en el 2° miembro

$$E = \frac{\operatorname{sen} 2x + \cos 2x}{\operatorname{sen} x + \cos x} + \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}$$

$$E = \frac{\operatorname{sen} 2x + \cos 2x}{\operatorname{sen} x + \cos x} + \frac{\cancel{(\cos x - \operatorname{sen} x)}}{(\cos x + \operatorname{sen} x)\cancel{(\cos x - \operatorname{sen} x)}}$$

$$E = \frac{\operatorname{sen} 2x + \cos 2x}{\operatorname{sen} x + \cos x} + \frac{1}{\cos x + \operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen} 2x + \cos 2x + 1}{\operatorname{sen} x + \cos x}$$

Usando identidades: $\begin{cases} \operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cos x \\ \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \end{cases}$

Tenemos : $$E = \frac{2\operatorname{sen} x \cos x + 2\cos^2 x - 1 + 1}{\operatorname{sen} x + \cos x} = \frac{2\cos x(\operatorname{sen} x + \cos x)}{\operatorname{sen} x + \cos x}$$

$$\therefore \quad \boxed{E = 2\cos x}$$

**PROBLEMA 4** Reduzca la expresión:

$$E = \cos^3\theta \,.\, \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta \,.\, \cos\theta$$

**Resolución:** Factorizando "$\operatorname{sen}\theta \,.\, \cos\theta$"

$$E = \operatorname{sen}\theta \,.\, \cos\theta \,.\, (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = \operatorname{sen}\theta \,.\, \cos\theta \,.\, \cos 2\theta$$

Multiplicando por "2" tenemos:

$$2E = \underbrace{2\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta}_{} \cdot \cos 2\theta$$

$$2E = \operatorname{sen} 2\theta \cdot \cos 2\theta$$

Multiplicando por "2" tenemos:

$$4E = \underbrace{2\operatorname{sen} 2\theta \cdot \cos 2\theta}$$

$$4E = \operatorname{sen} 4\theta$$

$$\therefore \quad E = \frac{\operatorname{sen} 4\theta}{4}$$

**PROBLEMA 5** Demuestre las siguientes formulas de degradación:

i) $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \cos 4x$

ii) $\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cdot \cos 4x$

**Resolución:** i) Partiremos de la identidad auxiliar:

$$\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$$

$$\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = 1 - 2(\operatorname{sen} x \cos x)^2$$

En el miembro de la derecha multiplicamos y dividimos por 2 el segundo término:

$$\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\left(\frac{\overbrace{2\operatorname{sen} x \cos x}^{\operatorname{sen} 2x}}{2}\right)^2$$

$$\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right)^2$$

$$\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{\overbrace{2\operatorname{sen}^2 2x}}{4}$$

Aplicando la formula de degradación: $2\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$

$$\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1 - \cos 4x}{4}$$

$$\therefore \quad \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$$

ii) Para el lector.

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 6** Evalúe:

$$E = \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x$$

Para: $x = \frac{2\pi}{17}$

**Resolución:** Usaremos en varias ocasiones la identidad:

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$$

Primero reduciremos la expresión E, multiplicando por "2senx" ambos miembros:

$$2 \operatorname{sen} x \, E = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x$$

$$2 \operatorname{sen} x \, E = (\operatorname{sen} 2x) \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x$$

Multiplicando por 2:

$$4 \operatorname{sen} x \, E = 2 \operatorname{sen} 2x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x$$

$$4 \operatorname{sen} x \, E = (\operatorname{sen} 4x \cdot \cos 4x) \cdot \cos 8x$$

Multiplicando por 2:

$$8 \operatorname{sen} x \, E = 2 \operatorname{sen} 4x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x$$

$$8 \operatorname{sen} x \, E = (\operatorname{sen} 8x) \cdot \cos 8x$$

Multiplicando por 2:

$$16 \operatorname{sen} x \, E = 2 \operatorname{sen} 8x \cdot \cos 8x$$

$$16 \operatorname{sen} x \, E = \operatorname{sen} 16x$$

Reemplazando: $x = \frac{2\pi}{17}$

$$16 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{17}\right) E = \operatorname{sen}\left(\frac{32\pi}{17}\right) \quad \ldots\ldots (1)$$

Aplicando reducción al primer cuadrante en el segundo miembro, así tenemos:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{32\pi}{17}\right) = \operatorname{sen}\left(2\pi - \frac{2\pi}{17}\right)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{32\pi}{17}\right) = -\operatorname{sen}\frac{2\pi}{17} \quad \ldots\ldots (2)$$

(2) en (1): $16 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{17}\right) E = -\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{17}\right)$

$$\therefore \quad E = -\frac{1}{16}$$

**PROBLEMA 7** Si para un ángulo de valor "θ" mayor a 270° pero menor que 360° se cumple: $\cos\theta = 0{,}5$. Calcule

i) $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$ ii) $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

**Resolución:** Del dato: $270° < \theta < 360° \Rightarrow 135° < \frac{\theta}{2} < 180°$

$$\therefore \frac{\theta}{2} \in \text{IIC} \quad \text{.....(*)}$$

i) $\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = +\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$

Pues el seno en el segundo cuadrante es positivo.

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}} \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{1}}}$$

$$\therefore \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

ii) $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$

Pues el coseno en el segundo cuadrante es negativo.

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}} \Rightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = -\sqrt{\frac{\frac{3}{2}}{\frac{2}{1}}}$$

$$\therefore \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 8** Calcule el valor de la expresión:

$$E = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right) . \sec\left(\frac{\pi}{16}\right)$$

**Resolución:** Usando la identidad: $\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

Para: $\alpha = \frac{\pi}{16}$

Tenemos: $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{16}\right)\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$

En E: $E = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{16}\right)\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)\sec\left(\frac{\pi}{16}\right)}_{1 \text{ ..... 1 T Recíproca}}$

$$E = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{16}\right) \quad \text{..... (*)}$$

Calcularemos $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}{\frac{2}{1}}}\ ]$$

Operando tenemos:

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

Ahora calcularemos $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{16}\right)$:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{16}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2}} \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{16}\right) = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}{\frac{2}{1}}}\ ]$$

Operando tenemos:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

En (*):

$$\therefore \quad \mathbf{E = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 9** Reduzca la sumatoria:

$$J = \csc x + \csc 2x + \csc 4x + \csc 8x + .... + \csc 2^n x$$

**Resolución:** De la fórmula racionalizada

$$\cot\left(\frac{\theta}{2}\right) = \csc\theta + \cot\theta$$

Despejando tenemos:

$$\csc\theta = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cot\theta \quad ..... (1)$$

Aplicando (1) para cada caso y luego sumando

$$\left.\begin{array}{lll} \csc x & = \cot\left(\frac{x}{2}\right) & - \cot x \\ \csc 2x & = \cot x & - \cot 2x \\ \csc 4x & = \cot 2x & - \cot 4x \\ \csc 8x & = \cot 4x & - \cot 8x \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \csc 2^n x & = \cot 2^{n-1} x & - \cot 2^n x \end{array}\right\} +$$

$$\therefore \quad J = \cot\left(\frac{x}{2}\right) - \cot 2^n x$$

twitter.com/calapenshko

**PROBLEMA 10** Simplifique la expresión:

$$E = \frac{\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen}^3 x}{\cos^3 x - \cos 3x}$$

**Resolución:** Usando las identidades:

$$\operatorname{sen} 3x = 3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x \ \wedge \ \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

Tenemos :

$$E = \frac{3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen}^3 x}{\cos^3 x - (4\cos^3 x - 3\cos x)}$$

$$E = \frac{3\operatorname{sen} x - 3\operatorname{sen}^3 x}{3\cos x - 3\cos^3 x}$$

$$E = \frac{3\operatorname{sen} x(1 - \operatorname{sen}^2 x)}{3\cos x(1 - \cos^2 x)}$$

$$E = \frac{\operatorname{sen} x \,.\, \cos^2 x}{\cos x \,.\, \operatorname{sen}^2 x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$\therefore \quad E = \cot x$$

team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 11** Hallar un valor de "x" que maximiza la expresión:

$$E = \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos 3x + \cos^3 x \cdot \operatorname{sen} 3x$$

**Resolución:** Usaremos las fórmulas de degradación:

$$4\operatorname{sen}^3 x = 3\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x$$

$$4\cos^3 x = 3\cos x + \cos 3x$$

Multiplicamos por 4 a la expresión E:

$$4E = \underbrace{4\operatorname{sen}^3 x} \cdot \cos 3x + \underbrace{4\cos^3 x} \cdot \operatorname{sen} 3x$$

$$4E = (3\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x)\cos 3x + (3\cos x + \cos 3x)\operatorname{sen} 3x$$

Desarrollando y agrupando:

$$4E = \underbrace{3(\operatorname{sen} 3x \cos x + \cos 3x \operatorname{sen} x)}$$

$\operatorname{sen}(3x+x)$ ..... I. Arcos compuestos

$$E = \frac{3}{4}\operatorname{sen} 4x$$

Luego para $E_{max} \Rightarrow \operatorname{sen} 4x = 1$ ..... (valor máximo del seno)

Así: $4x = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ **Un valor de x es** $\frac{\pi}{8}$

**PROBLEMA 12** Determinar los valores de:

i) $\operatorname{sen} 18°$ ii) $\cos 36°$

**Resolución:** i) Usaremos las identidades:

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \ \wedge \ \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

De ángulos complementarios tenemos: $\operatorname{sen} 36° = \cos 54°$

Dando forma para aplicar las identidades:

$$\text{sen}(2\times 18^\circ)=\cos(3\times 18^\circ)$$

$$2\text{sen}18^\circ\cos 18^\circ=4\cos^3 18^\circ-3\cos 18^\circ$$

$$2\text{sen}18^\circ\cos 18^\circ=\cos 18^\circ(4\cos^2 18^\circ-3)$$

$$2\text{sen}18^\circ=4\underbrace{\cos^2 18^\circ}-3$$

$1-\text{sen}^2 18^\circ$ ..... I.T. pitagorica

Desarrollando y ordenando tenemos:

$$4\text{sen}^2 18^\circ+2\text{sen}18^\circ-1=0$$

Aplicando la solución general de una ecuación de 2° grado, así:

$$\text{sen}18^\circ=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(4)(-1)}}{2(4)}$$

$$\text{sen}18^\circ=\frac{-2\pm\sqrt{20}}{8}\Rightarrow\text{sen}18^\circ=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}\begin{cases}\rightarrow\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}\ \checkmark\\ \rightarrow\ \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}\ \times\end{cases}$$

$$\therefore\quad \text{sen}18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\qquad \text{..... (1)}$$

ii) Usaremos la identidad

$$\cos 2\theta=1-2\text{sen}^2\theta$$

Luego: $\cos 36^\circ=1-2\text{sen}^2 18^\circ$

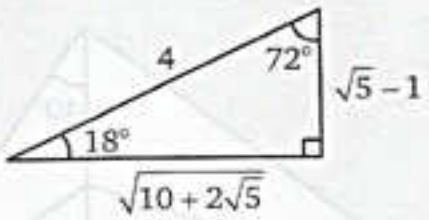
$$\cos 36^\circ=1-2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$$

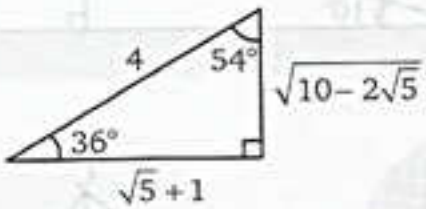
$$\cos 36^\circ=1-2\left(\frac{5-2\sqrt{5}+1}{16}\right)$$

Operando tenemos:

$$\therefore\quad \cos 36^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4}\qquad \text{..... (2)}$$

Finalmente de (1) y (2):




**PROBLEMA 13** Calcule:

$$M = \csc 10° - \sqrt{3}\sec 10°$$

**Resolución:**

$$M = \frac{1}{\operatorname{sen}10°} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10°}$$

$$M = \frac{\cos 10° - \sqrt{3}\operatorname{sen}10°}{\operatorname{sen}10°\cos 10°}$$

Reducimos el numerador usando las identidades de ángulo compuesto.

$$M = \frac{2\left(\frac{1}{2}\cos 10° - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}10°\right)}{\operatorname{sen}10°\cos 10°}$$

$$M = \frac{2(\operatorname{sen}30°\cos 10° - \cos 30°\operatorname{sen}10°)}{\operatorname{sen}10°\cos 10°} = \frac{2\operatorname{sen}(30° - 10°)}{\operatorname{sen}10°\cos 10°}$$

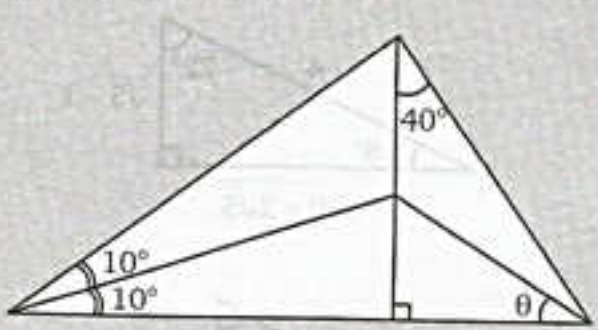
$$M = \frac{2\operatorname{sen}20°}{\operatorname{sen}10°\cos 10°}$$

Usando identidad del ángulo doble en el numerador:

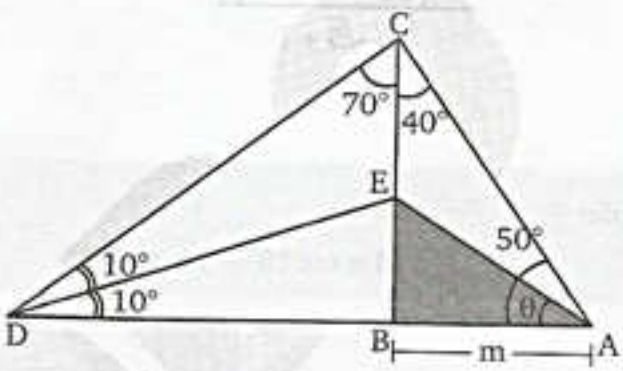
$$M = \frac{2(2\operatorname{sen}10°\cos 10°)}{\operatorname{sen}10°\cos 10°}$$

$$\therefore \quad \mathbf{M = 4}$$

**PROBLEMA 14** Del gráfico, determine el valor de "θ"




**Resolución:**




Sea: BA = m

Aplicando resolución de triángulo rectángulo

$\triangle_{ABC}$: $BC = m \cdot \tan 50°$

$\triangle_{CBD}$: $BD = BC \cdot \tan 70° = m \cdot \tan 50° \cdot \tan 70°$

$\triangle_{DBE}$: $BE = BD \cdot \tan 10° = m \cdot \tan 50° \cdot \tan 70° \cdot \tan 10°$

$\triangle_{ABE}$: $\tan\theta = \dfrac{BE}{BA} \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{\cancel{m} \cdot \tan 50° \cdot \tan 70° \cdot \tan 10°}{\cancel{m}}$

Así tenemos: $\tan\theta = \tan 10° \cdot \tan 50° \cdot \tan 70°$

Dando forma: $\tan\theta = \tan 10° \cdot \tan(60° - 10°) \cdot \tan(60° + 10°)$ ..... (*)

Usando la identidad:

$$\tan 3x = \tan x \cdot \tan(60° - x) \tan(60° + x)$$

Para $x = 10°$ en (*) tenemos:

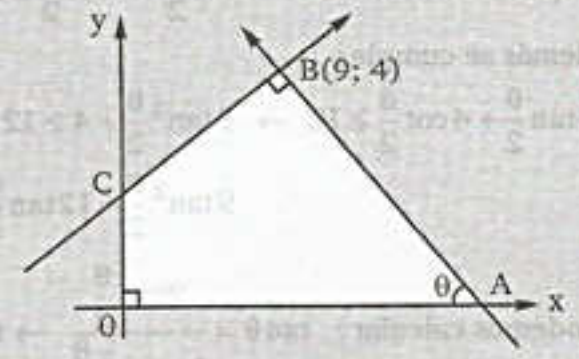
$$\tan\theta = \tan 3 \times 10°$$

$$\tan\theta = \tan 30°$$

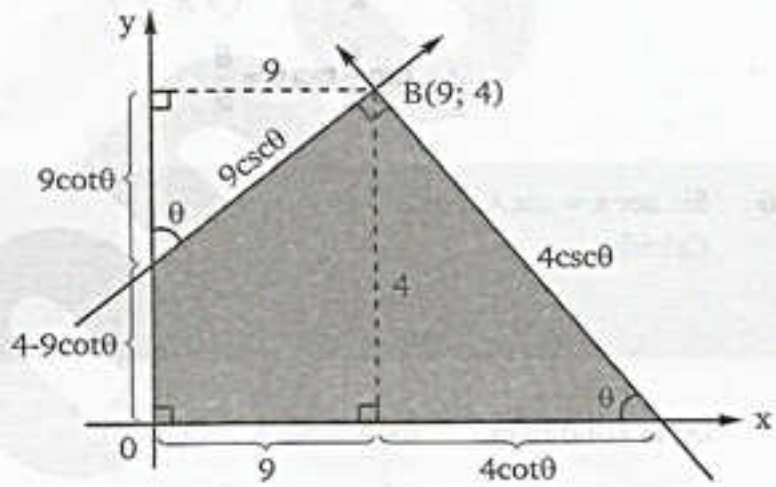
$$\therefore \quad \theta = 30°$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 15** Del gráfico, calcule: $\tan\frac{\theta}{2}\cdot\tan\theta$ ; si el perímetro del cuadrilátero OABC es mínimo.




**Resolución:** De la figura; trazar del punto "B" hacia los ejes coordenados perpendiculares.




Se observa que el perímetro es:

$$P = 9\csc\theta + 4\csc\theta + 9 + 4\cot\theta + 4 - 9\cot\theta$$

$$P = 13\csc\theta - 5\cot\theta + 13 \quad \text{.....(1)}$$

**Recordar:**

$$\left.\begin{array}{l}\csc\theta + \cot\theta = \cot\frac{\theta}{2}\\ \csc\theta - \cot\theta = \tan\frac{\theta}{2}\end{array}\right\} \begin{array}{l}\csc\theta = \frac{1}{2}\left(\cot\frac{\theta}{2} + \tan\frac{\theta}{2}\right)\\ \cot\theta = \frac{1}{2}\left(\cot\frac{\theta}{2} - \tan\frac{\theta}{2}\right)\end{array}$$

Reemplazando en (1): $P = 13\left[\frac{1}{2}\left(\cot\frac{\theta}{2} + \tan\frac{\theta}{2}\right)\right] - 5\left[\frac{1}{2}\left(\cot\frac{\theta}{2} - \tan\frac{\theta}{2}\right)\right] + 13$

Operando: $P = 9\tan\frac{\theta}{2} + 4\cot\frac{\theta}{2} + 13$

Para obtener valores mínimos recordar:

Media Aritmética ≥ Media Geométrica

Para a y b tenemos: $a+b \geq 2\sqrt{ab}$

Para que P sea mínimo: $9\tan\frac{\theta}{2}+4\cot\frac{\theta}{2} \geq 2\sqrt{\left(9\tan\frac{\theta}{2}\right)\left(4\cot\frac{\theta}{2}\right)}$

Y además se cumple:

1° $9\tan\frac{\theta}{2}+4\cot\frac{\theta}{2} \geq 12 \rightarrow 9\tan^2\frac{\theta}{2}+4 \geq 12\tan\frac{\theta}{2}$

$$9\tan^2\frac{\theta}{2}-12\tan\frac{\theta}{2}+4 \geq 0$$

2° Podemos calcular: $\tan\theta=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}} \rightarrow \tan\theta=\dfrac{2\left(\frac{2}{3}\right)}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\dfrac{12}{5}$

Piden: $\tan\frac{\theta}{2}\tan\theta=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{12}{5}\right)$

$$\therefore \quad \boxed{\tan\frac{\theta}{2}\tan\theta=\frac{8}{5}}$$

**PROBLEMA 16** Si: $\sec x = \cot A \cdot \cot B$

Calcule:

$$\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

**Resolución:** De la condición: $\sec x = \cot A \cdot \cot B$

$$\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\tan A \cdot \tan B}$$

$$\cos x = \tan A \cdot \tan B \quad \ldots\ldots (*)$$

Piden: $\tan^2 x=\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ ..... Por arco mitad

Usando (*): $\tan^2 x=\dfrac{1-\tan A\tan B}{1+\tan A\tan B}$

Pasando a senos y cosenos:

$$\tan^2 x=\frac{1-\frac{\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B}{\cos A\cos B}}{1+\frac{\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B}{\cos A\cos B}}=\frac{\frac{\cos A\cos B-\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B}{\cancel{\cos A\cos B}}}{\frac{\cos A\cos B+\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B}{\cancel{\cos A\cos B}}}$$

$$\tan^2 x=\frac{\frac{\cos(A+B)}{\cos A\cos B}}{\frac{\cos(A-B)}{\cos A\cos B}}$$

$$\therefore \quad \boxed{\tan^2 x=\frac{\cos(A+B)}{\cos(A-B)}}$$

team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 17** Reducir:

$$P=\frac{2\cos 2^\circ-1}{\operatorname{sen}4^\circ}+\frac{2\cos 4^\circ-1}{\operatorname{sen}8^\circ}+\frac{2\cos 8^\circ-1}{\operatorname{sen}16^\circ}+\ldots\ldots \text{ (n términos)}$$

**Resolución:** Le damos forma conveniente al 1.° término

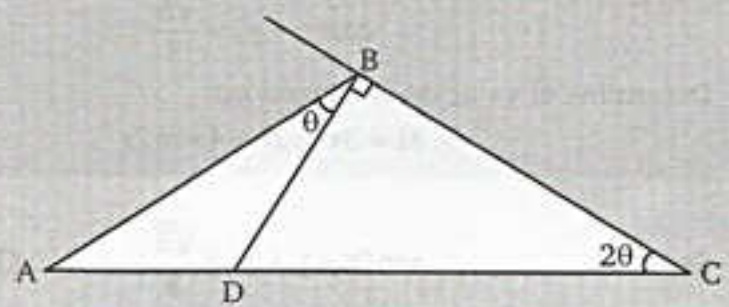
$$t_1=\frac{2\cos 2^\circ-1}{\operatorname{sen}4}=\frac{2\cos 2^\circ}{\operatorname{sen}4^\circ}-\frac{1}{\operatorname{sen}4^\circ}$$

$$t_1=\frac{2\cos 2^\circ}{2\operatorname{sen}2^\circ\cos 2^\circ}-\frac{1}{\operatorname{sen}4^\circ}=\frac{1}{\operatorname{sen}2^\circ}-\frac{1}{\operatorname{sen}4^\circ}$$

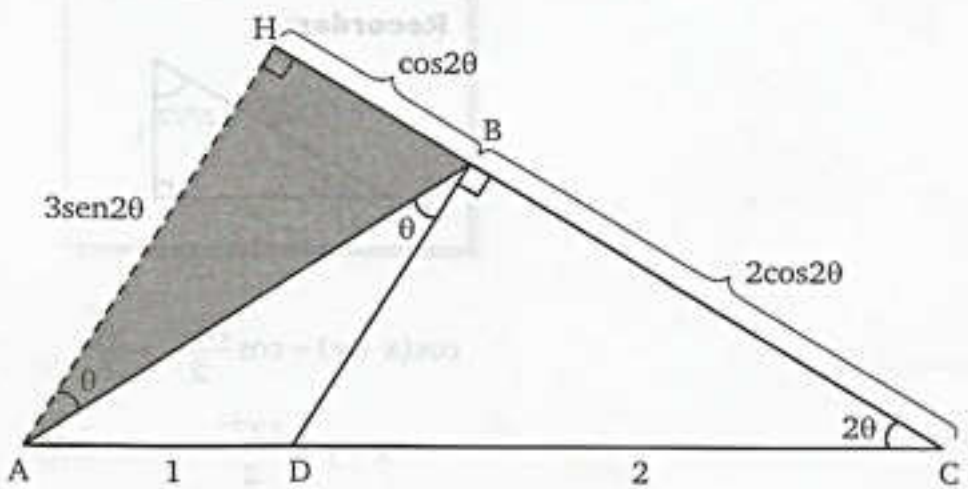
$$\left.\begin{aligned} t_1&=\csc 2^\circ-\csc 4^\circ\\ t_2&=\csc 4^\circ-\csc 8^\circ\\ t_3&=\csc 8^\circ-\csc 16^\circ\\ &\vdots\\ t_n&=\csc(2^n)^\circ-\csc(2^{n+1})^\circ \end{aligned}\right\}\ \text{Sumandom.a.m.}$$

$$\therefore\quad \boxed{P=\csc 2^\circ-\csc(2^{n+1})^\circ}$$

**PROBLEMA 18** Del gráfico calcule tanθ, si AD = 1 y DC = 2




**Resolución:** Del punto "A" trazamos una perpendicular a la prolongación de BC.



Del $\triangle AHB$ se observa :

$$\tan\theta = \frac{\cos 2\theta}{3\operatorname{sen} 2\theta}$$

$$3\tan\theta = \frac{1}{\tan 2\theta}$$

$$3\tan\theta = \frac{1}{\left(\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\right)}$$

**Recordar:**

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

Desarrollando : $6\tan^2\theta = 1 - \tan^2\theta$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{\sqrt{7}}{7}$$

**PROBLEMA 19** Sabiendo que : $\operatorname{sen}(x+y+z) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$$\cos(x+y) = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

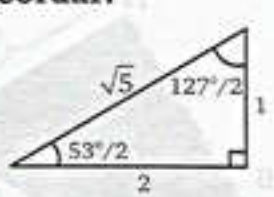
Determine el valor de la expresión:

$$M = 3\cos 2z + 4\operatorname{sen} 2z$$

**Resolución:** Sea : $\operatorname{sen}(x+y+z) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ .....(1)

$$\cos(x+y) = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \text{.....(2)}$$

**Recordar:**




$$\cos(x+y) = \cos\frac{127^\circ}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$x + y = \frac{127^\circ}{2} \quad \text{.....(3)}$$

team CALAPENSHKO



Reemplazando (3) en (1):

$$\operatorname{sen}\left(\frac{127^\circ}{2}+z\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

**Recordar:**

$$\cos 2\theta = 1-2\operatorname{sen}^2\theta$$

Reemplazando: $$\cos\left[2\left(\frac{127^\circ}{2}+z\right)\right]=1-2\operatorname{sen}^2\left(\frac{127^\circ}{2}+z\right)$$

$$\cos[127^\circ+2z]=1-2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$\cos(127^\circ+2z)=\frac{1}{3}$$

Operando : $$\underbrace{\cos 127^\circ}\cos 2z-\operatorname{sen}127^\circ\operatorname{sen}2z=\frac{1}{3}$$

$$-\cos 53^\circ\cos 2z-\operatorname{sen}53^\circ\operatorname{sen}2z=\frac{1}{3}$$

$$-\frac{3}{5}\cos 2z-\frac{4}{5}\operatorname{sen}2z=\frac{1}{3}$$

Resolviendo y depejando:

$$\underbrace{3\cos 2z+4\operatorname{sen}2z}_{M}=-\frac{5}{3}$$

$$\therefore \quad M=-\frac{5}{3}$$

twitter.com/calapenshko

**PROBLEMA 20** Determine el valor de "x" en:

$$\frac{1-\cos 9\theta}{1-\cos 3\theta}=(1-3x+x^3)^2$$

**Resolución:** Usando Identidad de arco triple:

$$\cos 3x = 4\cos^3 x-3\cos x$$

Entonces : $$\cos 9\theta = 4\cos^3 3\theta-3\cos 3\theta$$

$$\frac{1-\cos 9\theta}{1-\cos 3\theta}=\frac{1-(4\cos^3 3\theta-3\cos 3\theta)}{1-\cos 3\theta}$$

$$\frac{1-\cos 9\theta}{1-\cos 3\theta}=\frac{1+3\cos 3\theta-4\cos^3 3\theta}{1-\cos 3\theta}$$

Factorizando el numerador del 2° miembro:

$$\frac{1-\cos 9\theta}{1-\cos 3\theta}=\frac{(1-\cos 3\theta)(1+4\cos 3\theta+4\cos^2 3\theta)}{(1-\cos 3\theta)}$$

$$\frac{1-\cos 9\theta}{1-\cos 3\theta}=1+4\cos 3\theta+4\cos^2 3\theta$$

$$\frac{1-\cos 9\theta}{1-\cos 3\theta}=(1+\underbrace{2\cos 3\theta}_{\llcorner\,\urcorner})^2$$

$$\frac{1-\cos 9\theta}{1-\cos 3\theta}=(1+2(\overbrace{4\cos^3\theta-3\cos\theta}))^2$$

$$\frac{1-\cos 9\theta}{1-\cos 3\theta}=(1-3(2\cos\theta)-(2\cos\theta)^{3\,3})\quad\text{.....(1)}$$

$$\frac{1-\cos 9\theta}{1-\cos 3\theta}=(1-3x+x^{3\,3})\quad\text{.....(2)}$$

Identificando de (1) y (2) se tiene:

$$\therefore\quad \mathbf{x=2\cos\theta}$$

**PROBLEMA 21** Transforme a producto:

$$J=16\,\text{sen}^7\theta-24\,\text{sen}^5\theta+8\,\text{sen}^3\theta$$

**Resolución:**

Factorizando : $J=8\,\text{sen}^3\theta[2\,\text{sen}^4\theta-3\,\text{sen}^2\theta+1]$

$J=8\,\text{sen}^3\theta[\text{sen}^2\theta-1][2\,\text{sen}^2\theta-1]$

Decadafactor(factorizandoelsigno):

$$J=8\,\text{sen}^3\theta\underbrace{(1-\text{sen}^2\theta)}\underbrace{(1-2\,\text{sen}^2\theta)}$$

$J=8\,\text{sen}^3\theta\ .\ \cos^2\theta\ .\ \cos 2\theta$

Ordenado : $J=(2\,\text{sen}\theta\,.\,\cos\theta)^2.\,2\,\text{sen}\theta\,.\,\cos 2\theta$

$J=\text{sen}^2 2\theta\,.\,2\,\text{sen}\theta\,.\,\cos 2\theta$

$$J=\underbrace{2\,\text{sen}\,2\theta\,.\,\cos 2\theta}_{\text{sen}4\theta}\,.\,\text{sen}\,2\theta\,.\,\text{sen}\,\theta$$

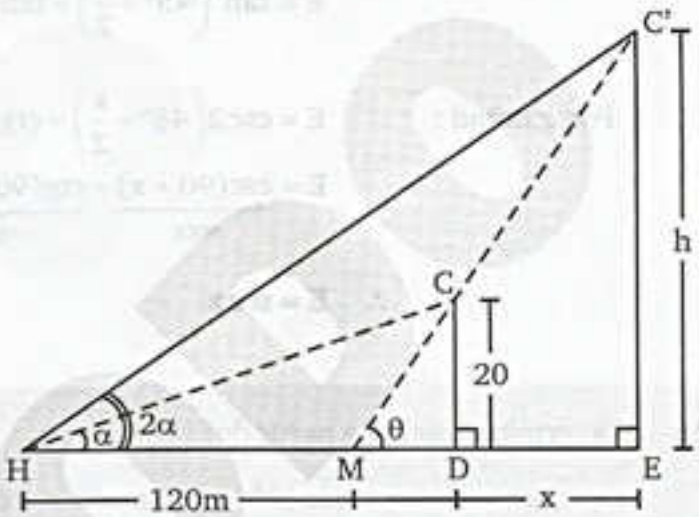
$$\therefore\ \mathbf{J=\text{sen}\,\theta\,.\,\text{sen}\,2\theta\,.\,\text{sen}\,4\theta}$$

team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 22** Un hombre se encuentra a 120 m de distancia de un niño, que se encuentra volando su cometa, de tal forma, que la cuerda que sostiene a la cometa se halla completamente tensa y forma un ángulo con la horizontal cuyo valor es θ. Cuando la cometa se hallaba a 20 m de altura, el hombre observa con un ángulo de valor "α", respecto a la horizontal. ¿A qué altura se encontrará cuando sea observado por dicho hombre con un ángulo que mide "2α"?
NOTA: tomar $\tan\theta = 1/3$

**Resolución:** En el $\triangle CMD$: $\tan\theta = \frac{20}{MD} \Rightarrow MD = 20\cot\theta = 60m$




En el $\triangle C'ME$: $\tan\theta = \frac{h}{60+x}$

$$\rightarrow \frac{1}{3} = \frac{h}{60+x} \rightarrow 60 + x = 3h \quad .....(1)$$

En el $\triangle HC'E$: $\tan 2\alpha = \frac{h}{120+60+x}$

$$\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{h}{180+x} \quad .....(2)$$

En el $\triangle HCD$: $\tan\alpha = \frac{20}{120+60} = \frac{1}{9}$

En(2): $$\frac{9}{40} = \frac{h}{120+60+x} = \frac{h}{120+3h}$$

$$\therefore \quad \mathbf{h = 83\ m}$$

**PROBLEMA 23** Reduzca la expresión:

$$E=\frac{\cos\frac{x}{2}+\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\operatorname{sen}\frac{x}{2}}-\frac{\operatorname{sen}2x}{1+\cos 2x}$$

**Resolución:**

$$E=\frac{\sqrt{2}\,\operatorname{sen}\left(45^\circ+\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2}\cos\left(45^\circ+\frac{x}{2}\right)}-\frac{2\operatorname{sen}x\cos x}{2\cos^2 x}$$

$$E=\tan\left(45^\circ+\frac{x}{2}\right)-\tan x$$

Por ∠mitad :

$$E=\csc 2\left(45^\circ+\frac{x}{2}\right)-\operatorname{ctg}2\left(45^\circ+\frac{x}{2}\right)-\operatorname{tg}x$$

$$E=\underbrace{\csc(90+x)}_{\sec x}-\underbrace{\operatorname{ctg}(90^\circ+x)}_{-\operatorname{tg}x}-\operatorname{tg}x$$

$$\therefore\ \mathbf{E=\sec x}$$

**PROBLEMA 24** Determine "cos2x" a partir de:

$$\tan(30^\circ+x)+\tan(30^\circ-x)=\frac{2\sqrt{3}}{5-4\cos 2x}$$

**Resolución:**

$$\underbrace{\tan(30^\circ+x)+\tan(30^\circ-x)}=\frac{2\sqrt{3}}{5-4\cos 2x}$$

$$\frac{\operatorname{sen}[30^\circ+x+30^\circ-x]}{\underbrace{\cos(30^\circ+x)}_{\operatorname{sen}(60^\circ-x)}\underbrace{(\cos(30^\circ-x)}_{\operatorname{sen}(60^\circ+x)}}=\frac{2\sqrt{3}}{5-4\cos 2x}$$

$$\frac{\cancel{4\operatorname{sen}x}\operatorname{sen}60^\circ}{\underbrace{\cancel{4\operatorname{sen}x}\operatorname{sen}(60^\circ-x)\operatorname{sen}(60^\circ+x)}_{\operatorname{sen}3x\ \ldots\ldots\text{propiedad}}}=\frac{2\sqrt{3}}{5-4\cos 2x}$$

$$\frac{4\operatorname{sen}x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\operatorname{sen}3x}=\frac{2\sqrt{3}}{5-4\cos 2x}$$

$$\frac{\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}x}=5-4\cos 2x$$

Luego por fórmula especial: $2\cos 2x+1=5-4\cos 2x$

$$\therefore\ \mathbf{\cos 2x=\frac{2}{3}}$$

team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 25** Si la expresión: $\cos^8 x - \text{sen}^8 x$ es equivalente a un binomio de la forma:

$$A\cos Bx + C\cos 3Bx$$

Evaluar: $K = B(A-2C)\ ;\ B > 0$

**Resolución:**

Del dato : $\cos^8 x - \text{sen}^8 x = A\cos Bx + C\cos 3Bx$

Tenemos por diferencia de cuadrados:

$$\cos^8 x - \text{sen}^8 x = \underbrace{(\cos^4 x + \text{sen}^4 x)}\underbrace{(\cos^4 x - \text{sen}^4 x)}$$

$$\cos^8 x - \text{sen}^8 x = (\cos^4 x + \text{sen}^4 x)(\cos^2 x - \text{sen}^2 x)\underbrace{(\cos^2 x + \text{sen}^2 x)}_{1}$$

$$\cos^8 x - \text{sen}^8 x = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x\right)(\cos 2x)$$

$$\cos^8 x - \text{sen}^8 x = \frac{3}{4}\cos 2x + \frac{1}{8}\underbrace{(2\cos 4x\cos 2x)}$$

$$\cos^8 x - \text{sen}^8 x = \frac{3}{4}\cos 2x + \frac{1}{8}[\cos 6x + \cos 2x]$$

Desarrollando:

Luego : $A\cos Bx + C\cos(3Bx) = \frac{7}{8}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 6x$

Comparando las expresiones:

$$A = \frac{7}{8};\ B = 2\ \text{ y }\ C = \frac{1}{8}$$

Se pide : $K = B(A - 2C)$

$$\therefore\ K = \frac{5}{4}$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS

**1.** Simplifique:

$$W = \frac{1+\text{sen}2x+\cos 2x}{1+\text{sen}2x-\cos 2x}$$

A) $\tan x$ B) $-\tan x$ C) $\cot x$
D) $-\cot x$ E) $-1$

**2.** De las siguientes alternativas, ¿cuál no representa una identidad?

A) $\cos 2x = (1+\sqrt{2}\,\text{sen}\,x)(1-\sqrt{2}\,\text{sen}x)$

B) $1+\text{sen}\,x = \left(\text{sen}\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2$

C) $\text{sen}\,4x = 4\text{sen}\,x\cos x\cos 2x$

D) $\sec 2x + 1 = \frac{\tan 2x}{\tan x}$

E) $\cos\frac{x}{4} = \cos^2\frac{x}{2} - \text{sen}^2\frac{x}{2}$

**3.** Si se cumple:

$$\tan^2 x + \tan x - 1 = 0$$

Halle:

$$E = \text{sen}\,4x + \cos 4x$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

**4.** Dos roedores ubicados a lados opuestos de un poste, ven lo alto de este con ángulos de elevación de de valores "$\alpha$" y "$2\alpha$". Si las visuales anteriores miden 15 m y 10 m respectivamente hallar: "$\cos\alpha$"

A) 0,25 B) 0,5 C) 0,75
D) 0,125 E) 0,375

**5.** Calcule la diferencia entre el máximo y mínimo valor de:

$$J = \sqrt{2}\,\text{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos x$$

A) 0,5 B) 1 C) $\sqrt{2}$
D) 2 E) $2\sqrt{2}$

**6.** Si la siguiente ecuación:

$$m\,\text{sen}\,2x + n\cos 2x + p = 0$$

tiene como raíces a "$x_1$" y "$x_2$"
Halle el equivalente de "$\tan(x_1 + x_2)$"

A) $\frac{m+n}{p}$ B) $\frac{m-n}{p}$ C) $\frac{p}{m+n}$
D) $\frac{m}{n}$ E) $\frac{n}{m}$

**7.** Siendo:

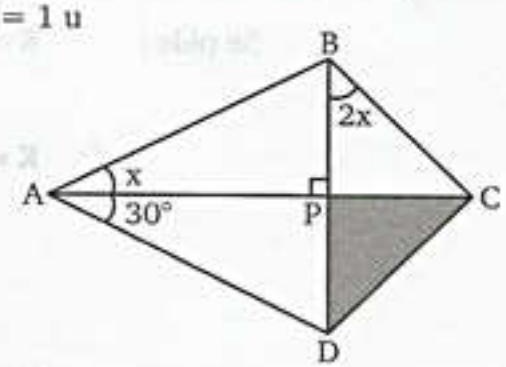
$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\sqrt{2}-1}$$

Calcule el valor de:

$$M = \frac{\text{vers}\,2x}{\text{vers}\,x} + \frac{\text{cov}\,2x}{\text{sen}\,x-\cos x}$$

A) $2\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{2}$ C) $4+\sqrt{2}$
D) $4-\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2}$

**8.** Determine el valor de "x", si el área de la región sombreada es $\sqrt{3}/2$ u$^2$, además: PB = 1 u




A) 42° B) 40° C) 36°
D) 30° E) 25°

team CALAPENSHKO



**9.** Si:

$$9\sec^2 x - 16 = 0 \ \wedge\ 180° < x < 270°$$

Calcule $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$

A) $\sqrt{\frac{7}{16}}$ B) $\sqrt{\frac{7}{8}}$ C) $\sqrt{\frac{7}{15}}$

D) $\sqrt{\frac{7}{10}}$ E) $\sqrt{\frac{7}{12}}$

**10.** Siendo "θ" el valor un arco en posición normal, positivo y menor de una vuelta que pertenece al III C, el cual cumple: $\cos\theta = -0{,}3$ Hallar:

$$F = 2\sqrt{5}\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sqrt{7}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

A) 1 B) 0 C) $\sqrt{2}$

D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{13}$

**11.** Calcule el valor de:

$$M = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)\sec\left(\frac{\pi}{24}\right)$$

A) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$

B) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$

C) $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

D) $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

E) $\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

**12.** Si:

$$\csc\theta - \cot\theta = \sqrt{3}$$

Calcule:

$$N = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

A) $\sqrt{3}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

**13.** Reduzca la expresión:

$$M = \frac{(1+\cos x)(1+\cos 2x)}{\operatorname{sen}2x.\cos x}$$

A) $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ B) $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ C) $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

D) $\cot\left(\frac{x}{2}\right)$ E) $\sec\left(\frac{x}{2}\right)$

**14.** Si: $\csc x = 1{,}25$

Calcule:

$$J = \frac{\tan^3\left(\frac{x}{2}\right) + \cot^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + \cot\left(\frac{x}{2}\right)}$$

A) 3,50 B) 3,25 C) 5,25

D) 1,75 E) 4,50

**15.** Reduzca:

$$R = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) - \tan x}{\sec x - \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}$$

A) sen x B) cos x C) tan x

D) cot x E) csc x

**16.** Si:

$(1 + n\cos x)(1 - n\cos y) = (1 + n)(1 - n)$

Halle el equivalente de:

$$J = \tan^2\left(\frac{x}{2}\right).\cot^2\left(\frac{y}{2}\right)$$

A) $\frac{1+n}{1-n}$ B) $\frac{1-n}{1+n}$ C) $\frac{1+n^2}{1-n^2}$

D) $\frac{1-n^2}{1+n^2}$ E) $\frac{1}{n}$

**17.** Al reducir la expresión:

$$M = \frac{\cos 3x + \cos x}{\sec x} + \frac{\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x}{\csc x}$$

se obtiene:

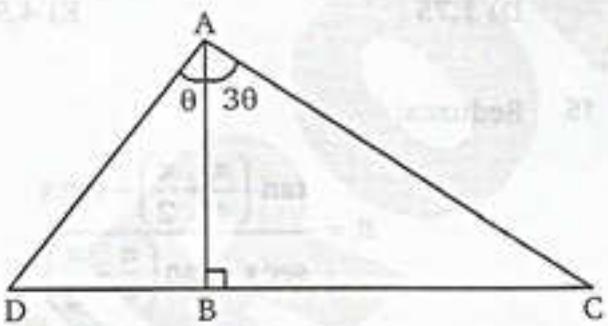
A) cos x B) sen x C) 2sen x
D) 2cos 2x E) 2sen 2x

**18.** Calcule el mínimo valor de:

$$f(x) = \operatorname{sen} x(1 - \tan 53° \operatorname{sen}^2 x)$$

A) $-\frac{1}{6}$ B) $-\frac{1}{5}$ C) $-\frac{1}{4}$
D) $-\frac{1}{3}$ E) $-\frac{1}{2}$

**19.** De la figura mostrada; si: AC = 3AD




Halle el valor de "cos 2θ":

A) 0,333 B) 0,444 C) 0,555
D) 0,666 E) 0,777

**20.** Si se cumple:

$$\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x = \frac{2}{3}$$

Calcule el valor de sen 3x:

A) $-\frac{15}{14}$ B) $-\frac{9}{14}$ C) $-\frac{12}{13}$
D) $-\frac{23}{27}$ E) $-\frac{19}{25}$

**21.** Dados los conjuntos:

$$P = \left\{ x \,/\, x = \frac{\operatorname{sen} 3\theta}{\operatorname{sen}\theta} \right\}$$

$$Q = \left\{ x \,/\, x = \frac{\cos 3\theta}{\cos\theta} \right\}$$

Halle: $P \cap Q$

A) $\langle -3; 3\rangle$ B) $\langle -1; 1\rangle$ C) $[-3; 3]$
D) $[-1; 1]$ E) $[-2; 2]$

**22.** Calcule:

$$M = \text{vers } 40° \,.\, \text{vers } 80° \,.\, \text{vers } 160°$$

A) 0,125 B) 0,25 C) 0,375
D) 0,625 E) 0,75

**23.** Si para un ángulo agudo que mide "α" se cumple:

$$\tan\alpha = \sqrt{3}\tan 10° \tan 50°$$

Calcule:

$$L = \frac{\operatorname{sen}(\alpha - 2°) + \operatorname{sen}(\alpha + 10°)}{\cos(\alpha + 16°)}$$

A) 1 B) 2 C) 3/2
D) 1/2 E) 2/3

**24.** Determine el equivalente de:

$$P = \cos x \,.\, \cos 2x \,.\, \cos 4x \,.\, \cos 8x \ldots \cos 2^{n-1} x$$

A) $\frac{\operatorname{sen} 2^n x}{\operatorname{sen} x}$ B) $\frac{\operatorname{sen} 2^n x}{\cos x}$
C) $\frac{\operatorname{sen} 2^n x}{2\operatorname{sen} x}$
D) $\frac{2\operatorname{sen} 2^n x}{\operatorname{sen} x}$ E) $\frac{\operatorname{sen} 2^n x}{2^n \operatorname{sen} x}$

team CALAPENSHKO


**25.** Calcule:

$$M = \frac{\sqrt[3]{6\,\text{sen}10° - 1}}{\text{sen}10°}$$

A) 2 B) 4 C) 1
D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{2}$

**26.** De la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=1}^{3}\left[\text{sen}^{2k}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\text{sen}^{2k}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right] = p + q\,\text{vers}\,rx$$

considerando $r > 0$

Indicar: $p \times \frac{r}{q}$

A) 8,6 B) 9,4 C) 11,2
D) 12,1 E) 15,7

**27.** Siendo "$\theta$" el valor de un ángulo agudo, resolver:

$$x^2 - 2x\cos\theta + 1 = 0$$

A) $\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ B) $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ C) $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$
D) $\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$ E) Hay dos respuestas

**28.** Si la siguiente expresión:

$$E = \frac{1 - \dfrac{2\tan x}{\sec x - \tan x}}{1 + \dfrac{2\tan x}{\sec x + \tan x}}$$

Se convierte a otra de la forma: $\tan^n\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$

Calcule el valor de "n".

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

**29.** Halle el valor de "x" en:

$$\cot\frac{\pi}{10} = x \cdot \cot\frac{\pi}{5}$$

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$
D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{7}$

**30.** Desde un punto en tierra se ve la parte más alta de un edificio con un ángulo de elevación de valor "$3\alpha$", luego se observan otros dos puntos de dicho edificio a una altura "a" y "b" ($a < b$) con ángulos de elevación que miden "$\alpha$" y "$2\alpha$" respectivamente.
Hallar la altura del edificio en términos de "a" y "b"

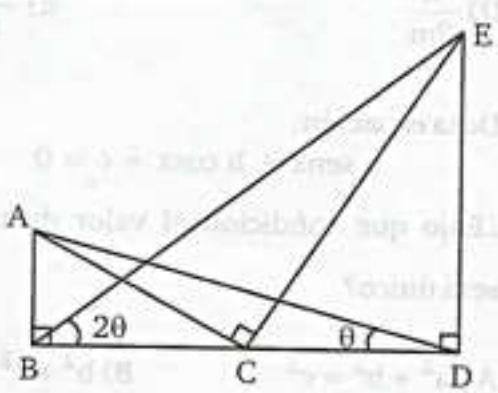
A) $\frac{a(a+b)}{3a-b}$ B) $\frac{b(a+b)}{3a-b}$
C) $\frac{(3a-b)b}{a+b}$
D) $\frac{(3a-b)a}{a+b}$ E) $\frac{(2a+b)a}{a+b}$

**31.** Simplifique:

$$L = (\cos\theta + \text{sen}\theta)^4 + (\cos\theta - \text{sen}\theta)^4$$

A) $1 - \cos 4\theta$ B) $2 - \cos 4\theta$
C) $3 - \cos 4\theta$
D) $4 - 4\cos 4\theta$ E) $5 - \cos 4\theta$

**32.** Del gráfico mostrado, halle la tangente del ángulo ECD, si BC = CD.



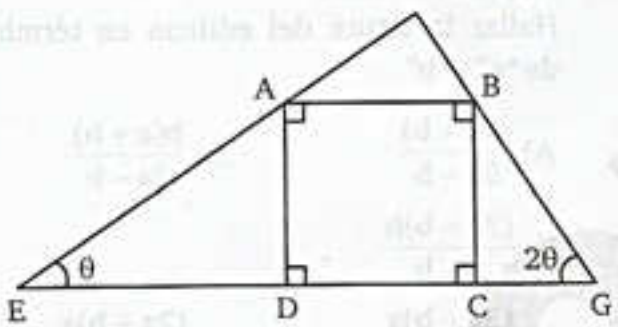

A) 1/2 B) 3/2 C) 5/7
D) 7/2 E) 9/2

**33.** Indicar la extensión de la expresión:

$$W=\frac{1+\operatorname{sen}^6 x}{1+\operatorname{sen}^2 x}+\frac{1+\cos^6 x}{1+\cos^2 x}$$

A) $0\le W\le 1$ B) $1\le W\le 2$
C) $\frac{1}{2}\le W\le 3$
D) $0\le W\le 2$ E) $\frac{3}{2}\le W\le 2$

**34.** Del gráfico, hallar la "tanθ"
Si: EG = 3(AB), además ABCD es un cuadrado.




A) $\sqrt{10}-2$ B) $2\sqrt{2}-2$ C) $\sqrt{5}-2$
D) $\sqrt{7}-2$ E) $3\sqrt{2}-2$

**35.** Sabiendo que: $n+m\operatorname{sen}\theta=m+n\cos\theta$
Hallar el equivalente de:

$$H=\csc^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-2\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

A) $\frac{m-n}{m+n}$ B) $\frac{m+n}{m-n}$ C) $\frac{2n}{m}$
D) $\frac{n}{2m}$ E) $\frac{2m}{n}$

**36.** De la ecuación:

$$a\operatorname{sen}x+b\cos x+c=0$$

¿Bajo que condición el valor de $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ será único?

A) $a^2+b^2=c^2$ B) $b^2+c^2=a^2$
C) $a^2+c^2=b^2$
D) $a^2+b^2=ac$ E) $a^2+b^2=2c$

**37.** Hallar el intervalo de la expresión:

$$E=\frac{\operatorname{cov}x}{\operatorname{vers}x}\ ;\ \forall x\in\left\langle\frac{\pi}{2};\frac{4\pi}{3}\right\rangle$$

A) $\left\langle 0;\frac{2+\sqrt{3}}{3}\right\rangle$ B) $\left\langle 0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right\rangle$ C) $\left\langle 0;\frac{\sqrt{3}+1}{3}\right\rangle$
D) $\left\langle 0;\frac{\sqrt{3}-1}{3}\right\rangle$ E) $\left\langle 0;\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right\rangle$

**38.** De la siguiente identidad:

$$\left[\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}+1\right]^2+\left[\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}-1\right]^2=$$
$$=a\,.\,\csc(bx)+c$$

Hallar el valor de: $\frac{a+c}{b}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

**39.** Reducir:

$$L=\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)-\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\right]\left[\operatorname{sen}x+\tan x\right]$$

A) −1 B) 1 C) $\tan x$
D) $\cot x$ E) 0

**40.** Si: $x\in\left\langle\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{6}\right]$

Hallar el máximo valor de:

$$E=\operatorname{sen}^2 x\,.\,\cot\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x$$

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) 1

team CALAPENSHKO


**41.** Si: $\csc 2x - 2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} + \cot 2x = 0$

Hallar:

$$M = \csc 2x - \operatorname{sen} x - \cot 2x$$

A) $-1$ B) $1$ C) $-\sqrt{2}$

D) $\sqrt{2}$ E) $2$

**42.** Hallar:

$$M=[\tan\theta+2\tan 2\theta+4\tan 4\theta+...+64\tan 64\theta]\tan\theta$$

Para: $\theta = \frac{\pi}{129}$

A) $8$ B) $16$ C) $32$

D) $65$ E) $129$

**43.** Una persona se encuentra a 130 m de la base de un edificio, observa la azotea del mismo con un ángulo de elevación que mide "$\theta$", la persona se acerca 100 m hacia el edificio y observa nuevamente la azotea con un ángulo de elevación de valor "$30$". Hallar: "$\cos 2\theta$"

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{4}{5}$

D) $\frac{6}{5}$ E) $\frac{7}{5}$

**44.** Siendo "x" el valor de un ángulo agudo, hallar los valores de la expresión:

$$E = \frac{1 + 2\cos x + \cos 2x + \cos 3x}{\cos x(\cos x - \operatorname{sen} 18°)}$$

A) $\langle 1; 2\sqrt{5}\rangle$

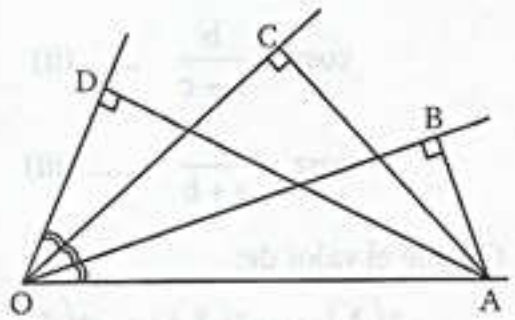
B) $\langle -\sqrt{5}; \sqrt{5}\rangle$

C) $\langle 1; \sqrt{5}\rangle$

D) $\left\langle \frac{\sqrt{5}+1}{4}; \frac{5+\sqrt{5}}{4}\right\rangle$

E) $\langle 0; \sqrt{5}\rangle$

**45.** De la figura, hallar "AC", si AB = a; AD = b.




A) $\sqrt{a(b-a)}$ B) $\sqrt{b(b-a)}$

C) $\sqrt{a(a+b)}$

D) $\sqrt{b(a+b)}$ E) $\sqrt{a+b}$

**46.** La suma de los "n" primeros términos de:

$$\int = \cos x.\csc 3x + \cos 3x.\csc 9x + \\ + \cos 9x.\csc 27x....$$

Se reduce a:

A) $\frac{1}{2}(\cot x - \cot 3^n x)$

B) $\frac{1}{2}(\cot^n x - \cot 3^n x)$

C) $\frac{1}{2}(\cot^n x - \cot 3x)$

D) $\frac{1}{2}(\cot x - \cot 3x)$

E) $\frac{1}{2^n}(\cot x - \cot 3x)$

**47.** Si:

$$P(x) = (1-\tan^2 x)(1-\tan^2 2x)(1-\tan^2 4x) \\ (1-\tan^2 8x) \text{ ... "n" factores}$$

Calcule: $P\left(\frac{\pi}{2^n+1}\right)$

A) $2^n$ B) $-2^n$ C) $2^{2n}$

D) $2^{-n}$ E) $-2^{2n}$

team CALAPENSHKO



**48.** Si:
$$\cos x = \frac{a}{b+c} \quad \text{..... (i)}$$
$$\cos y = \frac{b}{a+c} \quad \text{..... (ii)}$$
$$\cos z = \frac{c}{a+b} \quad \text{..... (iii)}$$

Calcule el valor de:

$$\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) + \tan^2\left(\frac{y}{2}\right) + \tan^2\left(\frac{z}{2}\right)$$

A) $-1$ B) $0$ C) $1$
D) $-2$ E) $2$

**49.** Luego de demostrar la identidad:

$$\tan x + \tan(x-60°) + \tan(x+60°) = 3\tan 3x$$

Hallar: $E = \tan 20° + \tan 80° + \tan 140°$

A) $\sqrt{3}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $3\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{3}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

**50.** ¿Cuál es el valor de x que verifica:

$$\frac{\operatorname{sen} 5\theta}{\operatorname{sen}\theta} = (x^2+x-1)(x^2-x-1)\,?$$

A) $\operatorname{sen}\theta$ B) $\cos\theta$ C) $\cos 2\theta$
D) $\operatorname{sen} 2\theta$ E) $2\cos\theta$

team CALAPENSHKO

Capítulo 11

# Identidades Para Transformaciones Trigonométricas

**CAPACIDADES**

- Conocer las identidades que permiten transformar sumas o diferencias de senos o cosenos a producto.
- Conocer las identidades que permiten transformar productos de senos y cosenos en sumas o diferencias.
- Conocer las propiedades que permiten la factorización directa de las expresiones trigonométricas para arcos de a forma "$\alpha + \beta + \theta = \pi$"

## UN POCO DE HISTORIA DE LA TRIGONOMETRÍA

Los avances de las Matemáticas no han sido fruto del trabajo de una persona sino de la aportación de muchos matemáticos y de varias civilizaciones. La trigonometría que nosotros estudiamos en un poco tiempo tardó en desarrollarse muchos siglos hasta llegar a su forma actual. Entre los sucesos más importantes tenemos:

En el Siglo X a.C. fue aplicada a los primeros estudios de astronomía, en la realización de calendarios y el cálculo del tiempo, y en la navegación. Los egipcios fueron los que establecieron el sistema sexagesimal, midiendo los ángulos en grados, minutos y segundos.

En el Siglo II a. C; en la India, paralelamente a los avances de la matemática griega, desarrollan un sistema trigonométrico basado en la función seno en vez de cuerdas, la función seno no era concebida como una proporción tal y como la definimos ahora, sino como la longitud del cateto opuesto a un ángulo de un triángulo rectángulo. Así construyeron diversas tablas para la función seno.

FRANCOIS VIETE
FUNDADOR DE
TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

En el siglo VIII los matemáticos árabes continúan los trabajos de las civilizaciones griega e india. Adoptando el concepto de función seno. Tales fueron sus avances que en el siglo X se había completado la función seno y las otras cinco razones trigonométricas: coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente. A ellos se debe también el tomar como radio r=1 en la circunferencia trigonométrica para obtener las razones trigonométricas.

La trigonometría llega a occidente a partir del siglo XII y a través de la cultura árabe.Pero no es hasta el siglo XV cuando se realiza el primer trabajo importante sobre este tema. Fue el matemático alemán Johann Müller (1436-1476), conocido como Regiomontano, el que escribe las primeras obras sobre trigonometría, tan importantes que es considerado como un fundador de esta parte de las matemáticas. Georges Joachim, conocido como Rético (1514-1576), introdujo el concepto moderno de funciones trigonométricas como proporciones en vez de longitudes de ciertas líneas.

En esa misma época, el matemático francés Francois Viete (1540-1603), introduce la trigonometría esférica.

team CALAPENSHKO



## INTRODUCCIÓN

Desde tiempo muy lejanos, existe una necesidad para facilitar la resolución de las ecuaciones polinómicas, entonces surgen diversos procedimientos de transformación de polinomios en factores a las cuales se les denomina factorización, en el cual, se busca expresar, un polinomio de menor grado.

En el curso de trigonometría su análogo son las transformaciones trigonométrica.

Las transformaciones trigonométricas en época anteriores a las calculadoras científicas eran imprescindibles, puesto que para hallar un valor se debía precisamente factorizar la expresión para tomar logaritmos y finalmente utilizar las tablas trigonométricas. En la actualidad este uso ha perdido vigencia, pero aún es importante para facilitar la simplificación de expresión en las que las razones y arcos son diferentes

# IDENTIDADES PARA TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS

## IDENTIDADES PARA TRANSFORMAR SUMAS O DIFERENCIAS A PRODUCTO

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\theta = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\theta = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\theta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha - \cos\theta = -2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)$$

**Ejemplo:** Transforme a producto.

1) $\operatorname{sen}12^\circ + \operatorname{sen}2^\circ$

2) $\operatorname{sen}6x - \operatorname{sen}2x$

3) $\cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7}$

4) $\cos 40^\circ - \cos 50^\circ$

**Resolución:** 1) $\operatorname{sen}12^\circ + \operatorname{sen}2^\circ = 2\operatorname{sen}\left(\frac{12^\circ+2^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{12^\circ-2^\circ}{2}\right) = 2\operatorname{sen}7^\circ\cos 5^\circ$

2) $\operatorname{sen}6x - \operatorname{sen}2x = 2\operatorname{sen}\left(\frac{6x-2x}{2}\right)\cos\left(\frac{6x+2x}{2}\right) = 2\operatorname{sen}2x\cos 4x$

3) $\cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} = 2\cos\left(\frac{\frac{4\pi}{7}+\frac{2\pi}{7}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{4\pi}{7}-\frac{2\pi}{7}}{2}\right) = 2\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}$

4) $\cos 40^\circ - \cos 50^\circ = -2\operatorname{sen}\left(\frac{40^\circ+50^\circ}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{40^\circ-50^\circ}{2}\right) = -2\operatorname{sen}45^\circ\operatorname{sen}-5$

$= 2\operatorname{sen}45^\circ\operatorname{sen}5^\circ$

team CALAPENSHKO


**PROPIEDADES:**

**a)** Si: $A + B + C = 180°$. Se cumple:

(I)

$$\text{sen}A + \text{sen}B + \text{sen}C = 4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2} \quad \text{..... (1)}$$

$$\text{sen}A + \text{sen}B - \text{sen}C = 4\,\text{sen}\frac{A}{2}.\text{sen}\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2} \quad \text{..... (2)}$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 4\,\text{sen}\frac{A}{2}.\text{sen}\frac{B}{2}.\text{sen}\frac{C}{2} + 1 \quad \text{..... (3)}$$

$$\cos A + \cos B - \cos C = 4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\text{sen}\frac{C}{2} - 1 \quad \text{..... (4)}$$

(II)

$$\text{sen}2A + \text{sen}2B + \text{sen}2C = 4\text{sen}A.\text{Sen}B.\text{sen}C \quad \text{..... (5)}$$

$$\text{sen}2A + \text{sen}2B - \text{sen}2C = 4\cos A.\cos B.\text{sen}\,C \quad \text{..... (6)}$$

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -4\cos A.\cos B.\cos C - 1 \quad \text{..... (7)}$$

$$\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C = -4\text{sen}A.\text{sen}B.\cos C + 1 \quad \text{..... (8)}$$

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A.\cos B.\cos C \quad \text{..... (9)}$$

$$\text{sen}^2\frac{A}{2} + \text{sen}^2\frac{B}{2} + \text{sen}^2\frac{C}{2} = 1 - 2\text{sen}\frac{A}{2}.\text{sen}\frac{B}{2}.\text{sen}\frac{C}{2} \quad \text{..... (10)}$$

**DEMOSTRACIÓN a.1** Sea: $M = \underbrace{\text{sen}A + \text{sen}B}_{2\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)} + \text{sen}C$

$$2\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + 2\text{sen}\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} \quad \text{..... (I)}$$

Como: $A + B = 180° - C$

$$\Rightarrow \frac{A+B}{2} = 90° - \frac{C}{2} \wedge \frac{C}{2} = 90° - \left(\frac{A+B}{2}\right) \quad \text{..... (II)}$$

Reemplazando (II) en (I):

$$= 2\text{sen}\left(90° - \frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + 2\text{sen}\left(90° - \left(\frac{A+B}{2}\right)\right)\cos\frac{C}{2}$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\frac{C}{2}$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\right]$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left[2\cos\frac{\left(\frac{A-B}{2}\right)+\left(\frac{A+B}{2}\right)}{2}\cos\frac{\left(\frac{A+B}{2}\right)-\left(\frac{A-B}{2}\right)}{2}\right]$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\,2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$\therefore \boxed{\text{sen}A + \text{sen}B + \text{sen}C = 4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}}$$

**DEMOSTRACIÓN a.4**

Sea: $M = \underbrace{\cos A + \cos B} - \cos C$

$$2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) - \cos C \quad \text{..... (I)}$$

como: $A + B = 180° - C \Rightarrow \frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 90° - \frac{C}{2}$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos\left(90° - \frac{C}{2}\right) = \operatorname{sen}\frac{C}{2} \quad \text{..... (II)}$$

Reemplazando (II) en (I): $= 2\operatorname{sen}\frac{C}{2}\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) - \left(1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{C}{2}\right)$

$$= 2\operatorname{sen}\frac{C}{2}\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) + 2\operatorname{sen}^2\frac{C}{2} - 1$$

$$= 2\operatorname{sen}\frac{C}{2}\left(\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + \operatorname{sen}\frac{C}{2}\right) - 1$$

$$= 2\operatorname{sen}\frac{C}{2}\left(\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\right) - 1$$

Transformando la expresión en el paréntesis a un producto:

$$= 2\operatorname{sen}\frac{C}{2}\,2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - 1$$

$$\therefore \boxed{\cos A + \cos B - \cos C = 4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\operatorname{sen}\frac{C}{2} - 1}$$

**DEMOSTRACIÓN a.9**

Sea: $E = \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$

$$2E = 2\cos^2 A + 2\cos^2 B + 2\cos^2 C$$

$$2E = (\cos 2A + 1) + (\cos 2B + 1) + (\cos 2C + 1)$$

$$2E = 3 + \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C$$

$$2E = 3 + 2\cos(A+B)\cos(A-B) + (2\cos^2 C - 1)$$

como : $A + B + C = 180° \Rightarrow A + B = 180° - C$

$\Rightarrow \cos(A+B) = \cos(180° - C) = -\cos C$

Reemplazando: $2E = 2 - 2\cos C\cos(A-B) + 2\cos^2 C$

$$2E = 2 - 2\cos C(-\cos C + \cos(A-B))$$

$$2E = 2 - 2\cos C(\cos(A+B) + \cos(A-B))$$

$$2E = 2 - 2\cos C(2\cos A\cos B)$$

$$2E = 2 - 4\cos A\cos B\cos C$$

$$E = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$$

$$\therefore \boxed{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C}$$

**b)** Si: $A + B + C = 360°$. Se cumple:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen}A + \operatorname{sen}B + \operatorname{sen}C &= 4\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2} \\ \cos A + \cos B + \cos C &= -4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - 1 \end{aligned}}$$

**DEMOSTRACIÓN**

$$E = \cos A + \cos B + \cos C$$

$$E = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + 2\cos^2\frac{C}{2} - 1 \quad \text{..... (I)}$$

como : $A + B + C = 360°$

$$\Rightarrow \frac{A+B}{2} = 180° - \frac{C}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = -\cos\left(\frac{C}{2}\right) \quad \text{..... (II)}$$

Reemplazando (II) en (I):

$$E = -2\cos\left(\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + 2\cos^2\frac{C}{2} - 1$$

$$E = -2\cos\left(\frac{C}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) - \cos\frac{C}{2}\right] - 1$$

$$E = -2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\right] - 1$$

$$E = -2\cos\frac{C}{2}\left[2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right] - 1$$

$$\therefore \boxed{\cos A + \cos B + \cos C = -4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - 1}$$

**c)**

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen}(x - 120°) + \operatorname{sen}x + \operatorname{sen}(x + 120°) &= 0 \\ \cos(x - 120°) + \cos x + \cos(x + 120°) &= 0 \end{aligned}}$$

**d)**

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen}^2(x - 120°) + \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2(x + 120°) &= 3/2 \\ \cos^2(x - 120°) + \cos^2 x + \cos^2(x + 120°) &= 3/2 \end{aligned}}$$

**e)**

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen}^4(x - 120°) + \operatorname{sen}^4 x + \operatorname{sen}^4(x + 120°) &= 9/8 \\ \cos^4(x - 120°) + \cos^4 x + \cos^4(x + 120°) &= 9/8 \end{aligned}}$$

**DEMOSTRACIÓN**

Por Identidades de arcos múltiples:

$$\cos^4\theta = \frac{3 + 4\cos 2\theta + \cos 4\theta}{8}$$

Usando la identidad y agrupando:

$$\cos^4(x - 120°) = \frac{3 + 4\cos(2x - 240°) + \cos(4x - 480°)}{8}$$

$$\cos^4 x = \frac{3+4\cos 2x+\cos 4x}{8}$$

$$\cos^4(x+120°) = \frac{3+4\cos(2x+240°)+\cos(4x+480°)}{8}$$

$$E = \cos^4(x-120°)+\cos^4 x+\cos^4(x+120°)$$

$$E = \frac{9}{8}+\frac{4}{8}(\cos(2x-240°)+\cos 2x+\cos(2x+240°))+$$

$$\frac{1}{8}(\cos(4x-480°)+\cos 4x+\cos(4x+480°))$$

$$E = \frac{9}{8}+\frac{1}{2}(\cos 2x+2\cos 2x\cos 240°)+\frac{1}{8}(\cos 4x+2\cos 4x\cos 480°)$$

$$E = \frac{9}{8}+\frac{1}{2}\left(\cos 2x+2\cos 2x\left(-\frac{1}{2}\right)\right)+\frac{1}{8}\left(\cos 4x+2\cos 4x\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\therefore \boxed{\cos^4(x-120°)+\cos^4 x+\cos^4(x+120°)=\frac{9}{8}}$$

**f)**

$$\cos^2 x+\cos^2(240°+x)+\cos^2(240°-x)=\frac{3}{2}$$

$$\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen}^2(240°+x)+\operatorname{sen}^2(240°-x)=\frac{3}{2}$$

**g)**

$$\cos^3 x+\cos^3(120°-x)+\cos^3(120°+x)=\frac{3}{4}\cos 3x$$

$$\operatorname{sen}^3 x+\operatorname{sen}^3(120°-x)+\operatorname{sen}^3(120°+x)=-\frac{3}{4}\operatorname{sen} 3x$$

**h)**

$$\cos^5 x+\cos^5(120°-x)+\cos^5(120°+x)=\frac{15}{16}\cos 3x$$

**i)**

$$\cos^4 x+\cos^4(120°+x)+\cos^4(120°-x)=\frac{9}{8}$$

$$\operatorname{sen}^4 x+\operatorname{sen}^4(120°+x)+\operatorname{sen}^4(120°-x)=\frac{9}{8}$$

**j)**

$$\cos^7 x+\cos^7(120°-x)+\cos^7(120°+x)=\frac{63}{64}\cos 3x$$

team CALAPENSHKO


## IDENTIDADES PARA TRANSFORMAR PRODUCTOS A SUMAS O DIFERENCIAS

$$2\,\text{sen}\alpha\cos\theta = \text{sen}(\alpha+\theta) + \text{sen}(\alpha-\theta)$$

$$2\cos\alpha\cos\theta = \cos(\alpha+\theta) + \cos(\alpha-\theta)$$

$$2\,\text{sen}\alpha\,\text{sen}\theta = \cos(\alpha-\theta) - \cos(\alpha+\theta)$$

**Ejemplo:** Transformar de producto a suma o diferencias

1) $2\text{sen}50^\circ\cos20^\circ$
2) $2\text{sen}10^\circ\cos40^\circ$
3) $2\text{sen}7x\,\text{sen}2x$
4) $2\cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{9}$

**Resolución:** 1) $2\text{sen}50^\circ\cos20^\circ = \text{sen}(50^\circ+20^\circ) + \text{sen}(50^\circ-20^\circ) = \text{sen}70^\circ + \text{sen}30^\circ$

2) $2\text{sen}10^\circ\cos40^\circ = \text{sen}(10^\circ+40^\circ) + \text{sen}(10^\circ-40^\circ) = \text{sen}50^\circ - \text{sen}30^\circ$

3) $2\text{sen}7x\,\text{sen}2x = \cos(7x-2x) - \cos(7x+2x) = \cos5x - \cos9x$

4) $2\cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{9} = \cos\left(\frac{7\pi}{9}+\frac{5\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{9}-\frac{5\pi}{9}\right) = \cos\frac{4\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{9}$

## SUMA DE SERIES FINITAS

### Series de senos y cosenos de ángulos en progresión aritmética

En general para reducir sumatorias de series finitas de senos o cosenos de ángulos que se encuentran en progresión aritmética, se aplica las siguientes fórmulas:

**I)** Sumas de senos cuyos ángulos se encuentran en progresión aritmética.

$$\text{senx} + \text{sen}(x+r) + \text{sen}(x+2r) + \ldots\ldots + \text{sen}(x+(n-1)r) = \frac{\text{sen}\frac{nr}{2}}{\text{sen}\frac{r}{2}}.\text{sen}\left(\frac{\hat{p}+\hat{u}}{2}\right)$$

Donde: p : Primer ángulo n : Número de términos u : Último ángulo r : Razón

**II)** En forma similar la suma de cosenos cuyos ángulos se encuentran el progresión aritmética.

$$\cos x + \cos(x+r) + \cos(x+2r) + \ldots\ldots + \cos(x+(n-1)r) = \frac{\text{sen}\frac{nr}{2}}{\text{sen}\frac{r}{2}}.\cos\left(\frac{\hat{p}+\hat{u}}{2}\right)$$

Donde: p : Primer ángulo n : Número de términos u : Último ángulo r : Razón

**DEMOSTRACIÓN:** Sea E la expresión:

$$E = \cos x + \cos(x+r) + \ldots\ldots + \cos(x+(n-1)r)$$

* multiplicando por $2\text{sen}\frac{r}{2}$ a la igualdad.

$$2E\,\text{sen}\frac{r}{2} = 2\cos x\,\text{sen}\frac{r}{2} + 2\cos(x+r)\text{sen}\frac{r}{2} + \ldots\ldots + 2\cos(x+(n-1)r)\text{sen}\frac{r}{2}$$

$$2E\,\text{sen}\frac{r}{2} = \left[\text{sen}\left(x+\frac{r}{2}\right) - \text{sen}\left(x-\frac{r}{2}\right)\right] + \left[\text{sen}\left(x+\frac{3r}{2}\right) - \text{sen}\left(x+\frac{r}{2}\right)\right] +$$

$$\ldots\ldots + \left[\text{sen}\left(x+\left(\frac{n-1}{2}\right)r\right) - \text{sen}\left(x+\frac{n-1}{2}\right)r\right]$$

$$\Rightarrow 2E\,\text{sen}\frac{r}{2} = -\text{sen}\left(x-\frac{r}{2}\right) + \text{sen}\left(x+\left(\frac{n-1}{2}\right)r\right), \text{ transformando a producto.}$$

$$2E\,\text{sen}\frac{r}{2} = 2\,\text{sen}\left(\frac{nr}{2}\right)\cos(2x+(n-1)r) \Rightarrow E = \frac{\text{sen}\left(\frac{nr}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{r}{2}\right)}\cos(2x+(n-1)r)$$

pero : $p + u = x + x + (n-1)r = 2x + (n-1)r$

$$\therefore \quad \boxed{\text{senx} + \text{sen}(x+r) + \text{sen}(x+2r) + \ldots\ldots + \text{sen}(x+(n-1)r) = \frac{\text{sen}\left(\frac{nr}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{r}{2}\right)}\cos\left(\frac{p+u}{2}\right)}$$

**Ejemplo:** Reducir la siguiente suma. sen2x + sen4x + sen6x + sen8x + sen10x

**Resolución:** Llamaremos "M" a la expresión.

$$M = \text{sen2x} + \text{sen4x} + \text{sen6x} + \text{sen8x} + \text{sen10x}$$

Donde: $n = 5$ ; $p = 2x$ ; $u = 10x$ ; $r = 2x$

$$M = \frac{\text{sen}\frac{nr}{2}}{\text{sen}\frac{r}{2}} \cdot \text{sen}\left(\frac{p+u}{2}\right) = \frac{\text{sen5x}}{\text{senx}} \cdot \text{sen6x}$$

$$\therefore \quad \mathbf{M = \text{sen}\,6x \cdot \text{sen}\,5x \cdot \csc x}$$

**PROPIEDADES:**

$\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ . Se cumple

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + \cos\frac{6\pi}{2n+1} + \ldots\ldots + \cos\frac{2n\pi}{2n+1} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{2n+1} + \cos\frac{3\pi}{2n+1} + \cos\frac{5\pi}{2n+1} + \ldots\ldots + \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

**DEMOSTRACIÓN:** Reduciendo la sumatoria por las igualdades anteriores:

Sea: $p = \frac{2\pi}{2n+1}$ , $u = \frac{2n\pi}{2n+1} \wedge r = \frac{2\pi}{2n+1}$

$$\Rightarrow S = \frac{\text{sen}\frac{n2\pi}{2(2n+1)}}{\text{sen}\frac{2\pi}{2(2n+1)}}\cos\left[\left(\frac{2\pi}{2n+1} + \frac{2n\pi}{2n+1}\right)\times\frac{1}{2}\right]$$

$$\Rightarrow S=\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2n+1}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n+1}}\cos\frac{(n+1)\pi}{2n+1}$$

Observamos que: $\frac{n\pi}{2n+1}+\frac{(n+1)\pi}{2n+1}=\pi \quad \Rightarrow \cos\frac{(n+1)\pi}{2n+1}=-\cos\frac{n\pi}{2n+1}$

$$\Rightarrow 2S=\frac{-\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n+1}}\times 2 \quad \Rightarrow 2S=\frac{-\operatorname{sen}\frac{2n\pi}{2n+1}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n+1}} \ \ldots\ldots \text{(I)}$$

como los ángulos $\frac{2n\pi}{2n+1}$ y $\frac{\pi}{2n+1}$ son complementarios.

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\frac{2n\pi}{2n+1}=\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n+1} \ \ldots\ldots \text{(II)}$$

Reemplazando (II) en (I) se obtiene: $2S=-1 \Rightarrow S=-\frac{1}{2}$

$$\therefore \boxed{\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cos\frac{6\pi}{2n+1}+\ldots\ldots+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=-\frac{1}{2}}$$

**Ejemplos:** Si: $n=3 \rightarrow \cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$

Si: $n=4 \rightarrow \cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{3\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}=\frac{1}{2}$

## PRODUCTOS TRIGONOMÉTRICOS NOTABLES

$\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$. Se cumple:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n+1}\cdot\operatorname{sen}\frac{2\pi}{2n+1}\cdot\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2n+1}\cdot\ldots\ldots\cdot\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$$

$$\cos\frac{\pi}{2n+1}\cdot\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cdot\cos\frac{3\pi}{2n+1}\cdot\ldots\ldots\cdot\cos\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{1}{2^n}$$

$$\tan\frac{\pi}{2n+1}\cdot\tan\frac{2\pi}{2n+1}\cdot\tan\frac{3\pi}{2n+1}\cdot\ldots\ldots\cdot\tan\frac{n\pi}{2n+1}=\sqrt{2n+1}$$

**Ejemplo:** Si: $n=4$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{9}\cdot\operatorname{sen}\frac{2\pi}{9}\cdot\operatorname{sen}\frac{3\pi}{9}\cdot\operatorname{sen}\frac{4\pi}{9}=\frac{\sqrt{2(4)+1}}{2^4}=\frac{3}{16}$$

$$\cos\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{3\pi}{9}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$$

$$\tan\frac{\pi}{9}\cdot\tan\frac{2\pi}{9}\cdot\tan\frac{3\pi}{9}\cdot\tan\frac{4\pi}{9}=\sqrt{2(4)+1}=3$$

team CALAPENSHKO



## EJERCICIOS DE APLICACIÓN

**1.** Transforme a producto

* $\operatorname{sen} 7x + \operatorname{sen} 3x =$ .....
* $\operatorname{sen} 6x - \operatorname{sen} 4x =$ .....
* $\cos 40° + \cos 20° =$ .....
* $\cos 10° - \cos 24° =$ .....
* $\cos 18° 30' + \cos 8° 30' =$ .....
* $\operatorname{sen} 17° 30' - \operatorname{sen} 6° 30' =$ .....

**2.** Completar la siguiente proposición:

La diferencia de los .....de dos ángulos es igual al ..... producto del seno de la semidiferencia de los ángulos por el ..... de la semisuma.

A) senos, doble, coseno.
B) cosenos, doble, senos.
C) senos, doble, seno.
D) cosenos, doble, coseno.
E) cosenos, mitad, seno.

**3.** Transformar a suma ó diferencia.

a) $2 \operatorname{sen} 7x \cos 2x =$ .....
b) $2 \operatorname{sen} 3x \cos 5x =$ .....
c) $2 \cos 40° \cos 10° =$ .....
d) $2 \cos 3x \cos x =$ .....
e) $2 \operatorname{sen} 32° \operatorname{sen} 12° =$ .....
f) $2 \operatorname{sen} (30° - x) \operatorname{sen} (30° + x) =$ .....

**4.** Complete la siguiente proposición:

El doble producto del ..... de un ángulo por el ..... de otro es igual al ..... de la suma de los valores de los ángulos más el coseno de la diferencia de los mismos.

A) coseno, coseno, seno.
B) coseno, seno, coseno.
C) coseno, coseno, coseno.
D) seno, coseno, coseno.
E) coseno, seno, seno.

**5.** Reduzca las siguientes sumatorias.

* $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 6x + \operatorname{sen} 10x + \ldots + \operatorname{sen} 38x$
* $\operatorname{sen} 3° + \operatorname{sen} 5° + \operatorname{sen} 7° + \ldots + \operatorname{sen} 23°$
* $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \ldots + \cos (2n-1)x$
* $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \ldots + \cos 28x$

**6.** Reduzca:

* $\cos^2 1° + \cos^2 2° + \cos^2 3° + \ldots + \cos^2 90°$
* $\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{7} + \operatorname{sen}^2 \frac{2\pi}{7} + \operatorname{sen}^2 \frac{3\pi}{7}$
* $\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{9} + \operatorname{sen}^2 \frac{2\pi}{9} + \operatorname{sen}^2 \frac{3\pi}{9} + \operatorname{sen}^2 \frac{4\pi}{9}$

team CALAPENSHKO



## PROBLEMAS RESUELTOS

**PROBLEMA 1** Calcule:

$$W = \cos 20° - \cos 80° + \cos 140°$$

**Resolución:** Sea la expresión "W"

Ordenándolo de la siguiente manera:

$$W = \cos 140° + \cos 20° - \cos 80°$$

Transformando a producto:

$$W = 2\cos 80° \cos 60° - \cos 80°$$

Se obtiene: $W = 2\cos 80° \cdot \frac{1}{2} - \cos 80°$

Finalmente: $W = \cos 80° - \cos 80°$

$$\therefore \quad \mathbf{W = 0}$$

**PROBLEMA 2** Al copiar de la pizarra la expresión sen 40° – sen 20°, un estudiante cometió un error y escribió cos 40° – cos 20°. Calcule la razón entre lo que estaba escrito en la pizarra y lo que copió el alumno. **ADMISIÓN UNMSM 2018-I**

**Resolución:**

- Expresión escrita en la pizarra: $A = \text{sen } 40° - \text{sen } 20°$
- Expresión que copió el estudiante: $B = \cos 40° - \cos 20°$

Por identidades trigonométricas de transformación, tenemos:

Nos piden:

$$\frac{A}{B} = \frac{\text{sen } 40° - \text{sen } 20°}{\cos 40° - \cos 20°}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{2\cos 30° \text{sen} 10°}{-2\text{sen} 30° \text{sen} 10°}$$

$$\frac{A}{B} = -\cot 30°$$

$$\therefore \quad \frac{A}{B} = -\sqrt{3}$$

**PROBLEMA 3** Calcule:

$$S = \text{sen}(25° + A)\cos(5° - A) + \cos(85° + A)\,\text{sen}(65° - A)$$

**Resolución:** Sea "S" la expresión:

$$S = \text{sen}(25° + A)\cos(5° - A) + \cos(85° + A)\text{sen}(65° - A)$$

Multiplicando × 2: $2S = 2\cos(65° - A)\cos(5° - A) + 2\cos(85° + A)\cos(25° + A)$

Transformando a suma:

$$2S = \cos(70° - 2A) + \cos 60° + \cos(110° + 2A) + \cos 60°$$

$$2S = \underbrace{\cos(110° + 2A) + \cos(70° - 2A)} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

Se obtiene: $2S = 2\cos 90°\cos(20° + 2A) + 1 = 1$

$\therefore$ **S = 1/2**

**PROBLEMA 4** Simplifique:

$$M = \frac{(tg2x + tgx)(\cos 3x + \cos x)}{sen3x}$$

**Resolución:** La expresión: $M = \dfrac{\left(\dfrac{sen2x}{\cos 2x} + \dfrac{senx}{\cos x}\right)(\cos 3x + \cos x)}{sen3x}$

Reconociendo la identidad del ángulo compuesto:

$$M = \frac{(sen2x\cos x + senx\cos 2x)(\cos 3x + \cos x)}{\cos 2x\ \cos x\ sen3x}$$

$$M = \frac{sen3x\ .\ 2\cos 2x\ .\ \cos x}{\cos 2x\ \cos x\ sen3x}$$

Ordenando y luego simplificando:

$$M = \frac{2\cos 2x\ \cos x\ sen3x}{\cos 2x\ \cos x\ sen3x}$$

$\therefore$ **M = 2**

**PROBLEMA 5** Si: $90° < x < 180°$. Reduzca:

$$S = \sqrt{senx(sen3x + senx)}$$

**Resolución:** De la expresión, transformando a producto:

$$S = \sqrt{senx(sen3x + senx)}$$

Por Identidad del ángulo doble:

$$S = \sqrt{senx\,.\,2sen2x\cos x}$$

$$S = \sqrt{sen2x\ .\ sen2x}$$

$$S = \sqrt{sen^2 2x} = |sen2x|$$

Dato: $90° < x < 180°$

$180° < 2x < 360°$

Como: $2x \in$ III C ó IV C

team CALAPENSHKO


Entonces: sen2x: es negativo

Luego: $S = |\ sen2x\ |$

$\therefore$ **$S = -sen2x$**

**PROBLEMA 6** ¿En que tipo de triángulo ABC se cumple lo siguiente?

$sen2B + sen2C = sen2A$

**Resolución:**

Como: $A + B + C = 180°$ ..... (1)

De la condición: $sen2B + sen2C = sen2A$

Transformando a producto:

$$2sen(B + C)\cos(B - C) = sen2A$$

$$2senA \cdot \cos(B - C) = 2senA\cos A$$

i) $senA = 0 \Rightarrow A = \{0, 180°, .....\}$ (imposible)

ii) $\cos(B - C) = \cos A$

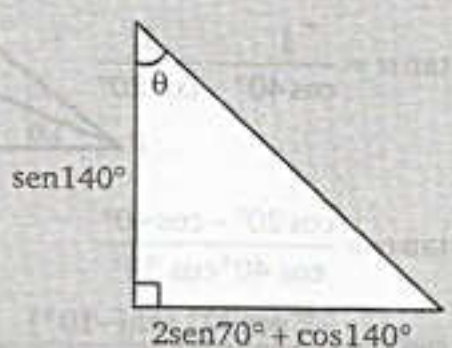
$$B - C = A \quad \Rightarrow \quad B = A + C \text{ ..... (2)}$$

Reemplazando: (2) en (1)

$$B + B = 180° \Rightarrow B = 90°$$

$\therefore$ **Dicha condición se cumple en un: Triángulo Rectángulo**

**PROBLEMA 7** En la figura mostrada, determine la medida de "θ"




**Resolución:**

Del grafico: $\tan\theta = \dfrac{2sen70° + \cos 140°}{sen140°}$ ; $\begin{cases} sen140° = sen40° \\ \cos 140° = -\cos 40° \end{cases}$

Reemplazando: $\tan\theta = \dfrac{2sen70° - \cos 40°}{sen40°}$ ; $\begin{cases} sen70° = \cos 20° \\ sen40° = \cos 50° \end{cases}$

Transformando a producto:

$$\tan\theta = \frac{\cos 20° + \cos 20° - \cos 40°}{\cos 50°} = \frac{\cos 20° + 2\,\text{sen}30°\,\text{sen}10°}{\cos 50°}$$

$$\tan\theta = \frac{\cos 20° + 2\left(\frac{1}{2}\right)\cos 80°}{\cos 50°}$$

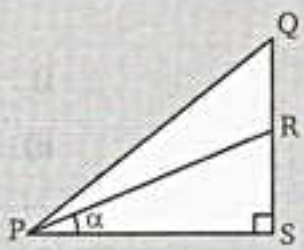
Transformando a producto:

$$\tan\theta = \frac{\cos 80° + \cos 20°}{\cos 50°}$$

Se obtiene: $\tan\theta = \dfrac{2\cos 50°\cos 30°}{\cos 50°} \Rightarrow \tan\theta = \sqrt{3}$

$\therefore \quad \theta = 60°$

**PROBLEMA 8** Los puntos P, Q, R y S en un tablero electrónico están conectados por filamentos metálicos como muestra la figura. Se realizan mediciones que determinan las longitudes: QS = sec 40° u y QR = sec 20° u.
Si PS = 4 sen 20° u, halle α. **ADMISIÓN UNMSM 2018-I**




**Resolución:**

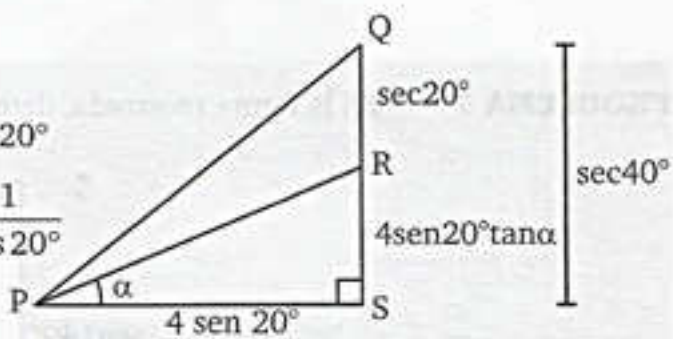
Nospiden: α

Delgráfico:

$RS = QS - QR$

$4\,\text{sen}\,20°\tan\alpha = \sec 40° - \sec 20°$

$$4\,\text{sen}20°\tan\alpha = \frac{1}{\cos 40°} - \frac{1}{\cos 20°}$$




$$4\,\text{sen}20°\tan\alpha = \frac{\cos 20° - \cos 40°}{\cos 40°\cos 20°}$$

$$4\,\text{sen}20°\tan\alpha = \frac{-2\,\text{sen}30°\,\text{sen}(-10°)}{\cos 20°\cos 40°} = \frac{\text{sen}10°}{\cos 20°\cos 40°}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{sen}10°}{2\times(2\,\text{sen}20°\cos 20°)\cos 40°} = \frac{\text{sen}10°}{2\times\text{sen}40°\cos 40°} = \frac{\text{sen}10°}{\text{sen}80°}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{sen}10°}{\cos 10°} = \tan 10°$$

$\therefore \alpha = 10°$

team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 9** Calcule: $\frac{x}{y}$ en:

$$\text{sen } 81° + \text{sen } 27° + \text{sen } 9° = \text{sen } x° + \text{sen } y°$$

$(x > y \wedge \text{agudos})$.

**Resolución:**

Condición: $\text{sen}81° + \text{sen}27° + \text{sen}9° = \text{sen}x° + \text{sen}y°$ ..... (1)

Sea: $M = \text{sen}81° + \overbrace{\text{sen}27° + \text{sen}9°}$

Transformando a producto:

$M = \text{sen}81° + 2\text{sen}18°\cos 9°$

$M = \cos 9° + 2\cos 72° \cdot \cos 9°$ (factorizando)

$M = \cos 9°(2\cos 72° + 1)$ $\boxed{\text{sen}3x = \text{sen}x(2\cos 2x + 1)}$

$M = \cos 9° \cdot \frac{\text{sen}108°}{\text{sen}36°}$

Aplicando Identidad del ángulo doble:

$M = \cos 9° \cdot \frac{\text{sen}72°}{\text{sen}36°} = \cos 9° \cdot \frac{2\cancel{\text{sen}36°}\cos 36°}{\cancel{\text{sen}36°}}$

$M = 2\cos 36° \cos 9°$ (transformando a suma)

$M = \cos 45° + \cos 27°$ ..... (2)

Reemplazando (2) en (1):

$\cos 45° + \cos 27° = \text{sen}x° + \text{sen}y°$

$\text{sen}63° + \text{sen}45° = \text{sen}x° + \text{sen}y°$

Luego: $\begin{cases} x = 63° \\ y = 45° \end{cases}$

$\therefore \quad \frac{x}{y} = \frac{7}{5}$

**PROBLEMA 10** Calcule:

$$M = \cos\frac{2\pi}{11} + 2\cos\frac{4\pi}{11} + 3\cos\frac{6\pi}{11} + \ldots\ldots + 10\cos\frac{20\pi}{11}$$

**Resolución:**

De la expresión:

$$M = \cos\frac{2\pi}{11} + 2\cos\frac{4\pi}{11} + 3\cos\frac{6\pi}{11} + 4\cos\frac{8\pi}{11} + \ldots + 9\cos\frac{18\pi}{11} + 10\cos\frac{20\pi}{11}$$

Además los ángulos:

$$\frac{20\pi}{11} + \frac{2\pi}{11} = 2\pi \Rightarrow \cos\frac{20\pi}{11} = \cos\frac{2\pi}{11}$$

$$\frac{18\pi}{11} + \frac{4\pi}{11} = 2\pi \Rightarrow \cos\frac{18\pi}{11} = \cos\frac{4\pi}{11}$$

$$\frac{16\pi}{11}+\frac{8\pi}{11}=2\pi \Rightarrow \cos\frac{16\pi}{11}=\cos\frac{8\pi}{11}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Reemplazando en "M" obtenemos

$$M=11\cos\frac{2\pi}{11}+11\cos\frac{4\pi}{11}+11\cos\frac{6\pi}{11}+11\cos\frac{8\pi}{11}+11\cos\frac{10\pi}{11}$$

$$M=11\left(\cos\frac{2\pi}{11}+\cos\frac{4\pi}{11}+\cos\frac{6\pi}{11}+\cos\frac{8\pi}{11}+\cos\frac{10\pi}{11}\right)$$

**Propiedad:**

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cos\frac{6\pi}{2n+1}+\ldots\ldots+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=-\frac{1}{2}$$

Para n = 5 cumple con la propiedad

Luego: $M=11\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\therefore \quad \mathbf{M=-\frac{11}{2}}$

**PROBLEMA 11** Calcule:

$$M=\sqrt{3}\cot 20^\circ-4\cos 20^\circ$$

**Resolución:**

Sea "M" la expresión : $M=\sqrt{3}\cot 20^\circ-4\cos 20^\circ$

Pasando a seno y coseno : $M=\dfrac{\sqrt{3}\cos 20^\circ-2\,.\,2\operatorname{sen}20^\circ\cos 20^\circ}{\operatorname{sen}20^\circ}$

Transformando a suma : $M=\dfrac{2\cos 30^\circ\cos 20^\circ-2\operatorname{sen}40^\circ}{\operatorname{sen}20^\circ}$

$$M=\frac{\cos 50^\circ+\cos 10^\circ-2\cos 50^\circ}{\operatorname{sen}20^\circ}$$

Transformando a producto:

$$M=\frac{\cos 10^\circ-\cos 50^\circ}{\operatorname{sen}20^\circ}=\frac{2\operatorname{sen}30^\circ\operatorname{sen}20^\circ}{\operatorname{sen}20^\circ}$$

$$M=2\left(\frac{1}{2}\right)$$

$\therefore \quad \mathbf{M=1}$

**PROBLEMA 12** Determine un equivalente de:

$$\sqrt{3}-\sqrt{2}+1$$

team CALAPENSHKO



**Resolución:** Sea "M" la expresión : $M=\sqrt{3}+1-\sqrt{2}=(\sqrt{3}+1)-\sqrt{2}$

Multiplicando por $\sqrt{2}$ (m.a.m) :

$$\sqrt{2}M=(\sqrt{6}+\sqrt{2})-2$$

Dividiendo entre 4 (miembro a miembro):

$$\frac{\sqrt{2}}{4}M=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}-\frac{1}{2}=\cos 15°-\cos 60°$$

Transformando a producto tenemos:

$$\frac{\sqrt{2}}{4}M=-2\operatorname{sen}\frac{75°}{2}.\operatorname{sen}\frac{(-45°)}{2}$$

$$M=4\sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{75°}{2}.\operatorname{sen}\frac{45°}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{M=4\sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{5\pi}{24}.\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}}$$

**PROBLEMA 13** Sabiendo que: $\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}3x+\operatorname{sen}5x=a\operatorname{sen}^5x-b\operatorname{sen}^3x+c\operatorname{sen}x$
Calcule:

$$A=\sqrt{a}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c}$$

**Resolución:** La expresión : $\underbrace{\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}3x+\operatorname{sen}5x}=a\operatorname{sen}^5x-b\operatorname{sen}^3x+c\operatorname{sen}x$

Transformando a producto

$$2\operatorname{sen}3x\cos 2x+\operatorname{sen}3x=a\operatorname{sen}^5x-b\operatorname{sen}^3x+c\operatorname{sen}x$$

Factorizando : $\operatorname{sen}3x\underbrace{(2\cos 2x+1)}=a\operatorname{sen}^5x-b\operatorname{sen}^3x+c\operatorname{sen}x$

**Recordar:**

$\operatorname{sen}3x=3\operatorname{sen}x-4\operatorname{sen}^3x$ .....($\alpha$)

$\operatorname{sen}3x=\operatorname{sen}x(2\cos 2x+1)$ .....($\beta$)

Reemplazando : $\dfrac{\operatorname{sen}^2 3x}{\operatorname{sen}x}=a\operatorname{sen}x-b\operatorname{sen}x+c\operatorname{sen}x$

$$\frac{(3\operatorname{sen}x-4\operatorname{sen}^3x)^2}{\operatorname{sen}x}=a\operatorname{sen}^5x-b\operatorname{sen}^3x+c\operatorname{sen}x$$

$$\frac{9\operatorname{sen}^2x-24\operatorname{sen}^4+16\operatorname{sen}^6x}{\operatorname{sen}x}=a\operatorname{sen}^5x-b\operatorname{sen}^3x+c\operatorname{sen}x$$

Simplificando "sen x" y ordenando obtenemos:

$$16\operatorname{sen}^5x-24\operatorname{sen}^3x+9\operatorname{sen}x=a\operatorname{sen}^5x-b\operatorname{sen}^3x+c\operatorname{sen}x$$

$$\begin{cases}a=16\\b=24\\c=9\end{cases}\Rightarrow A=\sqrt{a}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c}$$

$$\therefore\ \mathbf{A=12}$$

**PROBLEMA 14** Si los lados de un triángulo son:

$\cos 2x + \cos 2y + 2\cos(x+y)$

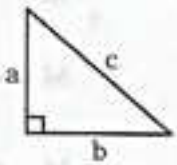
$\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2y + 2\operatorname{sen}(x+y)$

Determine la longitud de la hipotenusa.

**Resolución:** Llamemos: $a = \cos 2x + \cos 2y + 2\cos(x+y)$

$b = \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2y + 2\operatorname{sen}(x+y)$

**Recordar:**




$\Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2}$ .....(1)

Transformando a producto y factorizando:

$$\begin{cases} a = 2\cos(x+y)\cos(x-y) + 2\cos(x+y) \\ a = 2\cos(x+y)[1+\cos(x-y)] \\ a^2 = 4\cos^2(x+y)[1+\cos(x-y)]^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 2\operatorname{sen}(x+y)\cos(x-y) + 2\operatorname{sen}(x+y) \\ b = 2\operatorname{sen}(x+y)[1+\cos(x-y)] \\ b^2 = 4\operatorname{sen}^2(x+y)[1+\cos(x-y)]^2 \end{cases}$$

Reemplazando en (1):

$$c = \sqrt{4[1+\cos(x-y)]^2 \underbrace{[\operatorname{sen}^2(x+y) + \cos^2(x+y)]}_{1}}$$

Luego: $c = 2[1+\cos(x-y)]$

$\therefore \quad \boxed{c = 4\cos^2\dfrac{(x-y)}{2}}$

**PROBLEMA 15** Calcule:

$$A = \cos^2\left(\frac{1}{2}\right)^\circ + \cos^2\left(\frac{2}{2}\right)^\circ + \cos^2\left(\frac{3}{2}\right)^\circ + .... + \cos^2\left(\frac{180^\circ}{2}\right)$$

**Resolución:** De la expresión "A"

$$A = \cos^2\left(\frac{1}{2}\right)^\circ + \cos^2\left(\frac{2}{2}\right)^\circ + \cos^2\left(\frac{3}{2}\right)^\circ + .... + \cos^2\left(\frac{180}{2}\right)^\circ$$

Multipliquemos por "2" a "A"; degradando:

$$2A = 2\cos^2\left(\frac{1}{2}\right)^\circ + 2\cos^2\left(\frac{2}{2}\right)^\circ + 2\cos^2\left(\frac{3}{2}\right)^\circ + .... + 2\cos^2\left(\frac{180}{2}\right)^\circ$$

$$2A = (1+\cos 1^\circ) + (1+\cos 2^\circ) + (1+\cos 3^\circ) + .... + (1+\cos 180^\circ)$$

$$2A = 180 + \cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + .... + \cos 180^\circ \quad .....(I)$$

**A todo el público en general:**

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

**Este libro no debe ser prostituito monetariamente**, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

**28 de agosto del 2020**

Sea : $M = \cos 1° + \cos 2° + \cos 3° + .... + \cos 180°$

Por fórmula : $M = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{nr}{2}\cos\frac{(p+u)}{2}}{\operatorname{sen}\frac{r}{2}}$ $\begin{cases} n = 180 \\ p = 1° \\ u = 180° \\ r = 1° \end{cases}$

$$M = \frac{\operatorname{sen}90°\cos\left(90° + \frac{1°}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right)°}$$

$$M = \frac{-\operatorname{sen}(1/2)°}{\operatorname{sen}(1/2)°} = -1 .....(II)$$

(II)en(I): $\therefore$ **A = 89,5**

**PROBLEMA 16** Si: $\alpha + \beta + \theta = \pi$

Calcule:

$$W = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{4} + \operatorname{sen}\frac{\beta}{4} + \operatorname{sen}\frac{\theta}{4} + \cos\frac{\alpha}{4} + \cos\frac{\beta}{4} + \cos\frac{\theta}{4}}{\cos\left(\frac{\alpha+\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\beta+\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\theta+\pi}{8}\right)}$$

**Resolución:**

**Recordar:**

$$\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Sea "N" el numerador; agrupando convenientemente:

$$N = \operatorname{sen}\frac{\alpha}{4} + \cos\frac{\alpha}{4} + \operatorname{sen}\frac{\beta}{4} + \cos\frac{\beta}{4} + \operatorname{sen}\frac{\theta}{4} + \cos\frac{\theta}{4}$$

Se obtiene : $N = \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4}\right)$

Factorizando : $N = \sqrt{2}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$ .....(1)

Haciendo un cambio de variable:

$$\frac{\alpha}{4} + \frac{\pi}{4} = A$$

$$\frac{\beta}{4} + \frac{\pi}{4} = B$$

$$\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4} = C$$

$\sum$ m.a.m $\qquad \pi = A + B + C$

**Propiedad:**

Si: $A+B+C=\pi \Rightarrow \operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B+\operatorname{sen}C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

Reemplazando:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{4}+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=4\cos\left(\frac{\alpha+\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\beta+\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\theta+\pi}{8}\right)\ldots..(2)$$

Luego (2) en (1): $N=\sqrt{2}\left[4\cos\left(\frac{\alpha+\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\beta+\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\theta+\pi}{8}\right)\right]$

Finalmente: $$W=\frac{4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\alpha+\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\beta+\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\theta+\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\beta+\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\theta+\pi}{8}\right)}$$

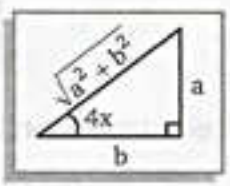
$\therefore\ \mathbf{W=4\sqrt{2}}$

**PROBLEMA 17** Elimine "x" de: $\operatorname{sen}5x+\operatorname{sen}3x=a$, $\cos5x+\cos3x=b$

**Resolución:** Transformando a producto cada condición:

$$2\operatorname{sen}4x\,.\cos x=a \quad \ldots\ldots..(1)$$
$$2\cos4x\,.\cos x=b \quad \ldots\ldots..(2)$$

(1) ÷ (2): $\tan4x=\frac{a}{b}\rightarrow$




.....(1)

Ahora; elevando al cuadrado cada condición y sumando a la vez

$$+\begin{cases}(\operatorname{sen}5x+\operatorname{sen}3x)^2=a^2\\(\cos5x+\cos3x)^2=b^2\end{cases}$$

$$\underbrace{\operatorname{sen}^2 5x+\cos^2 5x}_{1}+\underbrace{\operatorname{sen}^2 3x+\cos^2 3x}_{1}+\underbrace{2(\cos5x\cos3x+\operatorname{sen}5x\operatorname{sen}3x)}_{\cos2x}=a^2+b^2$$

Luego: $2+2\cos2x=a^2+b^2\rightarrow 2\cos2x=a^2+b^2-2$

Vamos a elevar al cuadrado para buscar el ángulo doble de "2x"

$$(2\cos2x)^2=(a^2+b^2-2)^2$$
$$4\cos^2 2x=(a^2+b^2-2)^2$$

**Recordar:**

$2\cos^2\theta=1+\cos2\theta$

team CALAPENSHKO


$$2(2\cos^2 2x) = (a^2+b^2-2)^2$$

$$1+\cos 4x = \frac{(a^2+b^2-2)^2}{2} \quad \text{.....(2)}$$

Luego (1) en (2):

$$\therefore \quad 1+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{(a^2+b^2-2)^2}{2}$$

**PROBLEMA 18** Reduzca:

$$M = \frac{\sqrt{3}\,\text{sen}\,x + \sqrt{3}\cos 3x + \text{sen}\,3x + \cos x}{\text{sen}\,2x + \cos 2x}$$

**Resolución:**

**Recordar:**

$$a\,\text{sen}\,x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\,\text{sen}(x+\theta)$$

Si: $\tan\theta = \frac{b}{a}$

Ordenando el numerador:

$$M = \frac{\sqrt{3}\,\text{sen}\,x + \cos x + \text{sen}\,3x + \sqrt{3}\cos 3x}{\text{sen}\,2x + \cos 2x}$$

Se observa que:

- $\sqrt{3}\,\text{sen}\,x + \cos x = 2\,\text{sen}(x+30°)$
- $\text{sen}\,3x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\,\text{sen}(3x+60°)$
- $\text{sen}\,2x + \cos 2x = \sqrt{2}\,\text{sen}(2x+45°)$

Reemplazando: $M = \frac{2\,\text{sen}(x+30°) + 2\,\text{sen}(3x+60°)}{\sqrt{2}\,\text{sen}(2x+45°)}$

Factorizando 2: $M = \frac{2[\text{sen}(x+30°) + \text{sen}(3x+60°)]}{\sqrt{2}\,\text{sen}(2x+45°)}$

Transformando a producto y simplificando:

$$M = \frac{2\,.\,2\,\text{sen}(2x+45°)\,.\,\cos(x+15°)}{\sqrt{2}\,\text{sen}(2x+45°)}$$

Se obtiene: $M = 2\sqrt{2}\cos(x+15°)$

$$\therefore \quad M = 2\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$$

**PROBLEMA 19** Reducir:

$$P = \text{sen}x\,\text{sen}2x + \text{sen}x\,\text{sen}4x + \text{sen}x\,\text{sen}6x + \ldots + \text{sen}x\,\text{sen}(2n+2)x$$

**Resolución:** Factorizando "senx"

$$P = \text{sen}\,x[\text{sen}\,2x + \text{sen}\,4x + \text{sen}\,6x + \ldots + \text{sen}(2n+2)x]$$

**Recordar:**

$$\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}(\alpha+r)+\operatorname{sen}(\alpha+2r)+\ldots+\operatorname{sen}(\alpha+(n-1)r)=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{P+U}{2}\right).\operatorname{sen}\left(\frac{nr}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{r}{2}}$$

Entonces en el problema:

$$P = 2x \qquad U = (2n+2)x$$

$$\#\ \text{términos} = n+1$$

$$r = 2x$$

Reemplazando en "P":

$$P = \operatorname{sen}x\left[\frac{\operatorname{sen}\left[\left(\frac{2+2n+2}{2}\right)x\right].\operatorname{sen}\left[\frac{(n+1)2x}{2}\right]}{\operatorname{sen}x}\right]$$

$$\therefore\ \mathbf{P = \operatorname{sen}(n+2)x\,.\,\operatorname{sen}(n+1)x}$$

**PROBLEMA 20** Determine el valor aproximado de la expresión:

$$R = \csc 27° - \sec 27°$$

**Resolución:** Reemplazando por R.T.C : $\sec 27° = \csc 63°$ a la vez pasando a senos:

$$R = \frac{1}{\operatorname{sen}27°} - \frac{1}{\operatorname{sen}63°}$$

$$R = \frac{\operatorname{sen}63° - \operatorname{sen}27°}{\operatorname{sen}27°\,.\,\operatorname{sen}63°} \quad \left(\begin{array}{c}\text{Transformando a}\\ \text{producto}\end{array}\right)$$

$$R = \frac{2\operatorname{sen}18°\,.\,\cos 45°}{\operatorname{sen}27°\,.\,\cos 27°}$$

Multiplicando por (2) al denominador:

$$\frac{R}{2} = \frac{2\operatorname{sen}18°\cos 45°}{2\operatorname{sen}27°\,.\,\cos 27°}$$

$$\frac{R}{2} = \frac{2\operatorname{sen}18°\cos 45°}{\operatorname{sen}54°}$$

**Recordar:**

$$\operatorname{sen}18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \quad \wedge \quad \operatorname{sen}54° = \cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

Reemplazando y operando a la vez:

$$\frac{R}{2} = \frac{2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right).\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)}$$

$$\therefore\ \mathbf{R = \sqrt{2}(3-\sqrt{5})}$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 21** Si: $W = 4\operatorname{sen} x + \sec x$, determine una expresión equivalente de W en factores.

**Resolución:** Colocando la expresión en términos de cosenos:

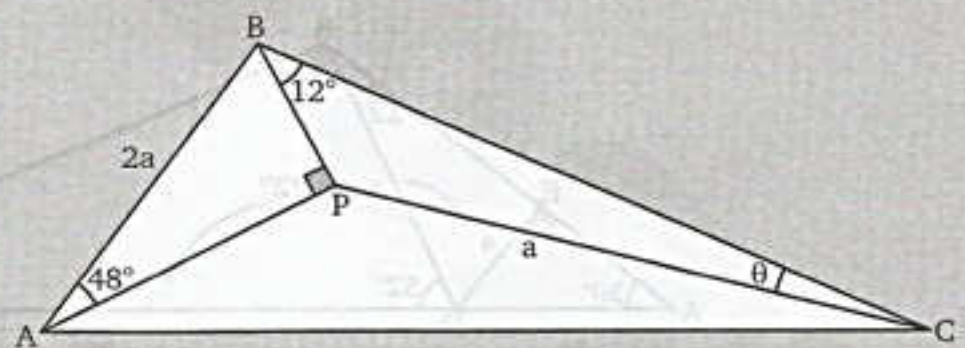
$$W = \frac{\overbrace{2(2\operatorname{sen} x \cos x)}^{\operatorname{sen} 2x} + 1}{\cos x} = \frac{2\operatorname{sen} 2x + 1}{\cos x} = \frac{2\left(\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2}\right)}{\cos x} \quad \ldots\ldots \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\right)$$

$$W = 2\sec x.\left(\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$$

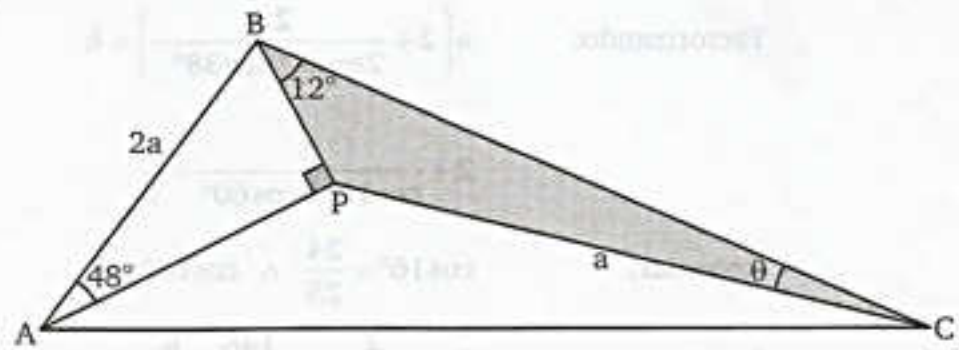
$$W = 2\sec x.2\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{12}\right).\cos\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$$

$$\therefore \quad \mathbf{W = 4\sec x.\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{12}\right).\cos\left(x - \frac{\pi}{12}\right)}$$

**PROBLEMA 22** Del gráfico, determine el valor de "θ"




**Resolución:** (*) $BP = 2a \operatorname{sen} 48°$




Del triángulo CPB; aplicando el teorema de senos.

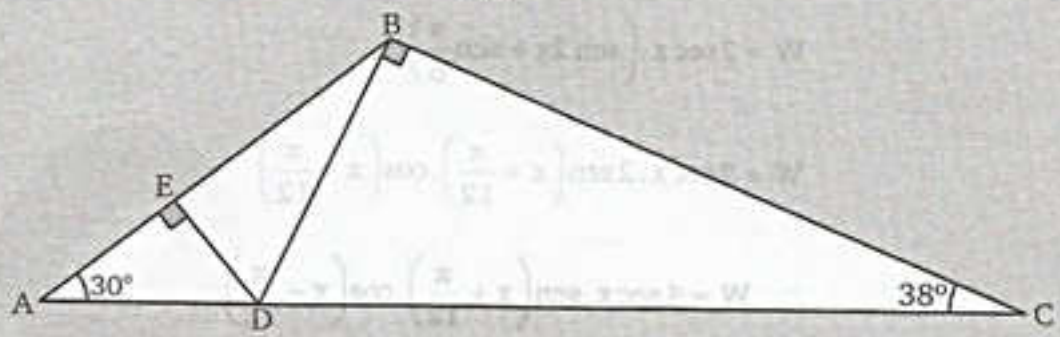
$$\frac{a}{\operatorname{sen} 12°} = \frac{2a\ \operatorname{sen} 48°}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\operatorname{sen}\theta = 2\operatorname{sen} 48° \operatorname{sen} 12°$$

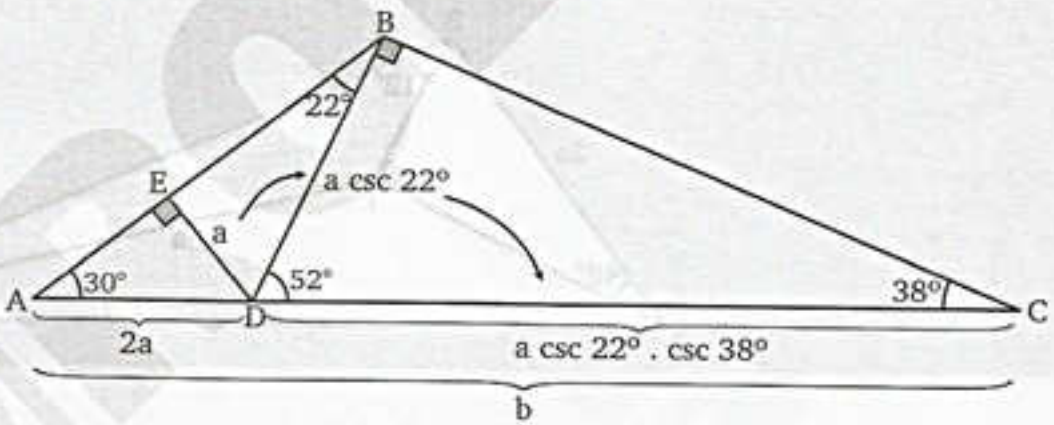
$$\operatorname{sen}\theta = \cos 36° - \cos 60° = \frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\therefore\ \theta = 18°$$

**PROBLEMA 23** Del gráfico, determine el valor de: $\frac{\overline{DE}}{\overline{AC}}$




**Resolución:** Si: $DE = a \ \wedge \ AC = b$




Del gráfico: $2a + a \csc 22° \,.\, \csc 38° = b$

Factorizando: $a\left(2 + \frac{2.1}{2\operatorname{sen}22°\operatorname{sen}38°}\right) = b$

$$2 + \frac{2}{\cos 16° - \cos 60°} = \frac{b}{a}$$

Recordar: $\cos 16° = \frac{24}{25} \ \wedge \ \cos 60° = \frac{1}{2}$

Luego: $2 + \frac{2}{\frac{24}{25} - \frac{1}{2}} = \frac{146}{23} = \frac{b}{a}$

Piden: $\frac{a}{b} = \frac{23}{146} \quad \therefore\ \mathbf{\frac{DE}{AC} = \frac{23}{146}}$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 24** Calcule:

$$J = \text{sen}^2\frac{\pi}{43} + \text{sen}^2\frac{2\pi}{43} + \text{sen}^2\frac{3\pi}{43} + \ldots\ldots + \text{sen}^2\frac{21\pi}{43}$$

**Resolución:** Recordar la fórmula de degradación:

$$\boxed{2\,\text{sen}^2\theta = 1 - \cos 2\theta}$$

Multiplicando por 2 a toda la expresión:

$$2J = 2\text{sen}^2\frac{\pi}{43} + 2\text{sen}^2\frac{2\pi}{43} + 2\text{sen}^2\frac{3\pi}{43} + \ldots\ldots + 2\text{sen}^2\frac{21\pi}{43}$$

Reemplazando la fórmula de degradación:

$$2J = 1 - \cos\frac{2\pi}{43} + 1 - \cos\frac{4\pi}{43} + 1 - \cos\frac{6\pi}{43} + \ldots\ldots + 1 - \cos\frac{42\pi}{43}$$

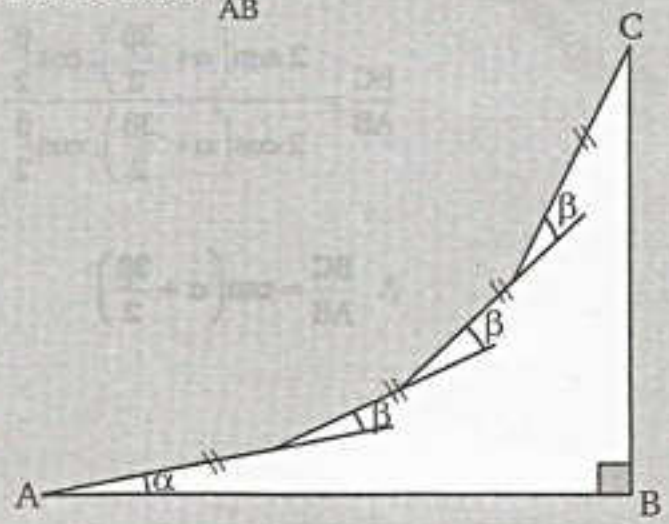
Ordenando:

$$2J = 1 \times 21 - \underbrace{\left(\cos\frac{2\pi}{43} + \cos\frac{4\pi}{43} + \cos\frac{6\pi}{43} + \ldots\ldots + \cos\frac{42\pi}{43}\right)}_{\text{Propiedad: } -\frac{1}{2}}$$

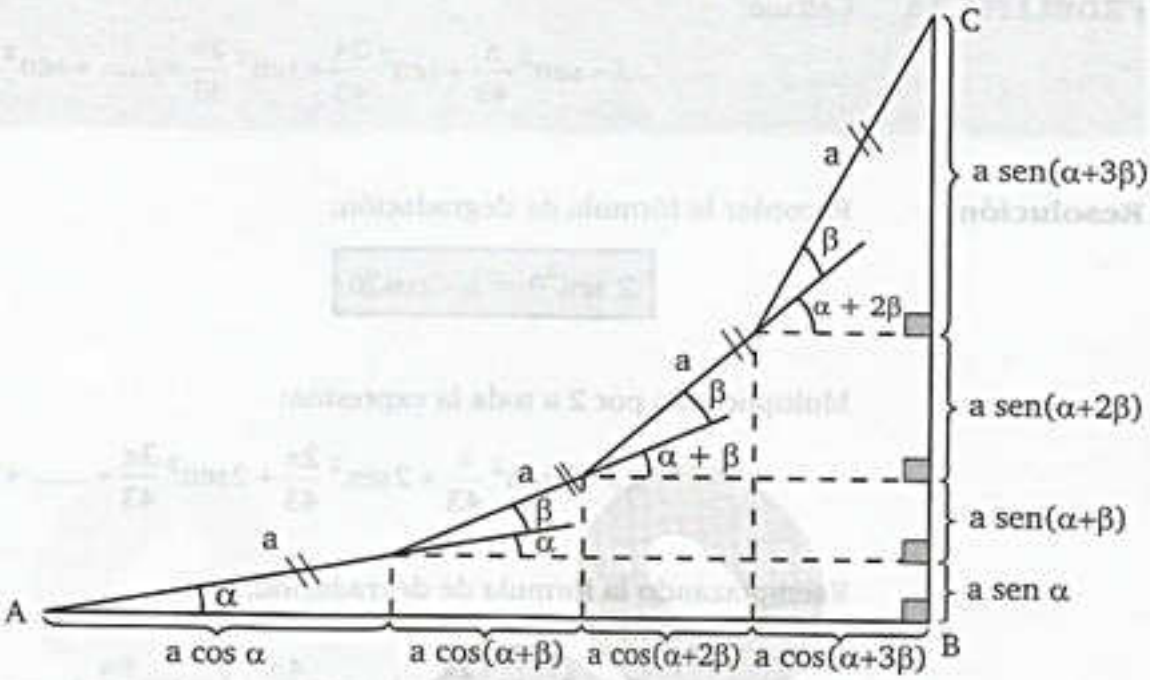
$$2J = 21 - \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ J = \frac{41}{4}$$

**PROBLEMA 25** Del gráfico; calcular el valor de: $\frac{BC}{AB}$



**Resolución:**




Piden:
$$\frac{BC}{AB}=\frac{a\,sen(\alpha+3\beta)+a\,sen(\alpha+2\beta)+a\,sen(\alpha+\beta)+a\,sen\alpha}{a\cos(\alpha+3\beta)+a\cos(\alpha+2\beta)+a\cos(\alpha+\beta)+a\cos\alpha}$$

Factorizando y agrupando de dos en dos numerador y denominador:

$$\frac{BC}{AB}=\frac{2sen(\alpha+2\beta).\cos\beta+2sen(\alpha+\beta).\cos\beta}{2\cos(\alpha+2\beta).\cos\beta+2\cos(\alpha+\beta).\cos\beta}$$

$$\frac{BC}{AB}=\frac{\cos\beta\left[sen(\alpha+2\beta)+sen(\alpha+\beta)\right]}{\cos\beta\left[\cos(\alpha+2\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]}$$

$$\frac{BC}{AB}=\frac{2\,sen\left(\alpha+\frac{3\beta}{2}\right).\cos\frac{\beta}{2}}{2\cos\left(\alpha+\frac{3\beta}{2}\right).\cos\frac{\beta}{2}}$$

$$\therefore\ \frac{BC}{AB}=\tan\left(\alpha+\frac{3\beta}{2}\right)$$

team CALAPENSHKO



## PROBLEMAS PROPUESTOS

**1.** Indique un factor de:

$$\sqrt{2} + 2\cos 55°$$

A) sen 20° B) sen25° C) sen 70°
D) cos70° E) cos 5°

**2.** Indique verdadero (V) o falso (F) dadas las siguientes proposiciones

( ) $\cos 40° + \operatorname{sen} 10° = \cos 20°$
( ) $\cos x - \cos(60° + x) - \cos(60° - x) = \cos 3x$
( ) $\cos 10° - \cos 50° = -\operatorname{sen} 20°$

A) VVF B) VFV C) FVF
D) VFF E) VVF

**3.** Halle el valor de Q en la siguiente ecuación

$$Q = \operatorname{sen} 70° - \operatorname{sen} 80° - \cos 50° = 0$$

A) $2\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 2
D) $-\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}$

**4.** Si la siguiente igualdad es una identidad, hallar el valor de "A":

$$\frac{\operatorname{sen} 2\alpha + n\operatorname{sen} 3\alpha - \operatorname{sen} 4\alpha}{\cos 2\alpha + n\cos 3\alpha - \cos 4\alpha} = A \cdot \tan 3\alpha$$

A) n B) 1 C) 2n
D) 2 E) 3

**5.** Transformar a producto:

$$1 + \cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 6\theta$$

A) $-4\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen} 3\theta$
B) $4\cos\theta \cos 2\theta \cos 3\theta$
C) $4\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen} 4\theta$
D) $-2\cos\theta \cos 2\theta \cos 3\theta$
E) $-2\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen} 3\theta$

**6.** Simplificar la expresión:

$$A = \frac{\cos\theta - \operatorname{sen} 2\theta - \cos 5\theta}{\operatorname{sen}\theta - \cos 2\theta + \operatorname{sen} 5\theta}$$

A) $\tan\theta$ B) $\tan 2\theta$ C) $\tan 3\theta$
D) $\cot 3\theta$ E) $\cot 2\theta$

**7.** Si: $\theta = \frac{\pi}{20}$ ; hallar el valor de E:

$$E = \frac{\operatorname{sen} 7\theta - \operatorname{sen} 5\theta}{\cos 7\theta + \cos 5\theta} + \frac{\operatorname{sen} 3\theta - \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta - \cos 3\theta}$$

A) $\sqrt{2} + 1$ B) $\sqrt{5} - 1$ C) $\sqrt{3} - 1$
D) $\sqrt{2} + 1$ E) $\sqrt{5} + 1$

**8.** Hallar el valor de E:

$$E = \operatorname{sen} 63° \operatorname{sen} 27° + \operatorname{sen} 66° \operatorname{sen} 6°$$

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

**9.** Reducir:

$$\operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 3x - \cos 3x \cos x + \cos 6x \cos 2x$$

A) cos x B) cos 2x C) sen x
D) 0 E) sen 2x

**10.** Reducir:

$$\frac{\operatorname{sen} 42° - \cos 40° \operatorname{sen} 82°}{\cos 42° - \operatorname{sen} 50° \cos 82°}$$

A) $-\frac{1}{7}$ B) 1 C) −1
D) $-\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3}$

**11.** Si: $\cos x = \frac{2}{3}$

Hallar:

$$N = 2\operatorname{sen}\frac{7x}{4}\operatorname{sen}\frac{5x}{4} - 2\operatorname{sen}\frac{3x}{4}\operatorname{sen}\frac{x}{4}$$

A) $\frac{20\sqrt{5}}{9}$ B) $\frac{20}{9}$ C) $\frac{27\sqrt{5}}{40}$

D) $\frac{20\sqrt{5}}{27}$ E) $\frac{40}{27}$

**12.** Reducir:

$$\sqrt{\operatorname{sen}7x\operatorname{sen}3x + \operatorname{sen}^2 2x}$$

A) sen 5x B) sen x C) |sen x|

D) |sen 5x| E) |sen 3x|

**13.** Reducir:

$$\frac{\operatorname{sen}7x}{\operatorname{sen}x} - 2\cos 2x - 2\cos 4x - 2\cos 6x$$

A) 1 B) 2 C) 3 cosx

D) sen x E) sen 2x

**14.** Factorizar, trigonométricamente:

$$\sqrt{6} - 2 - \sqrt{2}$$

A) $4\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{24}$ B) $-4\operatorname{sen}\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{8}$

C) $8\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{24}$

D) $-8\operatorname{sen}\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{8}$ E) $-8\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{24}$

**15.** En un triángulo ABC, factorizar:

$$\operatorname{sen}2A + \operatorname{sen}2B - \operatorname{sen}2C$$

A) 4 senA senB senC

B) −4 cosA cosB cosC

C) 4 cosA cosB senC

D) 4 senA senB senC

E) −4 cosA cosB cosC

**16.** Si: $\alpha = \frac{\pi}{21}$

Hallar el valor de:

$$M = \frac{\operatorname{sen}23\alpha - \operatorname{sen}7\alpha}{\operatorname{sen}2\alpha + \operatorname{sen}14\alpha}$$

A) −1 B) 1 C) $-\frac{1}{2}$

D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

**17.** Halle el equivalente de:

$$4(\cos 2\phi + \cos 6\phi)(\cos 6\phi + \cos 8\phi) - 1$$

A) 0

B) −1

C) $\cos 15\phi \sec\phi$

D) $-\operatorname{sen}15\phi \csc\phi$

E) $\operatorname{sen}15\phi \csc\phi$

**18.** Halle el valor de:

$$\frac{1 - 4\cos 80^\circ \cos 20^\circ}{2\operatorname{sen}10^\circ}$$

A) −1 B) 1 C) 0

D) $\frac{1}{2}$ E) $-\frac{1}{2}$

**19.** Reducir:

$$\frac{\operatorname{sen}A + \operatorname{sen}B + \operatorname{sen}(A+B)}{\cos A + \cos B + \cos(A+B) + 1}$$

A) $\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)$ B) $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)$

C) tan(A + B)

D) tan(A − B) E) $\cot\left(\frac{A+B}{2}\right)$

**20.** Si la siguiente igualdad es una identidad:

$$4\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) =$$

$$= B\operatorname{sen}A\alpha - \operatorname{sen}\alpha$$

Halle: $A^2 + B^2$

A) 1 B) 2 C) 10

D) 5 E) 7

**21.** De la expresión, hallar k:

$$K = \cos 50^\circ = \csc 50^\circ - \csc 10^\circ$$

A) 4 B) $-4$ C) $-4\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{3}$ E) $8\sqrt{3}$

**22.** Si: $\operatorname{sen} 32^\circ + \cos 34^\circ = a + t$
$\cos 32^\circ + \operatorname{sen} 34^\circ = a - t$
halle $\cos 12^\circ$ en términos de "a" y "t"

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}(a^2 + t^2)$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}(a + t)$
C) $\frac{\sqrt{3(a^2 - t^2)}}{3}$
D) $\frac{\sqrt{2(a^2 + t^2)}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{a^2 + t^2}}{2}$

**23.** Si: $A = \operatorname{sen}\theta \cos\beta$
$T = \operatorname{sen}(60^\circ + \theta)\cos(60^\circ + \beta)$
$E = \operatorname{sen}(\theta - 60^\circ)\cos(\beta - 60^\circ)$
Halle el equivalente de "A + T + E"

A) $3\cos(\theta + \beta)$ B) $3\operatorname{sen}(\theta - \beta)$
E) $-3\cos(\theta - \beta)$
D) $\frac{3}{2}\operatorname{sen}(\theta - \beta)$ C) $\frac{3}{2}\cos(\theta + \beta)$

**24.** Si la siguiente igualdad es una identidad:

$$\frac{2\cos 2x \operatorname{sen} 10x - \operatorname{sen} 4x}{\operatorname{sen} 4x \operatorname{sen} 8x \operatorname{sen} 12x} = A\csc\left[\frac{x}{A}\right]\sec\left[\frac{2x}{A}\right]\csc\left[\frac{3x}{|A|}\right]$$

Halle el valor o valores de A

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right\}$
D) $\left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$ E) $\left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right\}$

**25.** Hallar:

$$H = \sec 70^\circ - \tan 50^\circ$$

A) 1 B) 4 C) $\sqrt{3}$
D) 2 E) $2\sqrt{3}$

**26.** Si: $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)\operatorname{sen}(\alpha + y) = \cos(\beta - y)$
Hallar el valor de:
"$\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha + y)$"

A) 1 B) 2 C) 0
D) $-2$ E) -1

**27.** Halle el equivalente de:

$$\frac{1 + 2\operatorname{sen}\phi}{\sqrt{3} + 2\cos\phi} + \frac{4\operatorname{sen}\left(\frac{\phi}{2} - \frac{\pi}{12}\right)}{2\operatorname{sen}\phi - 1}$$

A) $\cot\left(\frac{5\pi}{24} - \frac{\phi}{4}\right)$ B) $\tan\left(\frac{5\pi}{24} + \frac{\phi}{4}\right)$
C) $\sec\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{9}\right)$
D) $\csc\left(\frac{\phi}{4} - \frac{5\pi}{12}\right)$ E) $\csc\left(\frac{5\pi}{24} + \frac{\phi}{4}\right)$

**28.** Simplifique:

$$2(\cos A - \cos T)\cos\left(\frac{A+T}{2}\right)\cos\left(\frac{A-T}{2}\right) + \operatorname{sen}(A+T)\cdot\operatorname{sen}(A-T)$$

A) $\cos\left(\frac{A+T}{2}\right)$ B) $2\operatorname{sen}\left(\frac{A-T}{2}\right)$
C) $\csc\left(\frac{A+T}{2}\right)$
D) 1 E) 0

**29.** Dado el triángulo ATN y $k \in \mathbb{Z}$, factorizar:

$$\operatorname{sen} 4KA + \operatorname{sen} 4KT + \operatorname{sen} 4KN$$

A) 4 sen 2KA . sen 2KT . sen 2KN
B) 4 cos 2KA . cos 2KT . cos 2KN
C) - 4 sen 2KA . sen 2KT . sen 2KN
D) - 4 cosKA . cos KT . cos KN
E) 4 secKA . sec KT . sec KN

**30.** Dado un triángulo ABC, halle el equivalente de:

$$(\operatorname{sen} 6A + \operatorname{sen} 6B + \operatorname{sen} 6C)^{-1}$$

A) 0,2 5 sen 3A sen 3B sen 3C
B) 4 csc 3A csc 3B csc 3C
C) 0,25 cos 3A cos 3B cos 3C
D) 4 sec 3A sec 3B sec 3C
E) 0,5 csc 3A csc 3B csc 3C

**A todo el público en general:**

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

**Este libro no debe ser prostituito monetariamente**, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

**28 de agosto del 2020**

**31.** Simplificar:
$E = \text{sen}5° + \text{sen}10° + \text{sen}15° + ... + \text{sen}900°$

A) $\cos(2°30')$ B) $\cos(4°30')$
C) $\text{sen}(2°30')$
D) $\cos(5°30')$ E) $\text{sen}(4°30')$

**32.** Simplificar:
$$W = \text{sen}^2\left(\frac{1°}{2}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{3°}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{5°}{2}\right) - ...$$
$$...\text{sen}^2\left(\frac{89°}{2}\right)$$

A) $\frac{1}{2}(90 - \csc 1°)$ B) $\frac{1}{2}(45 - \csc 1°)$
C) $\frac{1}{4}(90 - \csc 1°)$
D) $\frac{1}{4}(90 + \csc 1°)$ E) $\frac{1}{2}(45 + \csc 1°)$

**33.** Si: $A + B + C = \pi$
Factorizar:
$\text{sen}2A + \text{sen}2B - \text{sen}2C$

A) $-4\text{sen}C\cos A\cos B$
B) $4\cos A\,\text{sen}B\,\text{sen}C$
C) $4\text{sen}C\cos A\cos B$
D) $-4\cos C\,\text{sen}A\,\text{sen}B$
E) $4\text{sen}A\,\text{sen}B\,\text{sen}C$

**34.** Hallar un valor de "x" en la igualdad:
$$\tan x = \frac{\sqrt{3}\cos 20° - \text{sen}\,40°}{1 + \text{sen}\,10°}$$

A) 210° B) 50° C) 70°
D) $-140°$ E) $-130°$

**35.** Hallar el valor de:
$$L = \text{sen}^2\frac{2\pi}{7} + \text{sen}^2\frac{4\pi}{7} + \text{sen}^2\frac{8\pi}{7}$$

A) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ C) $\frac{3}{4}$
D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{7}{4}$

**36.** Se toman los puntos A, B, C, D de una circunferencia, de modo que los arcos AB, BC y CD subtiendan respectivamente ángulos en el centro de valores $120° + 2\alpha$, $4\alpha$ y $120° - 2\alpha$. Hallar el valor de "$\alpha$" si BC es la media aritmética de AB y CD.

A) $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ B) $\arccos\left(\frac{1}{4}\right)$
C) $\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$
D) $\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ E) $\text{arcsen}\left(\frac{1}{4}\right)$

**37.** A qué es igual la siguiente expresión:
$$\left(1 - \cos 2\frac{\pi}{7}\right)\left(1 - \cos 4\frac{\pi}{7}\right)\left(1 - \cos 6\frac{\pi}{7}\right)$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{8}$
D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{7}{8}$

**38.** Los ángulos que miden A, B y C de un triángulo y que forman una progresión aritmética de razón $\theta$. También la suma de senos de estos ángulos es $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{2}$. Hallar: $\cos^2\theta$

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{1}{16}$ C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{2}{3}$

**39.** Expresar como un producto a:
$$R = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{6}$$

A) $8\,\text{sen}25°30'\,\text{sen}7°30'$
B) $-8\,\text{sen}25°30'.\,\text{sen}10°30'$
C) $-8\,\text{sen}18°30'\,\text{sen}7°30'$
D) $8\,\text{sen}25°30'\cos 10°30'$
E) $-8\cos 18°30'\cos 10°30'$

team CALAPENSHKO


**40.** Calcular el valor de:

$$E = \tan^2\frac{\pi}{7} + \tan^2\frac{3\pi}{7} + \tan^2\frac{5\pi}{7}$$

A) 13 B) 18 C) 21
D) 24 E) 49

**41.** Degradar:

$$32\cos^2x \cdot \operatorname{sen}^4x$$

A) $3 - \cos2x + 6\cos4x + \cos6x$
B) $3 + \cos2x + 4\cos4x + \cos6x$
C) $2 - \cos2x + 4\cos4x + \cos6x$
D) $2 - \cos2x - 2\cos4x + \cos6x$
E) $2 + \cos2x - \cos4x + \cos6x$

**42.** Si:

$$W = \frac{4\operatorname{sen}4\theta + \tan6\theta}{4\operatorname{sen}2\theta + \tan3\theta}$$

Hallar el valor de W para: $\theta = \frac{\pi}{11}$

A) $-1$ B) 0 C) 1
D) 2 E) $-2$

**43.** Hallar la variación de:

$$W = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(x + 2\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(x + 4\frac{\pi}{3}\right)$$

Para toda variable angular "x" positivo y menor que una vuelta, comprendida en el segundo cuadrante.

A) $\langle -1; 0\rangle$ B) $\left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right\rangle$ C) $\left[-1; -\frac{1}{2}\right\rangle$
D) $\left[-1; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\rangle$ E) $\left\langle -1; -\frac{1}{2}\right\rangle$

**44.** En un triángulo ABC, hallar el equivalente de:

$$\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C$$

A) $1 + 2\cos A\cos B\cos C$
B) $1 + 2\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C$
C) $1 - 4\cos A\cos B\cos C$
D) $1 - 2\cos A\cos B\cos C$
E) $1 - 2\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C$

**45.** Si: $x + y + z = n$, además:

$$\cos x + \cos y + \cos z = 2\operatorname{sen}x + 1$$

Hallar:

$$\cot\frac{y}{2} + \cot\frac{z}{2}$$

A) 1 B) 2 C) 4
D) 1/2 E) 1/4

**46.** Si:

$$\operatorname{sen}^2x\cos^4x = A + B\cos2x + C\cos4x + D\cos6x$$

Hallar:

$$\sqrt[6]{A \cdot B \cdot C \cdot D}$$

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{1}{2}$ E) 2

**47.** Eliminar $\theta$ y $\phi$ si:

$$\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\phi = a \quad \text{.....(1)}$$
$$\cos\theta - \cos\phi = b \quad \text{.....(2)}$$
$$\tan(\theta - \phi) = c \quad \text{.....(3)}$$

A) $2ab = c(a^2 + b^2)$
B) $2ab = c(a^2 - b^2)$
C) $2ac = b(a^2 + b^2)$
D) $2ac = b(a^2 - b^2)$
E) $2bc = a(a^2 + b^2)$

**48.** Si:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{11}\right)\cos\left(y - \frac{\pi}{11}\right)\cos(x + y) = \frac{1}{3}$$

Hallar el valor de:

$$H = \operatorname{sen}^2\left(x + \frac{\pi}{11}\right) + \operatorname{sen}^2\left(y - \frac{\pi}{11}\right) + \operatorname{sen}^2(x + y)$$

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{4}{3}$
D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{5}{6}$

team CALAPENSHKO



**49.** Hallar "n" si la expresión:

$$P = 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{11} + \tan\frac{2\pi}{11}$$

se transforma en: $n\csc\theta \cdot \csc 2\theta$

A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{7}}{4}$

D) $\frac{\sqrt{11}}{4}$ E) $\frac{\sqrt{13}}{4}$

**50.** Indicar el valor de "cosx" para que la siguiente sumatoria tome su mínimo valor:

$$E=\left(\cos\frac{2\pi}{2n+1}-\cos x\right)^2+\left(\cos\frac{4\pi}{2n+1}-\cos x\right)^2+\ldots$$
$$\ldots+\left(\cos\frac{2n\pi}{2n+1}-\cos x\right)^2$$

A) n B) $-\frac{1}{n}$ C) $\frac{1}{n}$

D) $\frac{1}{2n}$ E) $-\frac{1}{2n}$

CALAPENSHKO

team CALAPENSHKO

Capítulo 12

# Funciones Trigonométricas

**CAPACIDADES**

- Comprender la teoría de funciones trigonométricas.
- Conocer el dominio, rango y regla de correspondencia entre otras características.
- Aplicar el estudio de las funciones a situaciones de la vida diaria.

## APORTES DE LEONARD EULER A LA MATEMÁTICAS

Algunos de los mayores éxitos de Euler fueron en la resolución de problemas del mundo real a través del análisis matemático, en lo que se conoce como matemática aplicada, y en la descripción de numerosas aplicaciones de los números de Bernoulli, las series de Fourier, los diagramas de Venn, el número de Euler, las constantes e y p, las fracciones continuas y las integrales. Integró el cálculo diferencial de Leibniz con el Método de Fluxión de Newton, y desarrolló herramientas que hacían más fácil la aplicación del cálculo a los problemas físicos. Euler ya empleaba las series de Fourier antes de que el mismo Fourier las descubriera y las ecuaciones de Lagrange del cálculo variacional, las ecuaciones de Euler-Lagrange.

LEONARD EULER
(1707 – 1783)

Hizo grandes avances en la mejora de las aproximaciones numéricas para resolver integrales, inventando lo que se conoce como las aproximaciones de Euler. Las más notable de estas aproximaciones son el método de Euler para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, y la fórmula de Euler-Maclaurin.

Euler ayudó a desarrollar la ecuación de la Curva elástica, que se convirtió en el pilar de la ingeniería. Aparte de aplicar con éxito sus herramientas analíticas a los problemas de mecánica clásica, Euler también las aplicó sobre los problemas de los movimientos de los astros celestes basándose en los cálculos obtenidos a través de las curvas senoidales, dando los primeros pasos para el desarrollo de las funciones trigonométricas.

Su trabajo en astronomía fue reconocido mediante varios Premios de la Academia de Francia a lo largo de su carrera, y sus aportaciones en ese campo incluyen cuestiones como la determinación con gran exactitud de las órbitas de los cometas y de otros cuerpos celestes.

En el campo de la mecánica Euler, en su tratado de 1739, introdujo explícitamente los conceptos de partícula y de masa puntual y la notación vectorial para representar la velocidad y la aceleración, lo que sentaría las bases de todo el estudio de la mecánica hasta Lagrange. En el campo de la mecánica del sólido rígido definió los llamados «tres ángulos de Euler para describir la posición» y publicó el teorema principal del movimiento, según el cual siempre existe un eje de rotación instantáneo, y la solución del movimiento libre (consiguió despejar los ángulos en función del tiempo).

team CALAPENSHKO


## INTRODUCCIÓN

Sin duda alguna una característica importante de las funciones trigonométricas es su peridiocidad (se repite una y otra vez), estos fenómenos ocurren en la naturaleza como la luz, el sonido y la electricidad.

Así en el presente capítulo estudiaremos las propiedades y gráficas de las funciones trigonométricas. Antes veremos algunos conceptos previos.

# FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

## NOCIONES PREVIAS

### FUNCIÓN

Es el conjunto de pares ordenados (x; y) tal que para cada valor de la primera componente (x) le corresponde uno y solo un valor de la segunda componente (y)

**Ejemplos:**

- $A = \{(0; 1), (2; 3); (\sqrt{2}; 4)\}$
- $B = \{(0; 0), (\sqrt{3}; -1); (\sqrt{2}; -1)\}$

### DOMINIO DE UNA FUNCIÓN (Dom)

Es el conjunto de valores que toman las primeras componentes de la función.

**Ejemplos:**

- $\text{Dom } A = \{0; 2; \sqrt{2}\}$
- $\text{Dom } B = \{0; \sqrt{3}; \sqrt{2}\}$

twitter.com/calapenshko

### RANGO DE UNA FUNCIÓN (Ran)

Es el conjunto de valores que toman las segundas componentes de la función.

**Ejemplos:**

- $\text{Ran } A = \{1; 3; 4\}$
- $\text{Ran } B = \{0; -1\}$

### REGLA DE CORRESPONDENCIA

Es la relación matemática que existe entre la primera y segunda componente de la función, y se denota:

$$y = f(x)$$

Donde:

- f : Relación matemática
- x : Variable independiente ..... 1ra componente
- y : Variable dependiente ..... 2da componente

**Ejemplos:**

- $y = 2x^2$
- $y = |x| + 1$
- $y = \log(x - 1)$
- $y = \text{sen } x$

team CALAPENSHKO


## GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

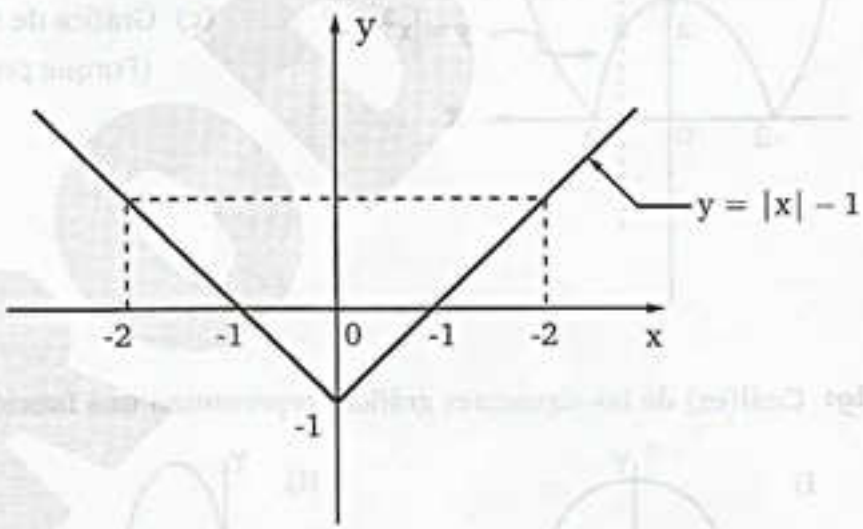
La gráfica de una función es la representación en el plano cartesiano de los pares ordenados que forman la función mediante la regla de correspondencia: $y = f(x)$

**Ejemplo:** Construir la gráfica de la función

$$y = f(x) = |x| - 1$$

**Resolución:** Es evidente que el Dominio de la función es $\mathbb{R}$, efectuamos la tabulación para algunos valores y así obtener los pares ordenados.

| x | ..... | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | ..... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | ..... | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | ..... |




## PRUEBA DE LA RECTA VERTICAL PARA UNA FUNCIÓN DE LA FORMA y=f(x)

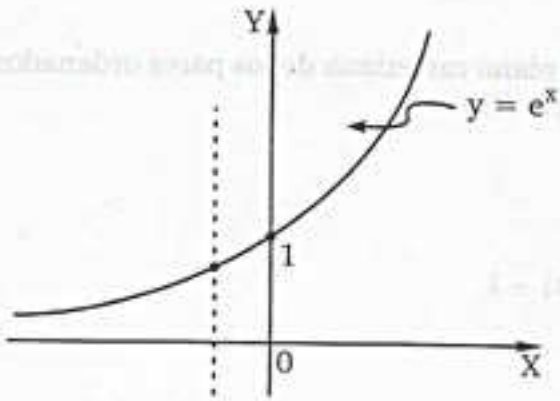
Por la definición de una función sabemos que por cada x en el dominio de f corresponde un valor único f(x) en el rango . Esto significa que cualquier recta vertical que intersecta la gráfica de f puede hacerlo como un máximo en un punto. Y viceversa, si cada recta verticalmente intersecta la gráfica de una relación por lo menos en un punto, entonces la relación es una función.

**Ejemplo:**

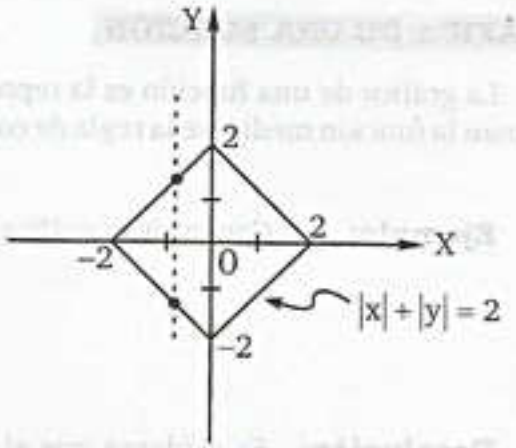
I. En la figura vemos que cualquier recta vertical intersecta la gráfica de la relación definida por $y=e^x$, en máximo un punto. Por lo tanto, la relación determina una función $y=f(x)$.

II. Como la muestra de la figura, una recta vertical puede intersectar la gráfica de la relación por $|x| + |y| = 2$, en más de un punto . Por lo tanto, la relación no determina una función $y=f(x)$.

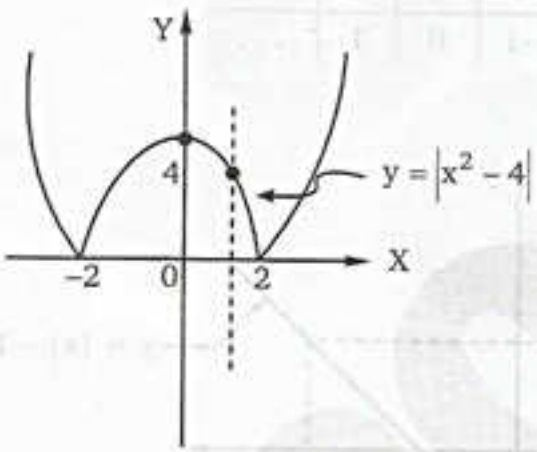
team CALAPENSHKO


(a) Gráfica de una función (Porque toda línea vertical la corta a lo más en un punto)



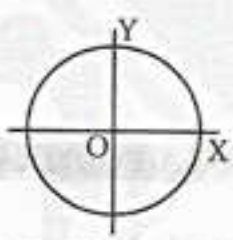

(b) No es la gráfica de una función (Porque presenta dos puntos de corte)



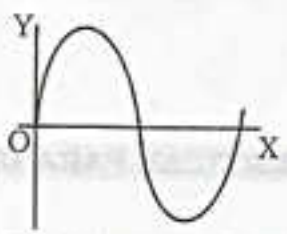

(c) Gráfica de una función (Porque presenta un solo punto de corte)

**Ejemplo:** Cuál(es) de las siguientes gráficas representan una función:

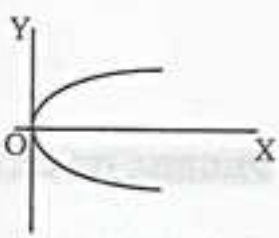
I)



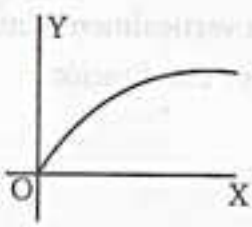

II)



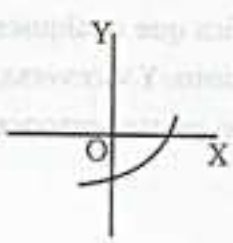

III)



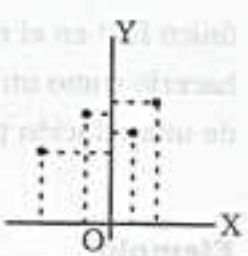

IV)




V)




VI)



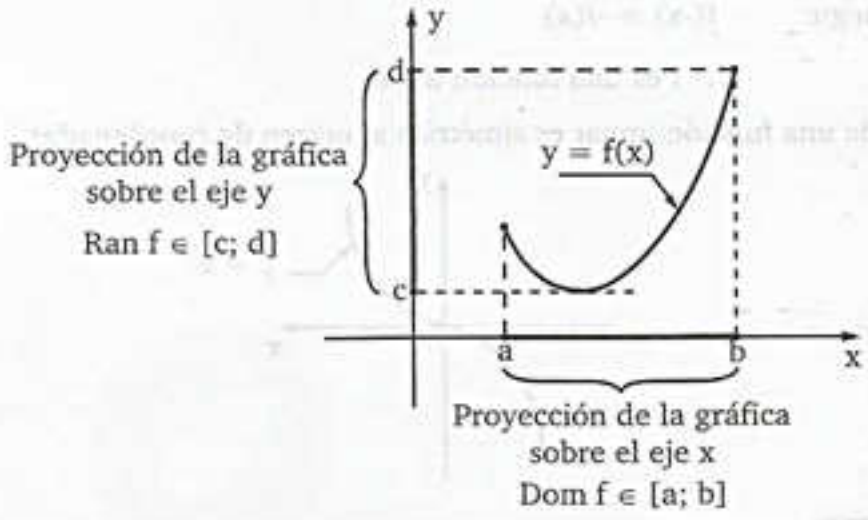

**Solución:** * Las gráficas I y III no representan una función, ya que si trazamos una recta vertical las interseca en dos puntos.

* Las gráficas II, IV, V y VI *sí* representan una función.

team CALAPENSHKO


**NOTA**

La proyección del gráfico de la función y = f(x) sobre el eje x nos indica el dominio de f y sobre el eje y nos indica el rango




## CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES

### FUNCIÓN PAR

Una función f es par si:

$$f(-x) = f(x) \; ; \; \forall \; x; -x \in \text{Dom } f$$

**Ejemplo:** Sea: $y = f(x) = x^2 + 1$

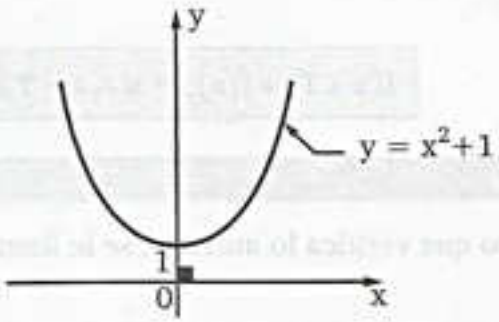
Probando: $f(-x) = (-x)^2 + 1$

$f(-x) = x^2 + 1$

Luego: $f(-x) = f(x)$

$\therefore$ f es una función par

**OBS:** La gráfica de una función par es simétrica al eje y




### FUNCIÓN IMPAR

Una función f es impar si:

$$f(-x) = -f(x) \; ; \; \forall \; x; -x \in \text{Dom } f$$

team CALAPENSHKO



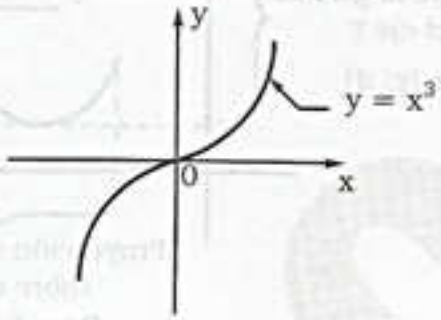
**Ejemplo:** Sea: $y = f(x) = x^3$

Probando: $f(-x) = (-x)^3$
$f(-x) = -x^3$

Luego: $f(-x) = -f(x)$

$\therefore$ f es una función impar

**OBS:** La gráfica de una función impar es simétrica al origen de coordenadas.




## FUNCIÓN CRECIENTE

Una función f es creciente en un intervalo I de su dominio, si para todo par $x_1$ y $x_2$ se cumple:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

**Ejemplo:** La función $y = x^2 + 1$ es creciente $\forall\, x \in [0; +\infty\rangle$

## FUNCIÓN DECRECIENTE

Una función f es decreciente en un intervalo I de su dominio, si para todo par $x_1$ y $x_2$ se cumple:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

**Ejemplo:** La función $y = x^2 + 1$ es creciente $\forall\, x \in \langle -\infty; 0]$

## FUNCIÓN PERIÓDICA

Una función f es de periódica, si existe un número real $T \neq 0$, tal que para cualquier x de su dominio se cumple:

$$f(x + T) = f(x);\ \forall\ x \wedge x + T \in \text{Dom } f$$

**OBSERVACIÓN**

Al menor T positivo que verifica lo anterior, se le llama "período mínimo" o simplemente periodo.

**Ejemplo:** Calcular el periodo mínimo de la siguente función: $f(x) = \text{sen}x$

**Resolución: (I)** Entonces: $f(x + T) = f(x)$

$\Rightarrow \text{sen}(x + T) = \text{sen } x$

team CALAPENSHKO


Desarrollando: $\text{sen}x\cos T + \cos x \,\text{sen}T = \text{sen}x$

Para que se cumpla lo anterior:

$$\cos T = 1 \wedge \text{sen}\, T = 0 \Rightarrow T = 2k\pi$$

$$\Rightarrow \; T = \ldots -2\pi;\ 0;\ 2\pi;\ 4\pi;\ 6\pi, \ldots$$

$\therefore$ **El periodo mínimo es $2\pi$**

TAMBIEN:

**Resolución: (II)**

$f(x + T) = f(x) \Rightarrow \text{sen}(T + x) = \text{sen}\, x$

Se busca un valor para $T = \left\{\frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right\}$, el menor, que al reemplazar por reducción al primer cuadrante, te reprodusca el segundo miembro.

Luego:

i) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \text{sen}x \Rightarrow \cos x = \text{sen}x$ (No verifica)

ii) $\text{sen}(\pi + x) = \text{sen}x \Rightarrow \text{sen}x = -\text{sen}x$ (No verifica)

iii) $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \text{sen}x \Rightarrow -\cos x = \text{sen}x$ (No verifica)

iv) $\text{sen}(2\pi + x) = \text{sen}x \Rightarrow \text{sen}x = \text{sen}x$ (Si verifica)

Entonces : $T = 2\pi$ $(T : \text{menor})$

## HALLANDO LOS PERIODOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Sea la función: $\boxed{f(x) = A.FT^{n}[kx + R] + D}$ ...(I)

Para calcular su periodo (T) intervienen las constantes n y k.

I) Si la Función Trigonométrica es: sen, cos, sec y csc

* para n impar:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{|k|}}$$

* para n par:

$$\boxed{T = \frac{\pi}{|k|}}$$

II) Si la Función Trigonométrica es: tan y cot

* para "n" par ó impar:

$$\boxed{T = \frac{\pi}{|k|}}$$

**Ejemplo:**

**1.** $f(x)=2\operatorname{sen}^3\left(2x+\frac{\pi}{8}\right) \Rightarrow T=\frac{2\pi}{2}=\pi$

**2.** $f(x)=\sec^6\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{14}\right) \Rightarrow T=\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$

**3.** $f(x)=\sqrt{2}\tan^5\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow T=\frac{\pi}{3}$

Si: $f(x)=6\operatorname{sen}x$ y $g(x)=7\cos 2x$

Cuál es el período de: $h(x)=6\operatorname{sen}x-7\cos 2x$

**Resolución:**

Sabemos que el período mínimo de: $f(x)=6\operatorname{sen}x$ es $2\pi$ y de $g(x)=7\cos 2x$ es $\pi$, podemos observar que no coinciden, entonces buscamos otro período de $g(x)$ hasta que coincida con el de $f(x)$. Los períodos de:

$g(x)=7\cos 2x$ son : $\pi,\ 2\pi,\ 3\pi, 4\pi$

$\therefore\ h(x)=6\operatorname{sen}x-7\cos 2x$ ... su periodo es : $\boxed{2\pi}$

**Cuando se tiene una suma de funciones trigonométricas, el período se calcula tomando el mínimo común múltiplo de los períodos que intervienen.**

Sea : $F(x)=\underbrace{H_1(x)}_{T_1}+\underbrace{H_2(x)}_{T_2}+\underbrace{H_3(x)}_{T_3}+.....+\underbrace{H_n(x)}_{T_n}$

Período de : $F(x)=T_{F(x)}=MCM(T_1, T_2, T_3, ....., T_n)$

Debido a que generalmente los períodos se expresan como una fracción, entonces el MCM se calcula así:

$$MCM(T_1, T_2, ....., T_n)=\frac{MCM(\text{numeradores de } T_1\ \ T_2, ....., T_n)}{MCD\ (\text{denominadores de } T_1, T_2, ....., T_n)}$$

**Ejemplos:**

a) Si $F(x)=\cos 5x-\operatorname{sen}3x-\cos\frac{4x}{3}$, hallar el período de $F(x)$.

**Resolución:**

$$F(x)=\underbrace{\cos 5x}_{T_1}-\underbrace{\operatorname{sen}3x}_{T_2}-\underbrace{\cos\frac{4x}{3}}_{T_3}$$

(*) Se deduce que :

$$T_1=\frac{2\pi}{5};\ T_2=\frac{2\pi}{3};\ T_3=\frac{2\pi}{\frac{4}{3}}=\frac{3\pi}{2}$$

$$MCM(T_1, T_2, T_3)=\frac{MCM(2\pi; 2\pi; 3\pi)}{MCD(5; 3; 2)}=\frac{6\pi}{1} \Rightarrow T_{F(x)}=6\pi$$

**A todo el público en general:**

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

**Este libro no debe ser prostituito monetariamente**, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

**28 de agosto del 2020**

team CALAPENSHKO


b) Hallar el período de : $G(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - 48x\right) + \cos\left(\frac{24x - \pi}{5}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{12x}{7}\right)$

**Resolución:** (*) Dato : $G(x) = \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - 48x\right)}_{T_1} + \underbrace{\cos\left(\frac{24x}{5} - \frac{\pi}{5}\right)}_{T_2} + \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{12x}{7}\right)}_{T_3}$

(*) Se deduce que:

$$T_1 = \frac{2\pi}{48} \Rightarrow T_1 = \frac{\pi}{24};\ T_2 = \frac{2\pi}{\frac{24}{5}} \Rightarrow T_2 = \frac{5\pi}{12};\ T_3 = \frac{2\pi}{\frac{12}{7}} \Rightarrow T_3 = \frac{7\pi}{6}$$

$$(*) \qquad MCM(T_1, T_2, T_3) = \frac{MCM(\pi; 5\pi; 7\pi)}{MCD(48; 24; 6)} = \frac{35\pi}{6} \Rightarrow T_{G(x)} = \frac{35\pi}{6}$$

**De la observación número 4 se puede deducir un caso que se usa con mucha frecuencia.**

$0 \le \operatorname{sen}^2 x \le 1$ $\quad \tan^2 x \ge 0$ $\quad \sec^2 x \ge 1$

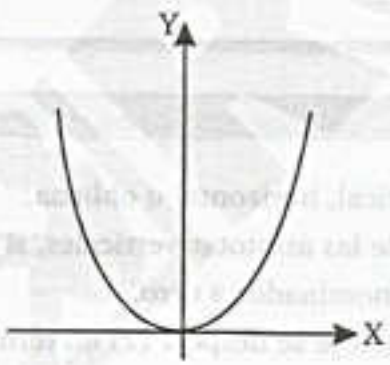
$0 \le \cos^2 x \le 1$ $\quad \cot^2 x \ge 0$ $\quad \csc^2 x \ge 1$

## CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

El concepto de continuidad de una función requiere de conocimientos un poco más avanzados de la matemática, pero en forma "Intuitiva" se puede decir que :

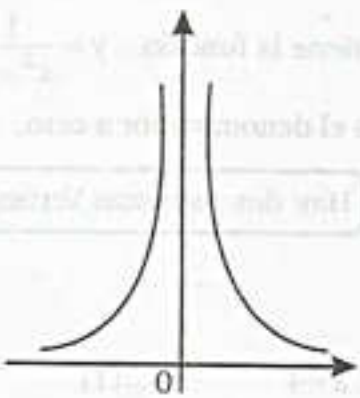
Una función es continua en un intervalo , cuando al graficarla , su curva se realiza mediante un trazo ininterrumpido .

**Ejemplo :**




En la figura adjunta se muestra la gráfica de la función $y=x^2$. Observamos que la curva no tiene interrupciones, entonces se dice que dicha función es continua.

Una función es Discontinua, cuando al trazar su gráfica ésta presenta saltos o interrupciones.




En la figura adjunta se muestra la gráfica de la función: $y = \frac{1}{x^2}$. Observa que la curva en $x=0$ está interrumpida , es decir presenta un "salto". Entonces se dice que la función es DISCONTINUA en $x=0$.

**OBSERVACIÓN**

Dada una función y=f(x) tal que no está definida para algún a algunos valores de x, por ejemplo $x_1$ ; $x_2$ y $x_3$. Entonces se dice que dicha función es discontinua y que $x_1$ ; $x_2$ y $x_3$ son puntos de Discontinuidad.

**Ejemplo :**

$$y = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$$

Observamos que esta función no está definida para x=1 y x=2.

Entonces dicha función es discontinua y x=1, x=2 son puntos de discontinuidad.

**OBSERVACIÓN**

Las gráficas de algunas funciones discontinuas, presentan ASINTOTAS.
Las asíntotas son rectas a las cuales la curva (o gráfica de la función) se aproxima pero sin llegar a intersecar.
Las asíntotas se clasifican en:

Asíntotas horizontales; si es paralelo coincide con eje x.
Asíntotas verticales; si es paralelo o coincide con el eje y.
Asíntotas oblicuas; sino es paralela a ninguno de los ejes.

**OBSERVACIÓN**

1. Una curva puede tener más de una asíntota vertical, horizontal u oblicua.
2. En forma práctica para obtener las ecuaciones de las asíntotas verticales, si las hubiese , se despeja y en términos de (x) e igualmente el denominador a cero.
3. Para obtener las Asíntotas Horizontales si las hubiese se despeja (x) en términos de (y) e igualamos el denominador a cero.

**Ejemplo :** Determinar cuántas Asíntotas verticales tiene la función . $y = \frac{1}{x^2-4}$

**SOLUCIÓN:** * ASÍNTOTAS VERTICALES: igualamos el denominador a cero.

$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2$ $\therefore$ Hay dos Asíntotas Verticales

**Ejemplo:** Determinar las asíntotas de $y = \frac{1}{x-4}$

**SOLUCIÓN:** * ASÍNTOTAS VERTICALES $x-4=0 \Rightarrow x=4$ ...(1)

team CALAPENSHKO



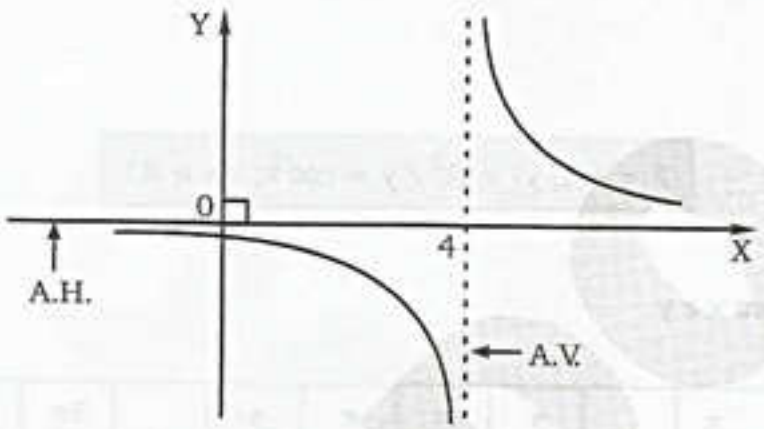
* ASÍNTOTAS HORIZONTALES : despejar x en términos de y.

$x = \dfrac{1+4y}{y}$ Igualamos el denominador a cero $y=0$. ...(2)

∴ Hay dos asíntotas:

Asíntota Vertical (A. V.) ..... $x=4$

Asíntota Horizontal (A. H.) ..... $y=0$




## ESTUDIO DE LAS GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

### FUNCIÓN SENO

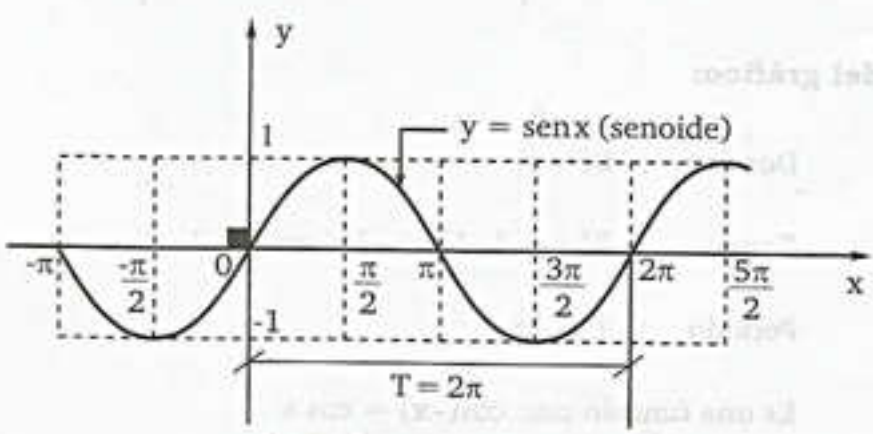
$$F = \{(x;y) / y = \operatorname{sen} x \ ; \ x \in \mathbb{R}\}$$

Tabulando valores para x e y

| x | $-\pi$ | $-\frac{\pi}{2}$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ | $\frac{5\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 0 | $-1$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 | $-1$ | 0 | 1 |

Llevando estos valores al sistema de coordenadas rectangulares obtenemos.

**Gráfica:**



**Análisis del gráfico:**

Domino : $Df \in \mathbb{R}$

Rango : $Rf \in [-1; 1] \Rightarrow -1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$

Período : $T = 2\pi$

Es una función impar : $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$

## FUNCIÓN COSENO

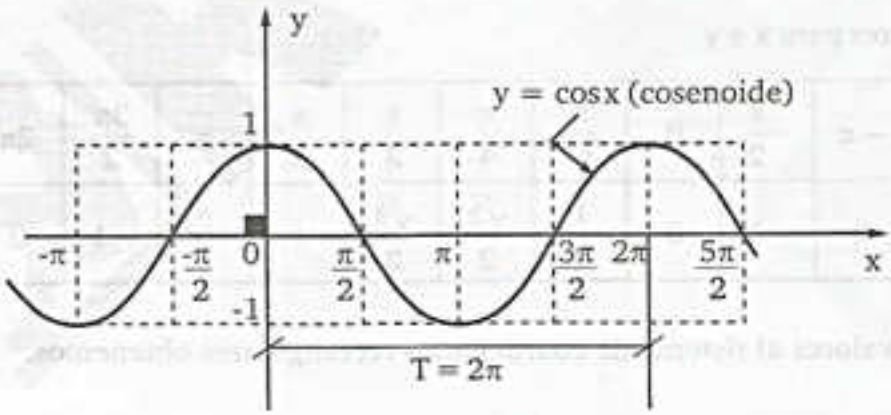
$$F = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = \cos x; \forall x \in \mathbb{R}\}$$

Tabulando valores para x e y

| x | $-\pi$ | $-\frac{\pi}{2}$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ | $\frac{5\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | $-1$ | 0 | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-1$ | 0 | 1 | 0 |

Llevando estos valores al sistema de coordenadas rectangulares obtenemos:

**Gráfica:**




**Análisis del gráfico:**

Dominio : $Df \in \mathbb{R}$

Rango : $Rf \in [-1; 1] \Rightarrow -1 \leq \cos x \leq 1$

Periodo : $T = 2\pi$

Es una función par: $\cos(-x) = \cos x$

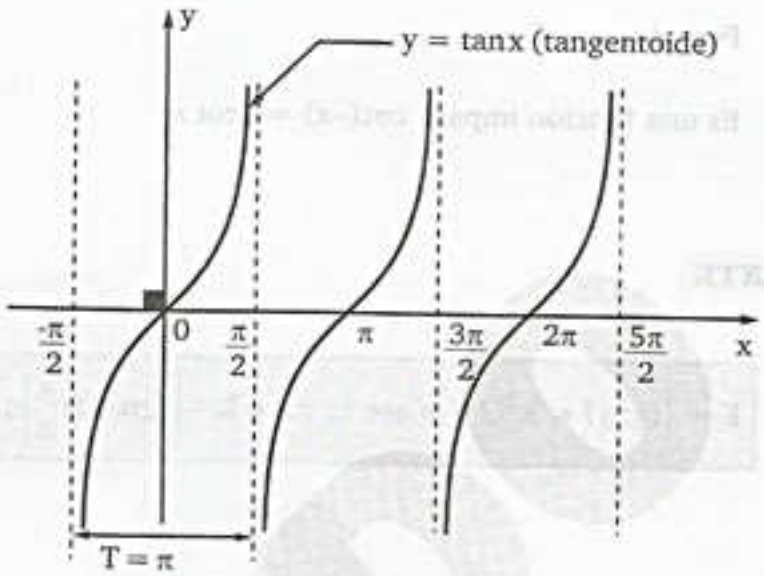
team CALAPENSHKO



## FUNCIÓN TANGENTE

$$F = \left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = \tan x; \forall x \in \mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}; n \in \mathbb{Z}\right\}$$

**Gráfica:**




**Análisis del gráfico:**

Dominio : $Df \in R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}; n \in \mathbb{Z}$

Rango : $Rf \in \mathbb{R}$

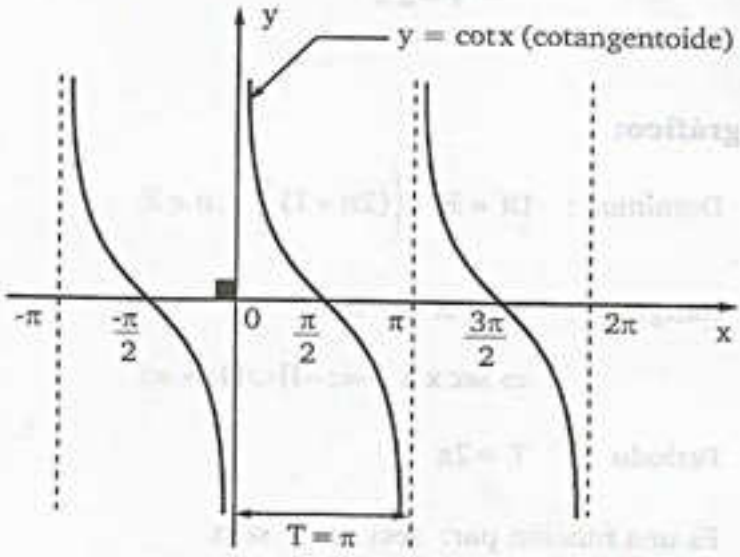
Periódo : $T = \pi$

Es una función impar: $\tan(-x) = -\tan x$

## FUNCIÓN COTANGENTE

$$F = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = \cot x; \forall x \in \mathbb{R} - \{n\pi\}; n \in \mathbb{Z}\}$$

**Gráfica:**



**Análisis del gráfico**

Dominio : $Df \in \mathbb{R} - \{n\pi\}\ ;\ n \in \mathbb{Z}$

Rango : $Rf \in \mathbb{R}$

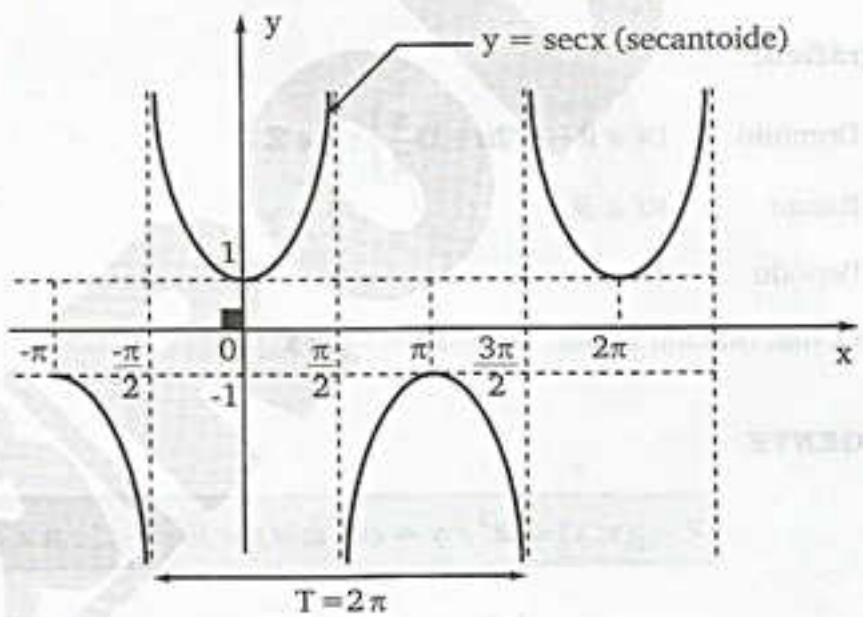
Periodo : $T = \pi$

Es una función impar : $\cot(-x) = -\cot x$

## FUNCIÓN SECANTE

$$F = \left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = \sec x;\ \forall x \in \mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}; n \in \mathbb{Z}\right\}$$

**Gráfica:**




**Análisis del gráfico:**

Dominio : $Df \in \mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}; n \in \mathbb{Z}$

Rango : $Rf \in \mathbb{R} - \langle -1; 1\rangle$

$\Rightarrow \sec x \in \langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$

Periodo : $T = 2\pi$

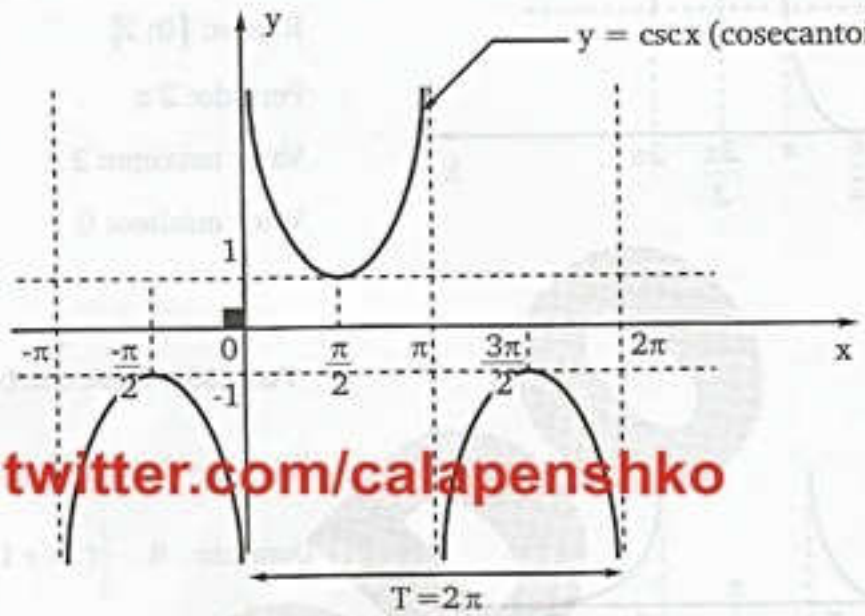
Es una función par: $\sec(-x) = \sec x$

team CALAPENSHKO


## FUNCIÓN COSECANTE

$$F = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = \csc x; \forall x \in \mathbb{R} - \{n\pi\}; n \in \mathbb{Z}\}$$

**Gráfica:**




twitter.com/calapenshko

**Análisis del gráfico:**

Dominio : $Df \in \mathbb{R} - \{n\pi\}\ ; n \in \mathbb{Z}$

Rango : $Rf \in \mathbb{R} - \langle -1; 1\rangle$

$\Rightarrow \csc x \in \langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$

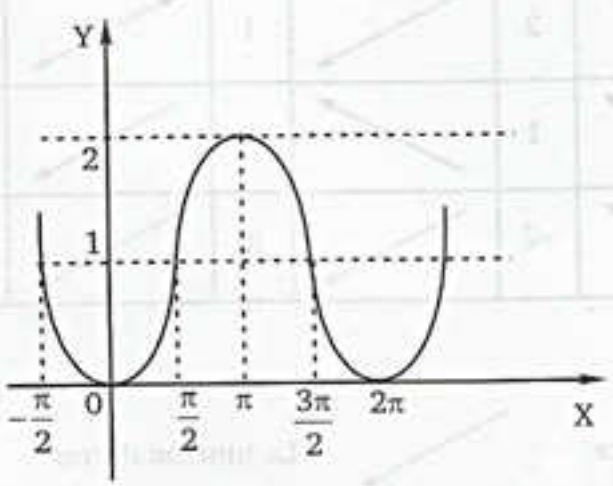
Período : $T = 2\pi$

Es una función impar: $\csc(-x) = -\csc x$

## FUNCIONES AUXILIARES

## GRÁFICA DE LAS FUNCIONES VERSO, CONVERSO Y EXSECANTE

Dominio - Rango - Período




* **Función Verso:**

$\{(x, y) / y = 1 - \cos x\} = \{(x, y) / y = \text{Vers } x\}$

Dominio: R o $\langle -\infty; +\infty\rangle$

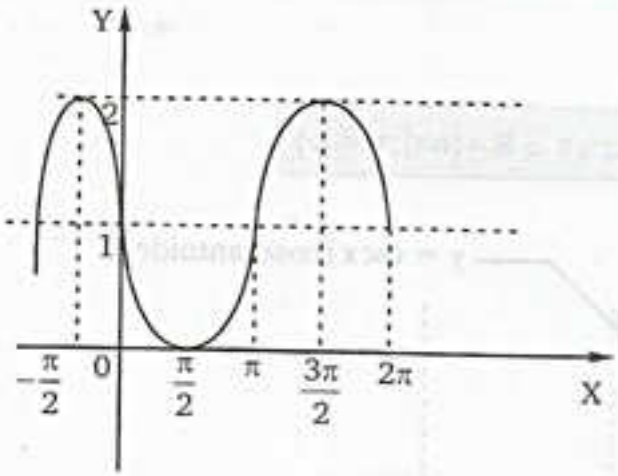
Rango: $[0; 2]$

Periodo: $2\pi$

Es una función par Vers $(-x) = \text{Vers } x$

Valor máximo: 2

Valor mínimo: 0




* **Función Coverso:**

$\{(x, y)/y = 1 - \operatorname{sen} x\} = \{(x, y)/y = \operatorname{Cov} x\}$

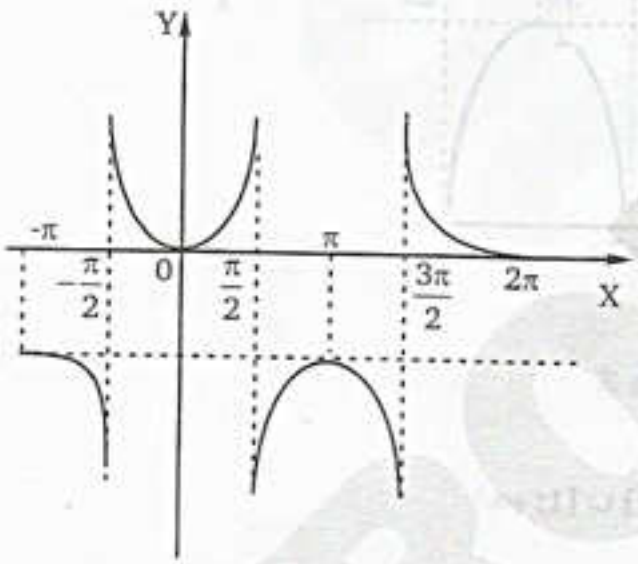
Dominio: $R$ o $\langle -\infty ; +\infty \rangle$

Rango: $[0; 2]$

Periodo: $2\pi$

Valor máximo: 2

Valor mínimo: 0




* **Función Exsecante:**

$\{(x,y)y = \sec x - 1\} = \{(x, y)/y = \operatorname{Ex}\sec x\}$

Dominio: $R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}, n \in \mathbb{Z}$

Rango : $R - \langle -2 ; 0\rangle$ o $\langle -\infty ; -2]\cup[0; +\infty\rangle$

Período: $2\pi$

Es una función par:

$$\operatorname{Exsec}(-x) = \operatorname{Ex}\sec(x)$$

## CUADRO DE VARIACIÓN DE LAS FUNCIONES VERSO, COVERSO Y EXSECANTE

| F.T. \ x | 0 | $0 < x < \frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ | $\pi$ | $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y=Vers x | 0 | ↗ | 1 | ↗ | 2 | ↘ | 1 | ↘ | 0 |
| y=Cov x | 1 | ↘ | 0 | ↗ | 1 | ↗ | 2 | ↘ | 1 |
| y=Exsecx | 0 | ↗ | $\nexists$ | ↗ | −2 | ↘ | $\nexists$ | ↘ | 0 |

↗ : La función crece ↘ : La función decrece

team CALAPENSHKO


## ANÁLISIS DE LA GRÁFICA $y = A \operatorname{sen}(kx + \theta) + B$

Podemos trazar rápidamente gráficas de funciones trigonométricas dibujando sólo puntos "críticos" y uniendo estos puntos con una curva suave. En esta sección investigaremos el comportamiento de A, k y θ.

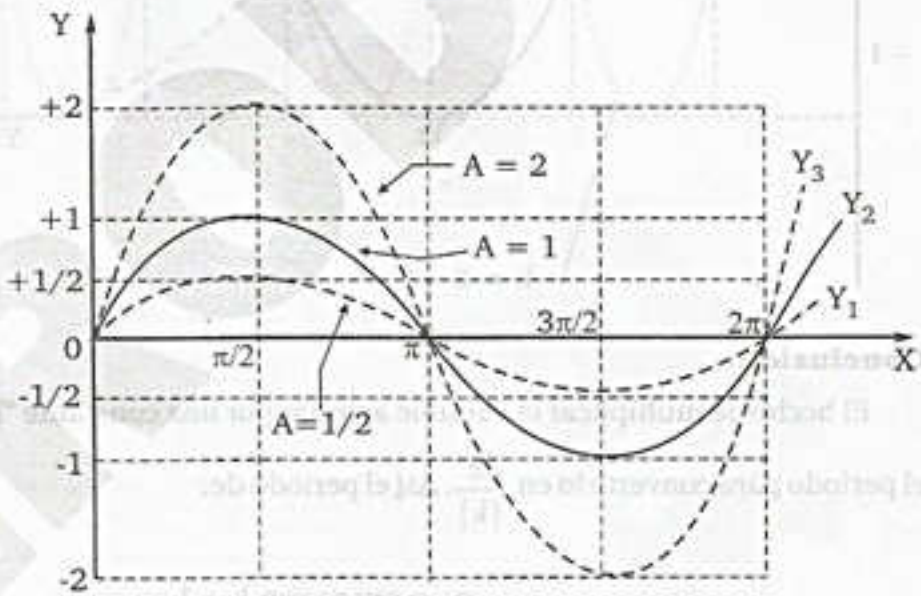
### Variación de "A"

Recordemos que la función seno, o, (coseno) oscila entre -1, y, +1. Si multiplicamos sen x por una constante positiva A, podemos entonces escribir y = A sen x, y puesto que:

$$-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1, \text{ deducimos que: } -A \leq A \operatorname{sen} x \leq A$$

El término designado A se llama amplitud de la onda senoidal. Si A > 1, la amplitud de la onda aumenta; si A < 1, la amplitud disminuye. A continuación ilustramos en una misma gráficas: y = A senx, y para: A = 1; 1/2;2.

Asi:




$y_1 = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x$ $y_2 = \operatorname{sen} x$ $y_3 = 2 \operatorname{sen} x$

**Conclusión:**

La función seno o coseno no altera su periodo original, es decir; $y_1$; $y_2$; $y_3$ tienen el mismo periodo ($2\pi$); el valor de "A" solamente alarga o acorta a la onda en forma vertical.

Para determinar la amplitud de una función senoidal de la forma:

$$y = A \operatorname{sen}(kx + \theta) + B$$

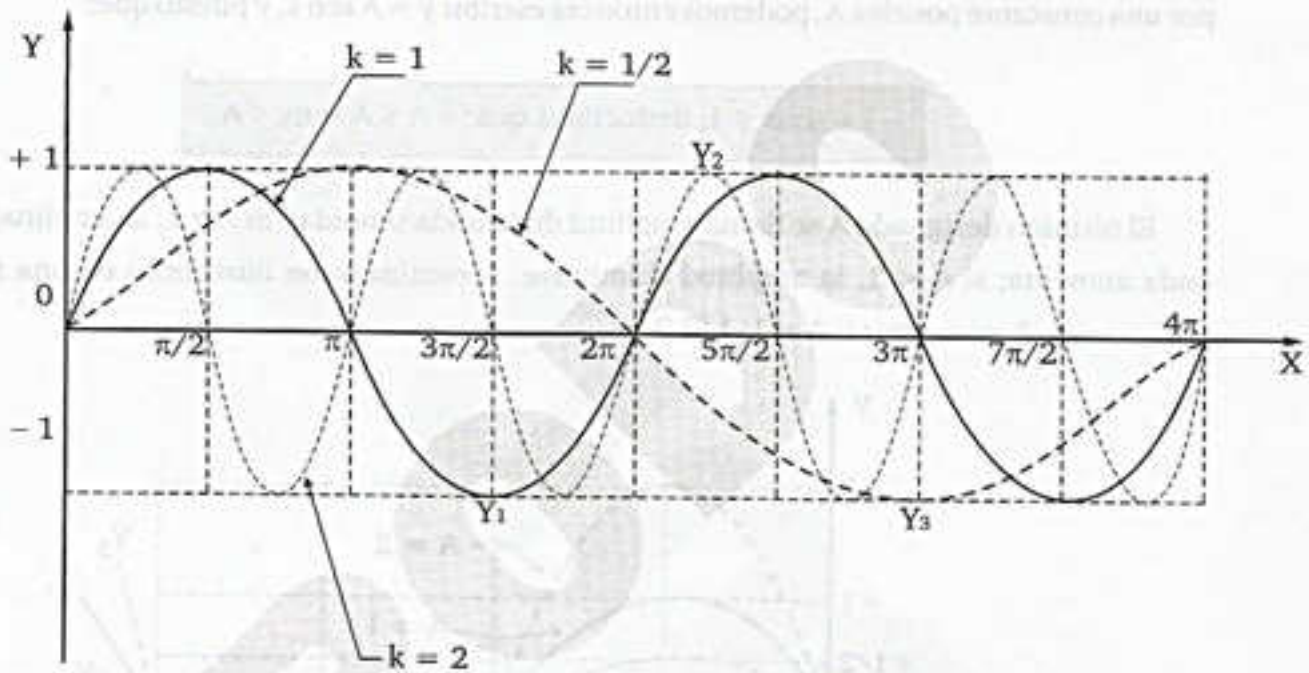
Utilizamos la relación:

$$|A| = \frac{A_{Máx.} - A_{Mín.}}{2}$$

**Variación de "k"**

Si **sen x** tiene su variable angular multiplicado por una constante **k**, la función se convierte en **sen kx**. La gráfica de esta nueva función permanece en forma senoidal. A continuación ilustramos en una misma gráfica:

$$y = \operatorname{sen} k\,x \quad \text{para: } k = 1, 2, \frac{1}{2}\text{; Asi :}$$




**Conclusión:**

El hecho de multiplicar la variable angular por una constante "k", tiene el efecto de alterar el periodo para convertirlo en $\frac{2\pi}{|k|}$. Así el periodo de:

$$y_1 = \operatorname{sen} x\,;\, \text{con } k = 1$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

$$y_2 = \operatorname{sen} 2x;\, \text{con } k = 2$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$y_3 = \operatorname{sen} \frac{x}{2};\, \text{con } k = \frac{1}{2}$$

$$T_3 = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

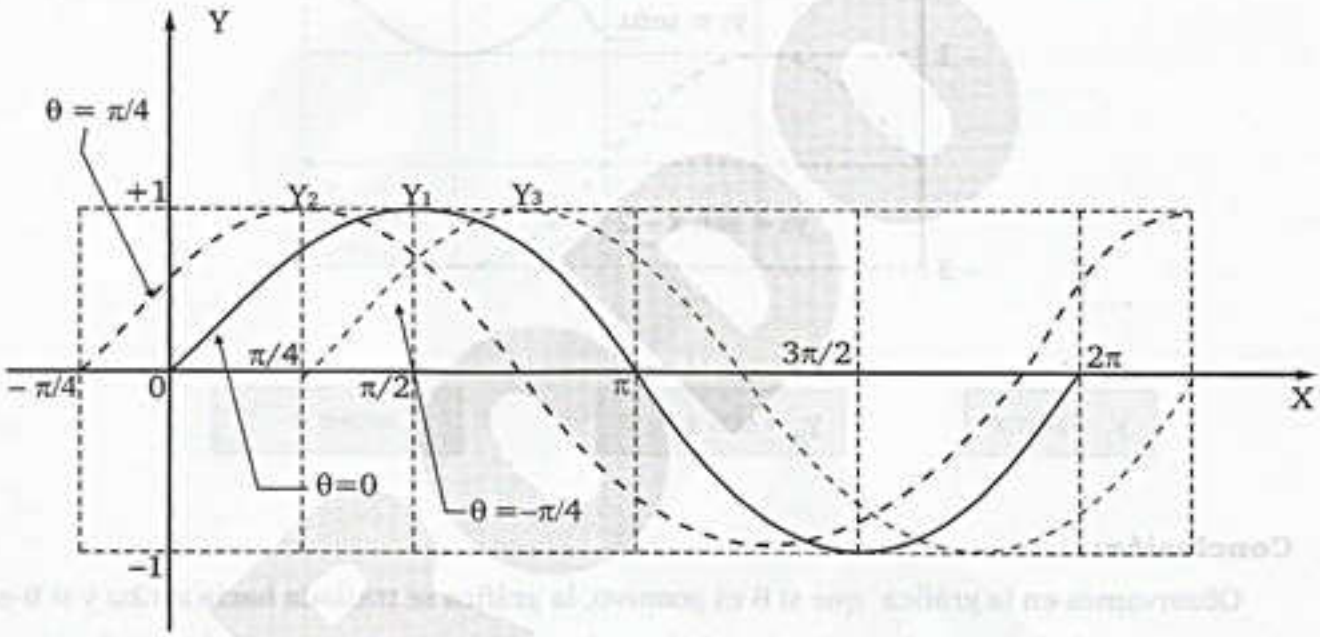
team CALAPENSHKO


## Variación de "θ" (Desplazamiento horizontal)

La suma de una constante θ a la variable angular de senx se escribe así: sen (x + θ). La constante θ tiene el efecto de desplazar la gráfica de la función seno hacia la derecha o hacia la izquierda. Si: $x + \theta = 0$, deducimos: $x = -\theta$, este valor recibe el nombre de corrimiento de fase.

En la siguiente figura ilustramos la variación de θ, para:

$$y = \operatorname{sen}(x + \theta) \text{ donde: } \theta = 0, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}$$




$y_1 = \operatorname{sen} x$ $\quad y_2 = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ $\quad y_3 = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

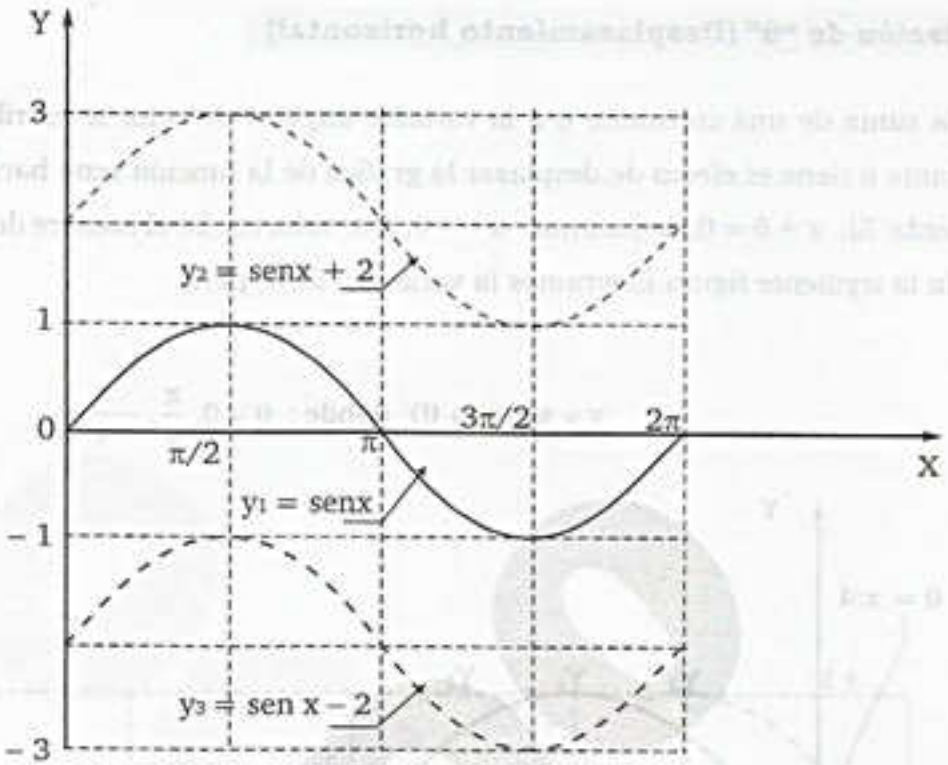
**Conclusión:**

Si θ es positiva, el corrimiento es hacia la izquierda, y si θ es negativo, el corrimiento es hacia la derecha. Pero, lo que si observamos es que θ no altera en nada el período de la onda.

## Suma de una constante B a la función (Desplazamiento vertical)

Si sumamos "B" a cada valor de sen x obtenemos: sen x + B. Por lo tanto, la gráfica de senx + B, es simplemente la gráfica de senx desplazada B unidades hacia arriba o hacia abajo. A continuación ilustramos en una misma gráfica.

$y = \operatorname{sen} x + B$ para: B = 0; 2; -2; así:




$y_1 = \text{sen } x$ $y_2 = \text{sen } x + 2$ $y_3 = \text{sen } x - 2$

**Conclusión:**

Observamos en la gráfica que si B es positivo, la gráfica se traslada hacia arriba y si B es negativo se traslada hacia abajo. Aquí también podemos constatar que no se alterar el periodo de la función.

**Resumen:**

Los resultados de los análisis anteriores se pueden resumir como sigue:

$$y = A \text{ sen } (kx + \theta) + B$$

* A : Amplitud * T : Período $T = \dfrac{2\pi}{|k|}$

* $\theta$ : Ángulo de fase: $\theta > 0$ (derecha)

$\theta < 0$ (izquierda)

* B : Constante: $B > 0$ (desplazamiento hacia arriba)

$B < 0$ (desplazamiento hacia abajo)

team CALAPENSHKO



* Desplazamiento Horizontal: $k x + \theta = 0$

$$x = -\frac{\theta}{k}$$

Las gráficas de las funciones más generales:

$$y = A \tan (k x + \theta) \qquad y = A \cot (k x + \theta)$$

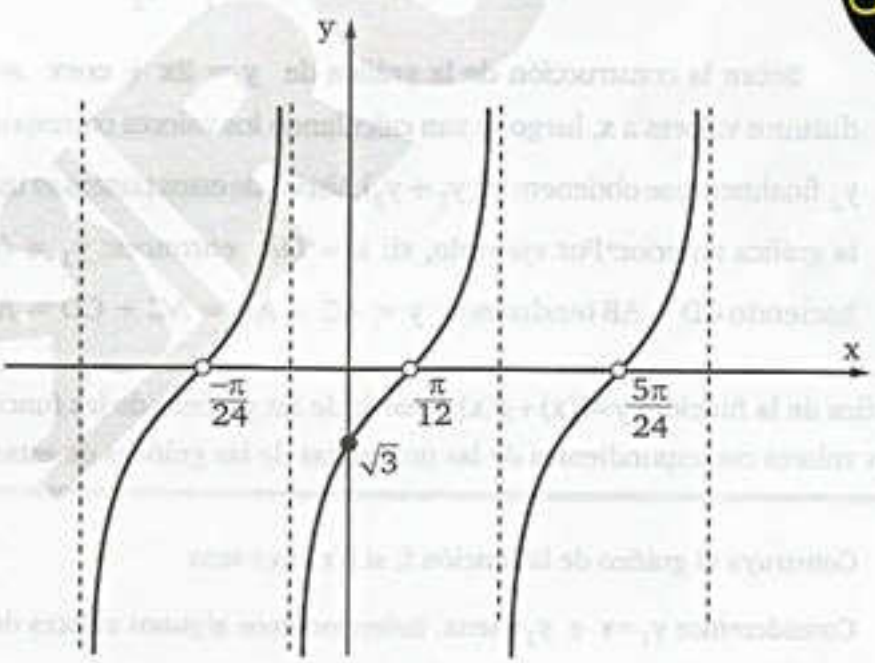
Se analizan de una manera semejante a las ondas senoidales. En el caso de $y = A \operatorname{tg} x$, no llamamos a A la amplitud por que esto implicaría que la función es acotada. La constante A, entonces, multiplica cada valor funcional pero no tiene otro significado gráfico.

El período (T) de $\tan k x$ es: $T = \dfrac{\pi}{|k|}$

* La constante $\theta$ es una constante de ángulo de fase y actúa para trasladar la función básica hacia la derecha o hacia la izquierda.

**Ejemplo:**

Graficar la función: $y = \tan\left(4x - \dfrac{\pi}{3}\right)$




Periodo: $T = \dfrac{\pi}{4}$

$$\begin{cases} 4x - \dfrac{\pi}{3} = 0 \\ x = \dfrac{\pi}{12} \end{cases}$$

La manera de discutir el trazo de funciones más generales como ejemplo: $y = A \sec (k x + \theta)$, $y = A \csc (kx + \theta)$ es semejante a la discutida para las otras funciones. Basta decir que las formas de ondas básicas siguen siendo las mismas, pero las constantes A y k ejercen una especie de estrechamiento vertical y horizontal, mientras que $\theta$ efectúa una traslación horizontal.

team CALAPENSHKO



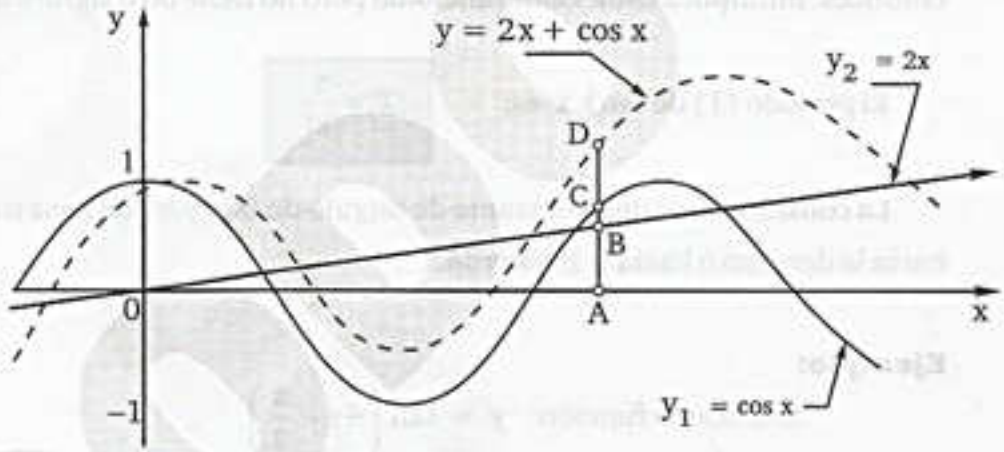
## GRÁFICAS COMPUESTAS (SUMA DE FUNCIONES)

Si una función está compuesta por la suma de dos o más funciones trascendentales o simples, frecuentemente es deseable obtener la gráfica trazando las gráficas de las simples y luego sumar las ordenadas. Para una mejor ilustración se sugiere estar atento a lo siguiente:

**Ejemplo 1:** Graficar: $y = \cos x + 2x$

**Resolución:** Empezamos diciendo que la función original **y** está compuesta por otras dos funciones $y_1$ y $y_2$, de modo que: $y_1 = \cos x$ e $y_2 = 2x$

A continuación elaboramos la gráfica de cada una de las funciones.




$AD = AC + AB$ o $y = y_1 + y_2$

Sobre la construcción de la gráfica de $y = 2x + \cos x$ se van asignando distintos valores a **x**, luego se van calculando los valores correspondientes de $y_1 \wedge y_2$ finalmente se obtienen: $(x; y_1 + y_2)$. Varios de estos puntos se usaron para trazar la gráfica anterior. Por ejemplo, si: $x = OA$ entonces: $y_1 = AC$, $y_2 = AB$, y haciendo $CD = AB$ tendremos: $y = AC + AB = AC + CD = AD$

Para obtener la gráfica de la función: $y=f(x)+g(x)$ a partir de las gráficas de las funciones f y g, es necesario sumar los valores correspondientes de las ordenadas de las gráficas de estas funciones.

**Ejemplo 2:** Construya el gráfico de la función f; si $f(x)=x+\text{sen}x$

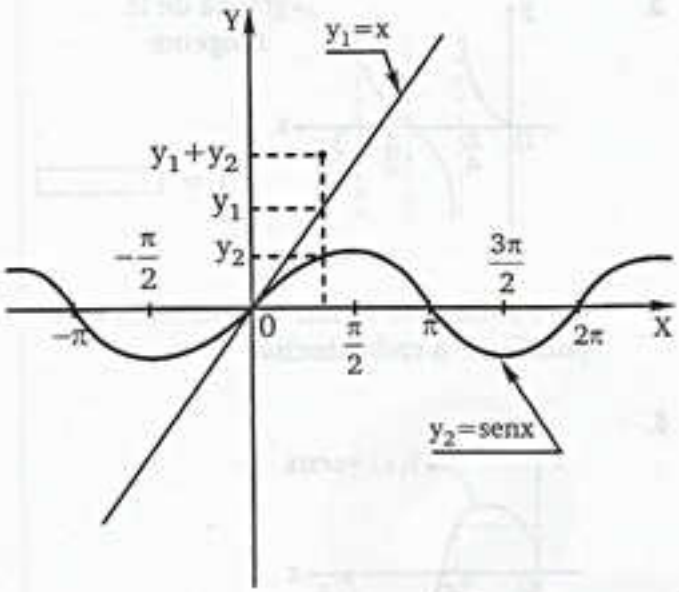
**Resolución:** Consideremos $y_1=x$ e $y_2=\text{sen}x$. Seleccionemos algunos valores de $x \in \text{Dom } f$ y evaluemos la suma de ordenadas $y_1+y_2$.

| x | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)=y_1+y_2$ | 0 | $\frac{\pi}{2}+1$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}-1$ | $2\pi$ |

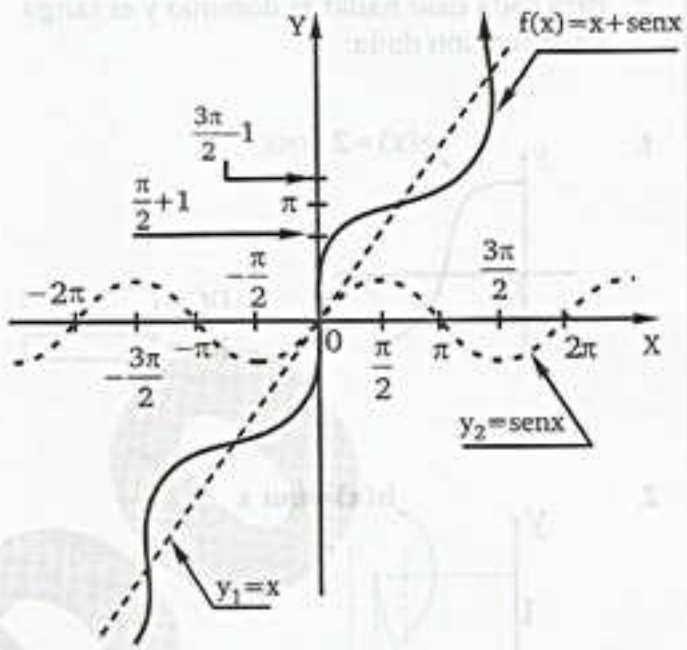
team CALAPENSHKO



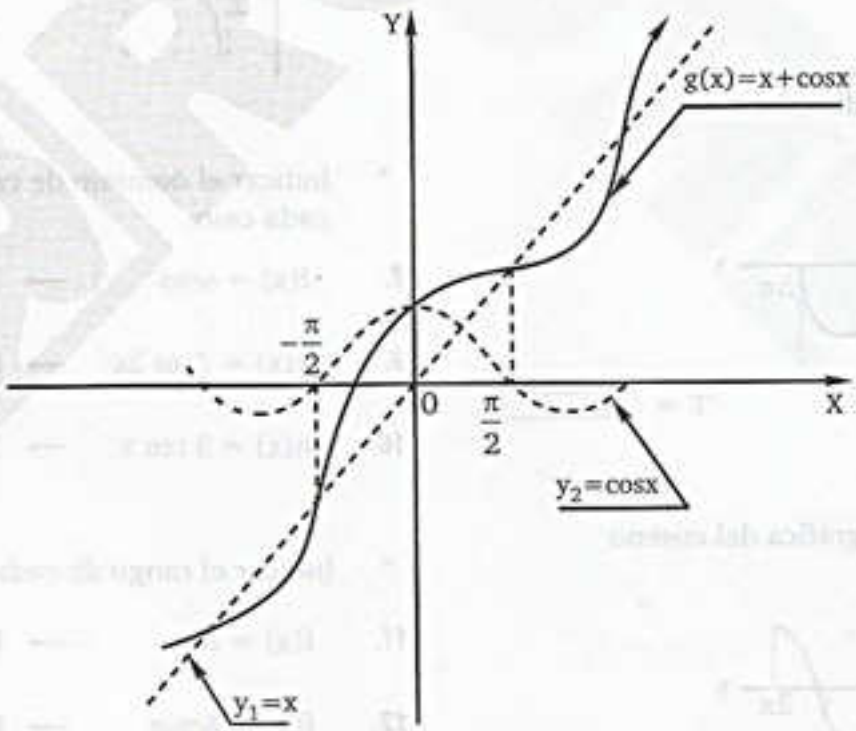
En la figura se observa las gráficas de las funciones previas .




Luego aplicando la suma de ordenadas obtenemos en la figura la gráfica de f.



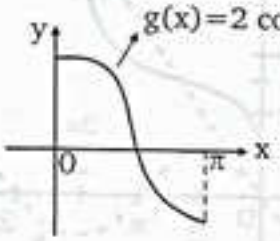

Teniendo en cuenta el mismo procedimiento para la obtención de la gráfica de la función $f(x) = x + \text{sen } x$, usted puede verificar que la gráfica de la función $g(x) = x + \cos x$ es tal como la mostrada en la figura siguiente:



## EJERCICIOS DE APLICACIÓN

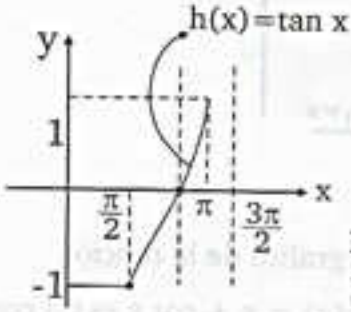
* Para cada caso hallar el dominio y el rango de la función dada:

**1.**




Df = ☐
Rf = ☐

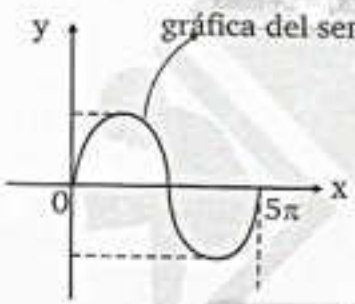
**2.**




Df = ☐
Rf = ☐

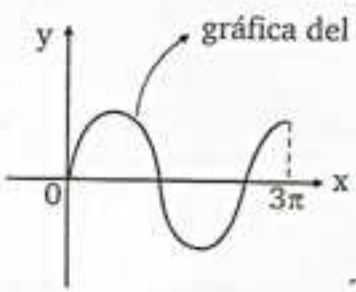
* Para cada caso hallar el período de la función dada:

**3.**



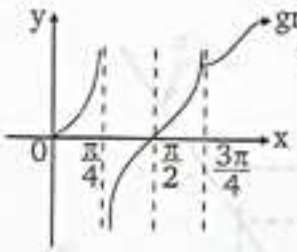

T = ☐

**4.**




T = ☐

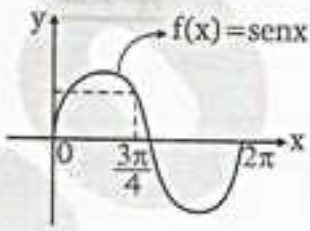
**5.**




T = ☐

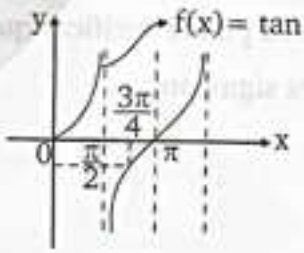
* Para cada caso hallar la ordenada correspondiente a cada abscisa.

**6.**




$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ = ☐

**7**




$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ = ☐

* Indicar el dominio de cada función para cada caso.

**8.** f(x) = senx → Df = ☐

**9.** g(x) = 7cos 2x → Df = ☐

**10.** h(x) = 3 tan x → Df = ☐

* Indicar el rango de cada función:

**11.** f(x) = senx → Rf = ☐

**12.** f(x) = 4cosx → Rf = ☐

**13.** f(x) = 7 tan x → Rf = ☐

team CALAPENSHKO


## PROBLEMAS RESUELTOS

**PROBLEMA 1** Determine el dominio de:

$$f(x) = \frac{\text{vers}x}{\text{vers}2x}$$

**Resolución:** Usando el equivalente: $\text{vers}\,\theta = 1 - \cos\theta$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1-\cos x}{1-\cos 2x}$$

El dominio de f, son todos los valores de x donde f esta definida, entonces:

$$1 - \cos 2x \neq 0 \Rightarrow \cos 2x \neq 1$$

Así:
$$2x \neq \ldots\ldots -2\pi;\ 0;\ 2\pi;\ 4\pi;\ 6\pi$$
$$x \neq \ldots\ldots -\pi;\ 0;\ \pi;\ 2\pi;\ 3\pi;\ \ldots\ldots$$
$$\Rightarrow x \neq k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore \quad \textbf{Dom f} \in \mathbb{R} - \{k\pi\};\ k \in \mathbb{Z}$$

**PROBLEMA 2** Dada la función f definida por:

$$f(x) = \text{sen}2x\ .\ \sec x$$

Determine dominio, rango, período y gráfica

**Resolución:** Por definición de sec x, entonces:

$$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

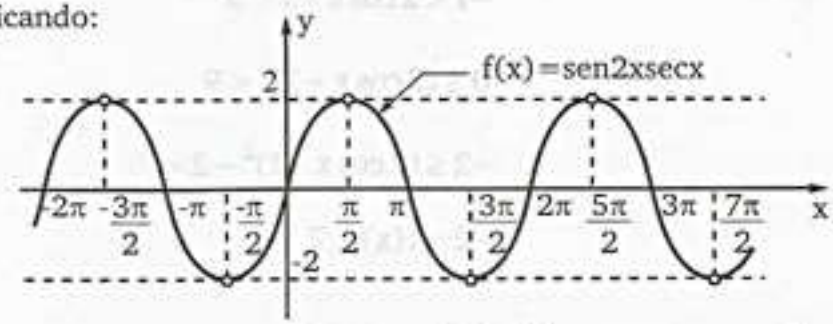
Luego aplicando la identidad:

$$\text{sen}\,2x = 2\,\text{sen}\,x\cos x$$

Obtenemos: $f(x) = 2\text{sen}x.\underbrace{\cos x.\sec x}_{1\ldots\ldots}$ I.T. Recíproca

Luego: $f(x) = 2\text{sen}\,x$

Graficando:




Finalmente: **Dominio** : $\textbf{Dom f} \in \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

**Rango** : $\textbf{Ran f} \in \langle -2;\ 2\rangle$

**Período** : $\textbf{T} = 2\pi$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 3** Calcular el menor valor que toma la función definida por:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} 3x + 2.\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x}$$

**ADMISIÓN UNI 2017 - II**

**Resolución:** Nos piden el menor valor de f(x).

Analizando f(x), se observa que:

$$\operatorname{sen} x \neq 0.$$

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x(2\cos 2x + 1) + 2(2\operatorname{sen} x \cos x)}{\operatorname{sen} x}$$

$$f(x) = 2\cos 2x + 1 + 4\cos x$$

Aplicando identidades del arco doble:

$$f(x) = 2(2\cos^2 x - 1) + 1 + 4\cos x$$

$$f(x) = 4\cos^2 x + 4\cos x - 1$$

$$f(x) = (2\cos x + 1)^2 - 2 \qquad (\alpha)$$

Debido a que $\operatorname{sen} x \neq 0$, entonces:

$$-1 < \cos x < 1$$

Formando la función $(\alpha)$ obtenemos:

$$-2 < 2\cos x < 2$$

$$-1 < 2\cos x + 1 < 3$$

$$0 \leq (2\cos x + 1)^2 < 9$$

$$-2 \leq (2\cos x + 1)^2 - 2 < 7$$

$$-2 \leq f(x) < 7$$

$$\therefore f(x)_{\text{mín.}} = -2$$

team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 4** Si: $f(x) = \cos^2 x(5\cos x - 3) - \cos 3x$

Determine el rango de f para x en $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right]$

**Resolución:** Reduciendo la expresión, usando la identidad:

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

Tenemos:

$$f(x) = 5\cos^3 x - 3\cos^2 x - (4\cos^3 x - 3\cos x)$$

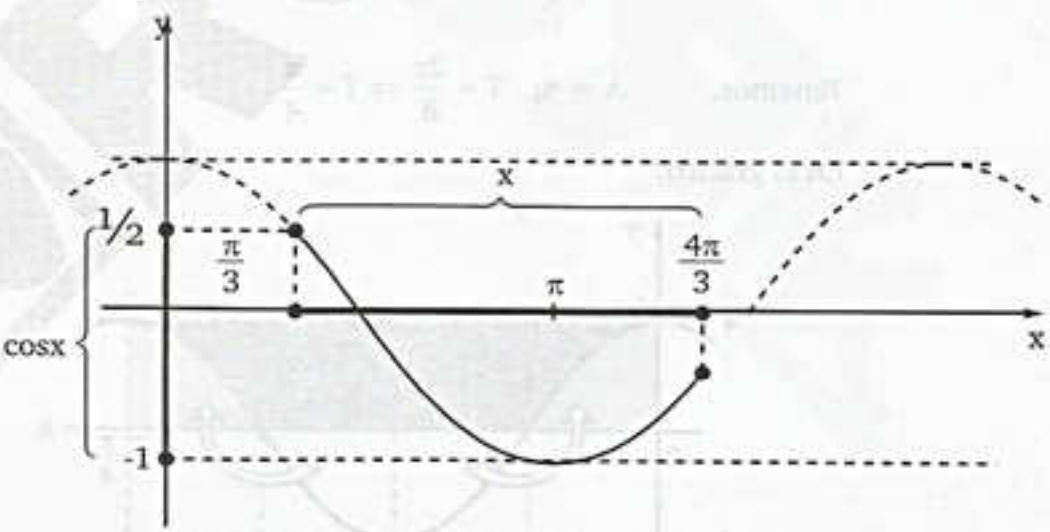
$$f(x) = \cos^3 x - 3\cos^2 x + 3\cos x$$

Sumando y restando 1:

$$f(x) = \underbrace{\cos^3 x - 3\cos^2 x + 3\cos x - 1}_{(\cos x - 1)^3 \ldots\ldots \text{ I.D. diferencia al cubo}} + 1$$

$$f(x) = (\cos x - 1)^3 + 1$$

Como: $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{4\pi}{3}$




Del gráfico: $-1 \le \cos x \le \frac{1}{2}$

Restando 1: $-2 \le \cos x - 1 \le -\frac{1}{2}$

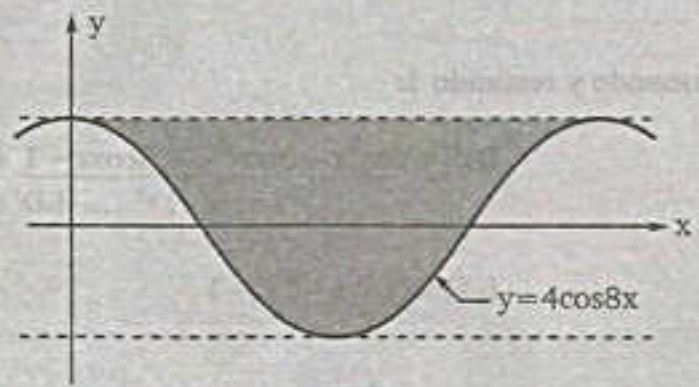
Elevando al cubo:

$$-8 \le (\cos x - 1)^3 \le -\frac{1}{8}$$

Sumando 1: $-7 \le \underbrace{(\cos x - 1)^3 + 1}_{f(x)} \le \frac{7}{8}$

$$\therefore \quad \text{Ran}f \in \left[-7; \frac{7}{8}\right]$$

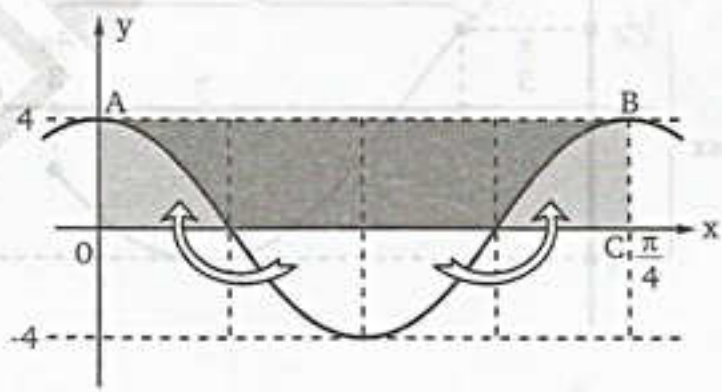
**PROBLEMA 5** Determine el área de la región sombreada:




**Resolución:** Identificando la amplitud (A) y el periodo (T) de: $f(x) = 4\cos 8x$

Tenemos: $A = 4; \quad T = \frac{2\pi}{8} \Rightarrow T = \frac{\pi}{4}$

En el gráfico:



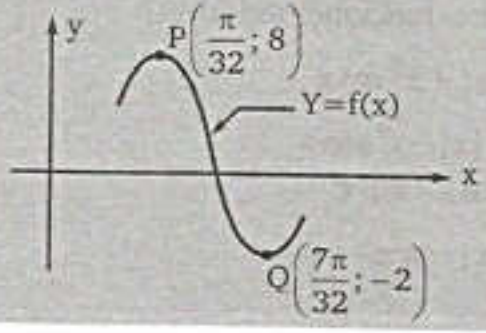

Luego el área solicitada esta formada por la región rectangular OABC, la cual se obtuvo por el traslado de regiones (por simetría), así el área de la región sombreada es:

$$S = \frac{\pi}{4} \times 4$$

$$\therefore \quad S = \pi u^2$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 6** Determine la regla de correspondencia de la senoide mostrada, siendo P y Q puntos de ordenada máxima y mínima.




**Resolución:**

Considerando la ecuación generalizada:

$$f(x)= A\,\text{sen}(Bx+C)+D$$

Del gráfico: $Y_{Máx.} = 8;\ Y_{Mín.} = -2$

Luego la amplitud (A) de f es:

$$A = \frac{Y_{Máx} - Y_{Mín.}}{2} = 5$$

La constante B nos relaciona con el periodo (T) de f es:

$$T = \frac{2\pi}{B}$$

La gráfica muestra medio periodo igual a:

$$\frac{T}{2} = \frac{7\pi}{32} - \frac{\pi}{32} \Rightarrow T = \frac{3\pi}{8}$$

Luego: $$\frac{3\pi}{8} = \frac{2\pi}{B} \Rightarrow B = \frac{16}{3}$$

La constante D es el desplazamiento vertical y se calcula:

$$D = \frac{Y\,max + Y\,min}{2} = 3$$

La ecuación quedaría así:

$$f(x) = 5\text{sen}\left(\frac{16x}{3} + C\right) + 3 \quad .....(1)$$

Evaluando el punto $P\left(\frac{\pi}{32};8\right)$ en (1) para calcular C:

$$\underbrace{f\left(\frac{\pi}{32}\right)}_{8} = 5\text{sen}\left(\frac{16}{3}.\frac{\pi}{32} + C\right) + 3$$

$$\Rightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} + C\right) = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{6} + C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = \frac{\pi}{3}$$

En (1)

$$\therefore\ \mathbf{f(x) = 5\text{sen}\left(\frac{16x}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + 3}$$

**PROBLEMA 7** Una función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se denomina para cuando $f(-x) = f(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}$. ¿Cuáles de las siguientes funciones son pares?

I. $f(x) = |x| + x^2 \cos x$

II. $f(x) = x|x| - x^3 \operatorname{sen} x$

III. $f(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$

IV. $f(x) = |x| \cos^2 x - x \operatorname{sen} x$

**ADMISIÓN UNMSM 2017 - II**

**Resolución:**

I. $f(x) = |x| + x^2 \cos x$

$f(-x) = |-x| + (-x)^2 \cos(-x)$

$f(-x) = |x| + x^2 \cos x$

$f(-x) = f(x)$ f es par

II. $f(x) = x|x| - x^3 \operatorname{sen} x$

$f(-x) = (-x)|-x| - (-x)^3 \operatorname{sen}(-x)$

$f(-x) = -x|-x| - x^3 \operatorname{sen} x$

$f(-x) \neq f(x)$ f no es par

III. $f(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$

$f(-x) = \cos(-x) - \operatorname{sen}(-x)$

$f(-x) = \cos x + \operatorname{sen} x$

$f(-x) \neq f(x)$ f no es par

IV. $f(x) = |x| \cos^2 x - x \operatorname{sen} x$

$f(-x) = |-x| \cos^2(-x) - (-x) \operatorname{sen}(-x)$

$f(-x) = |x| \cos^2 x - x \operatorname{sen} x$

$f(-x) = f(x)$ f es par

$\therefore$ I y IV

**PROBLEMA 8** Cuales de las siguientes funciones son pares ó impares:

I. $f(x) = \operatorname{sen} x \cdot \cos x \cdot \tan x$

II. $f(x) = \dfrac{\operatorname{vers} x}{x}$

III. $f(x) = \csc |\operatorname{sen} x|$

IV. $f(x) = \tan x \cdot \tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

**A todo el público en general:**

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

**Este libro no debe ser prostituito monetariamente**, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

**28 de agosto del 2020**

team CALAPENSHKO


**Resolución:** Para cada función busquemos la ecuación de f(−x) para luego Comparar:

Si: $\begin{cases} f(x) = f(x) & \text{..... función par} \\ f(-x) = -f(x) & \text{..... función impar} \end{cases}$

I. $f(-x)=\text{sen}(-x)\,.\,\cos(-x)\,.\,\text{tg}(-x)$
$f(-x)=(-\text{sen } x)\,.\,\cos x\,.\,(-\text{tg } x)$
$f(-x)=\text{sen } x\,.\,\cos x\,.\,\text{tg } x$

Luego: $f(-x)=f(x)$

$\therefore$ **f es una función par.**

II. Usar: vers x = 1 − cos x

$$f(x) = \frac{1-\cos x}{x}$$

Así: $$f(-x) = \frac{1-\cos(-x)}{-x} = \frac{1-\cos x}{-x}$$

$$f(-x) = -\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)$$

Luego: $f(-x) = -f(x)$

$\therefore$ **f es una función impar**

III. $f(-x) = \csc|\text{sen}(-x)|$
$f(-x) = \csc|-\text{sen } x|$
$f(-x) = \csc|\text{sen } x|$ ..... OBS: $|-x| = |x|$

Luego: $f(-x)=f(x)$

$\therefore$ **f es un función par**

IV. $$f(-x) = \tan(-x).\tan\left(-x+\frac{\pi}{4}\right).\tan\left(-x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f(-x) = (-\tan x)\left(-\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)\left(-\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$f(-x) = -\tan x.\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right).\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

Luego: $f(-x) = -f(x)$

$\therefore$ **f es una función impar.**

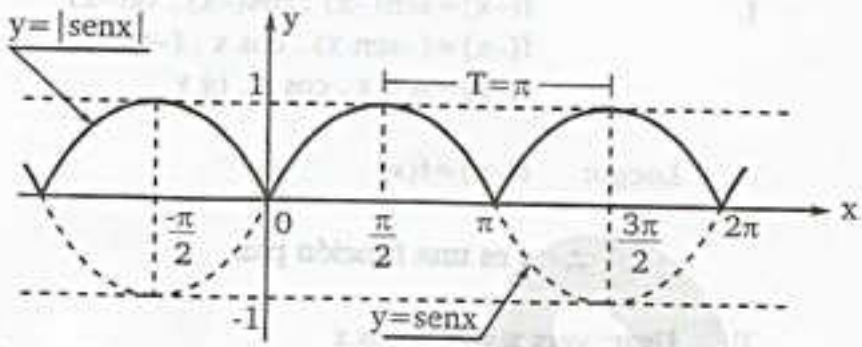
**PROBLEMA 9** Bosquejar la gráfica de la función:

$$f(x) = |\text{sen } x| + |\cos x|$$

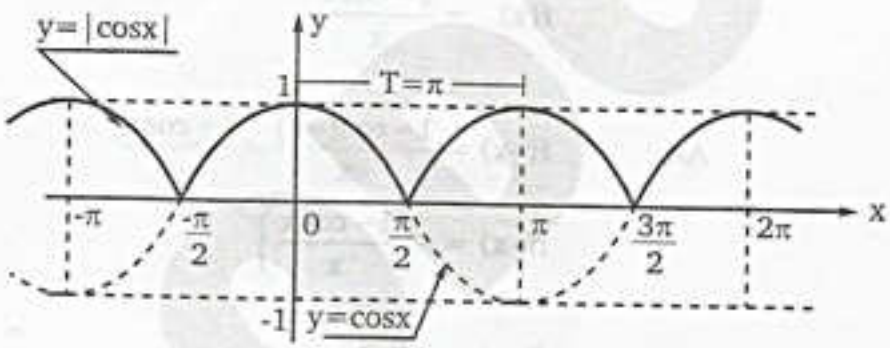
Hallando dominio, rango y período.

**Resolución:** Se graficarán las funciones $y = |\text{sen } x|$ e $y = |\cos x|$

I.




II.

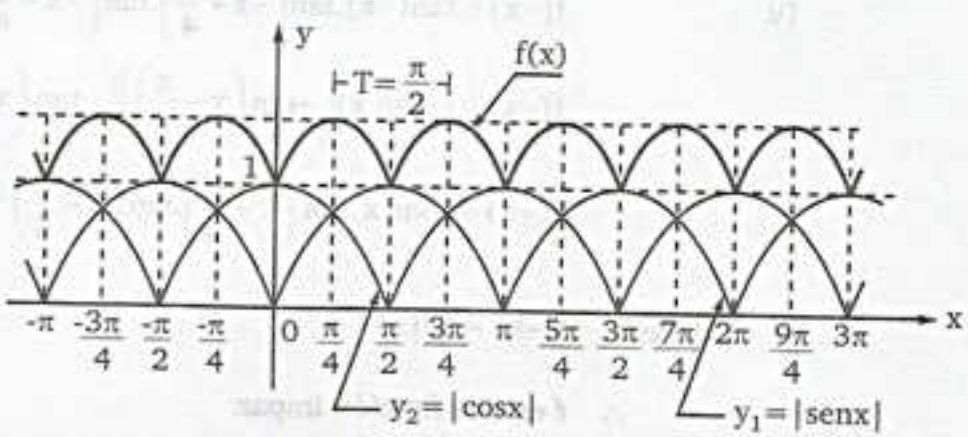



Luego aplicamos el método de adicción de funciones, se obtiene la gráfica de f. Siendo

$$y_1 = |\text{sen } x|;\ y_2 = |\cos x|$$

**TABULANDO:**

| x | .... | $-\frac{\pi}{2}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | 0 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\pi$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $2\pi$ | .... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = y_1+y_2$ | .... | 1 | $\sqrt{2}$ | 1 | $\sqrt{2}$ | 1 | $\sqrt{2}$ | 1 | $\sqrt{2}$ | 1 | $\sqrt{2}$ | 1 | .... |



team CALAPENSHKO


Conclusión:

**Dominio** : $\text{Dom } f \in \mathbb{R}$

**Rango** : $\text{Ran } f \in [1; \sqrt{2}]$

**Periodo** : $T = \frac{\pi}{2}$

**PROBLEMA 10** Cuántos puntos de intersección existen entre la gráfica de la función:

$$f(x) = |x| - \cos x$$

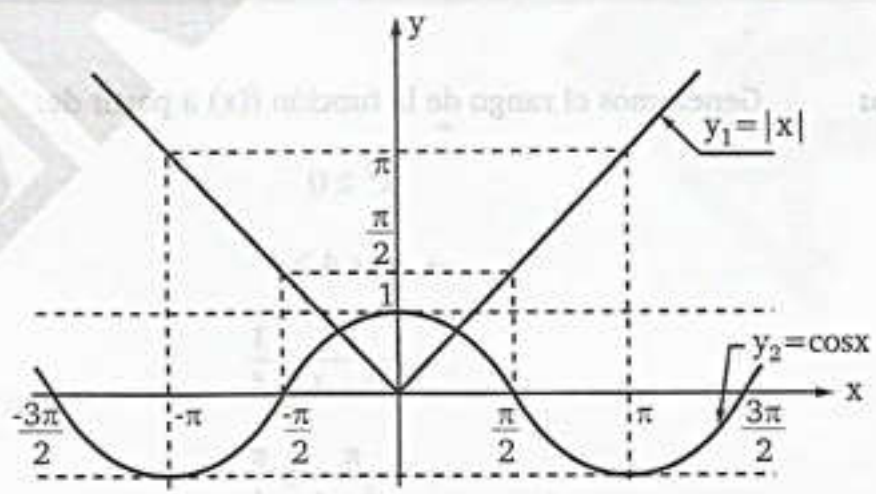
Y el eje de abscisas.

**Resolución:** De la condición:

$$f(x) = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$
$$\Rightarrow |x| - \cos x = 0$$
$$\Rightarrow |x| = \cos x$$

Sea: $y_1 = |x|;\ y_2 = \cos x$

Graficando:




Observamos que existen **dos** puntos de intersección entre los gráficos de $y_1$ e $y_2$ O sea que cumplen (1)

$\therefore$ **Existen dos puntos de intersección entre f y el eje de abscisas.**

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 11** Determine el mínimo valor de la función:

$$f(x) = 3 + 2\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}^2 x$$

**Resolución:** Para hallar el mínimo de f, aplicamos el método de completar cuadrados así:

$$f(x) = 2 + 1 + 2\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}^2 x$$
$$f(x) = 2 + (1 + \operatorname{sen}x)^2$$

Sabemos: $-1 \le \operatorname{sen}x \le 1$

Sumando 1: $0 \le 1 + \operatorname{sen}x \le 2$

Elevando al cuadrado: $0 \le (1 + \operatorname{sen}x)^2 \le 4$

Sumando 2: $2 \le 2 + (1 + \operatorname{sen}x)^2 \le 6$
$2 \le f(x) \le 6$

$\therefore \quad \mathbf{f_{Mín.} = 2}$

**PROBLEMA 12** Dada la función f definida por:

$$f(x) = \sqrt{2}\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x^2+4}\right)$$

**Resolución:** Generamos el rango de la función f(x) a partir de:

$$x^2 \ge 0$$

$$\rightarrow x^2 + 4 \ge 4$$

$$\frac{1}{x^2+4} \le \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow \frac{\pi}{x^2+4} \le \frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x^2+4}\right) \le \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x^2+4}\right) \le 1$$

$$\rightarrow f(x) \le 1$$

$$\therefore \quad \mathbf{f(x)_{máx.} = 1}$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 13** La función f se define como: $f(x)=\dfrac{\cos 3x-\cos 5x}{\operatorname{sen} 3x+\operatorname{sen} 5x}$

si el período mínimo de f es T, halle el valor de la siguiente expresión:

$$D=T-(2+\sqrt{3})\left(\frac{\pi}{2}\right).f\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

**ADMISIÓN CALLAO 2015 - II**

**Resolución:** Por transformaciones trigonométricas:

$$f(x)=\frac{2\operatorname{sen}4x.\operatorname{sen}x}{2\operatorname{sen}4x.\cos x}$$

$$f(x)=\tan x \quad \rightarrow \quad T=\pi$$

Nos piden: $D=\pi-(2+\sqrt{3})\left(\frac{\pi}{2}\right)\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=\pi-(2+\sqrt{3})\left(\frac{\pi}{2}\right)(2-\sqrt{3})=\pi-\frac{\pi}{2}$

$$\therefore \quad \mathbf{D=\frac{\pi}{2}}$$

**PROBLEMA 14** Calcule el producto de los períodos de las funciones:

$$f(x)=\tan\left(\frac{2x}{3}\right) \wedge g(x)=2\cot(-3x+\pi)+1$$

**Resolución:** Si : $f(x)=A\tan(Bx+C)+D$ ó $f(x)=A\cot(Bx+C)+D$

El período se calcula : $T=\dfrac{\pi}{|B|}$

Luego : $f(x)=\tan\left(\dfrac{2x}{3}\right)$

$$T_1=\frac{\pi}{\frac{2}{3}} \Rightarrow T_1=\frac{3\pi}{2}$$

También : $g(x)=2\cot(-3x+\pi)+1$

$$T_2=\frac{\pi}{|-3|} \Rightarrow T_2=\frac{\pi}{3}$$

Así : $T_1\times T_2=\dfrac{3\pi}{2}\times\dfrac{\pi}{3}$

$$\therefore \mathbf{T_1\times T_2=\frac{\pi^2}{2}}$$

**PROBLEMA 15** Graficar la función:

$$f(x) = \tan x(\cot x + 1) + 2\cos x - \tan x$$

**Resolución:** Hallando los puntos de discontinuidad:

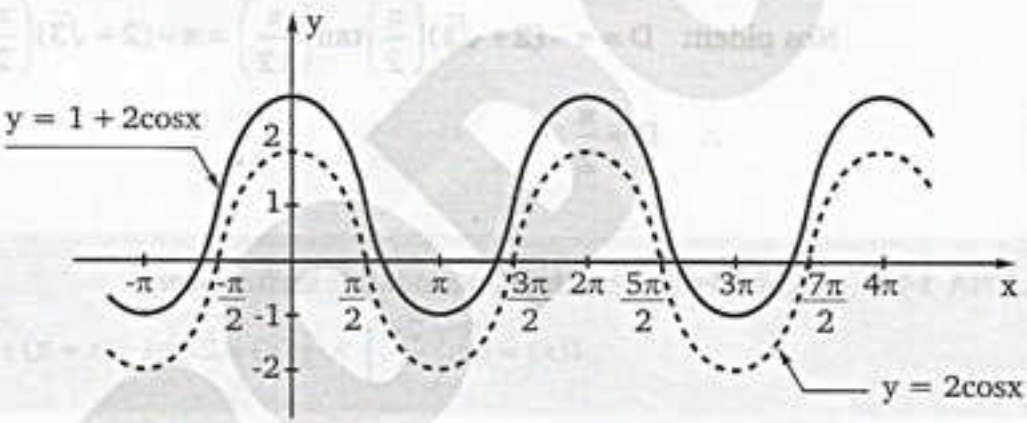
Para : $\tan x \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $x = \frac{k\pi}{2}$ ; $k \in \mathbb{Z}$

Para : $\cot x \Rightarrow x = k\pi$

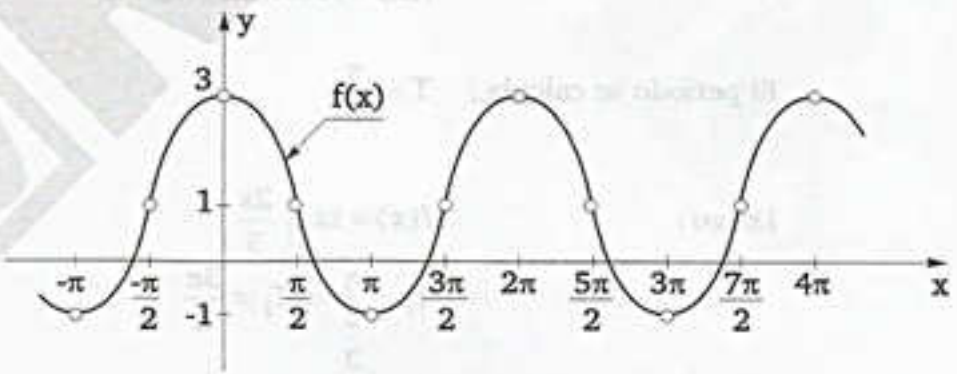
Luego : $\text{Dom} f \in \mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$ ; $k \in \mathbb{Z}$

Simplificando la expresión, tenemos:

$$f(x) = \tan x \cot x + \cancel{\tan x} + 2\cos x - \cancel{\tan x}$$
$$f(x) = 1 + 2\cos x$$




Finalmente quitamos los puntos de discontinuidad.




**PROBLEMA 16** Sea: $f(x) = |\cot x| - \sec x$, $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$

¿Para cuántos valores de x en el intervalo dado, se cumple: $f(x) = 0$?

$$f(x) = |\cot x| - \sec x \ ; \ 0 < |x| < \frac{\pi}{2}$$

Condición : $f(x) = 0 \ ; \ -\frac{\pi}{2} < x < 0 \ \cup \ 0 < x < \frac{\pi}{2}$

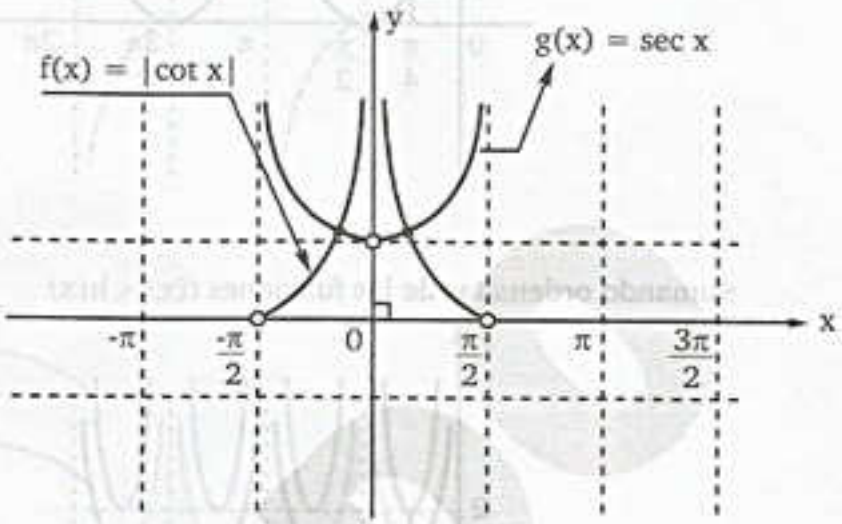
team CALAPENSHKO



Reemplazando : $0 = |\cot x| - \sec x$

$$|\cot x| = \sec x$$

Lo pedido es equivalente a determinar los puntos de intersección entre ellos:




∴ **Existen 2 valores para x para los cuales f(x) = 0**

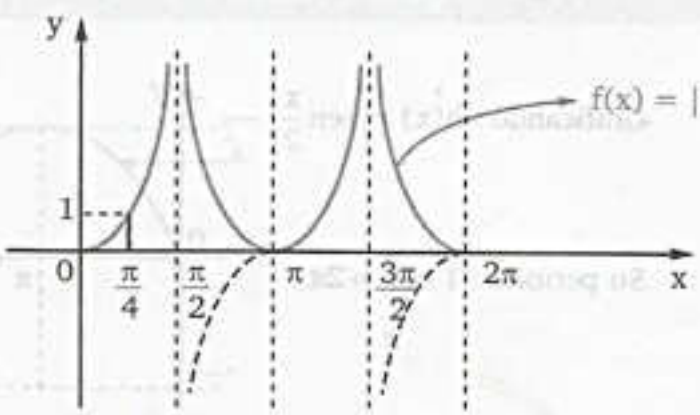
**PROBLEMA 17** Acerca de la función: $g(x) = |\tan x| + |\cot x|$

Se afirma : I) Rang : $[2; +\infty\rangle$ II) Dom g: $\mathbb{R} - \left\{\frac{n\pi}{2}\right\}; n \in \mathbb{Z}$

III) Su período mínimo es $\frac{\pi}{2}$ IV) En $\left\langle 0; \frac{\pi}{4}\right\rangle$ es creciente

Luego, cuáles son verdaderas ó falsas.

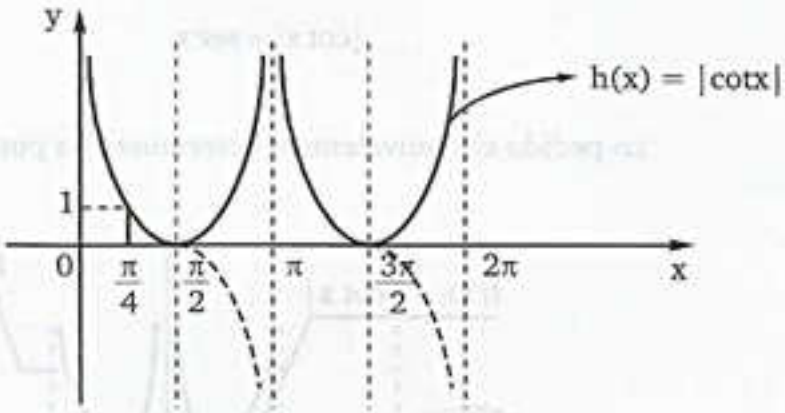
**Resolución:** Graficando: $f(x) = |\tan x|$



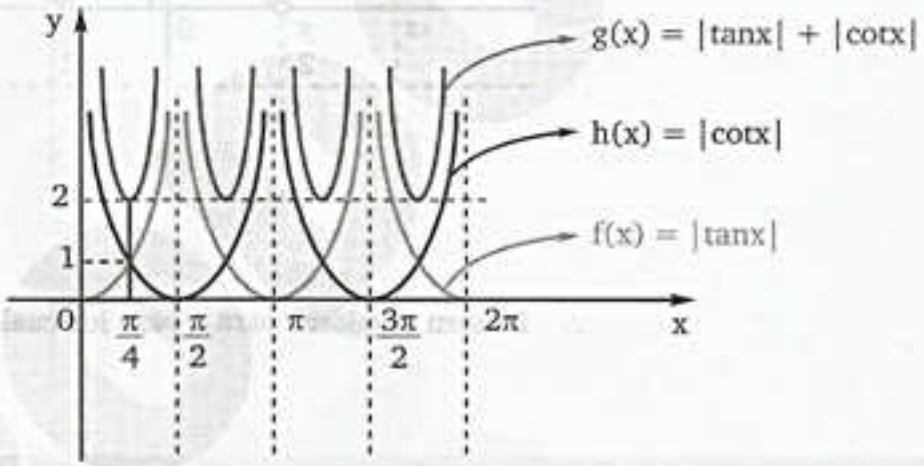
team CALAPENSHKO



Graficando: $h(x) = |\cot x|$




Sumando ordenadas de las funciones $f(x) \wedge h(x)$




De acuerdo al gráfico:

**I) VERDADERO** **II) VERDADERO**

**III) VERDADERO** **IV) FALSO**

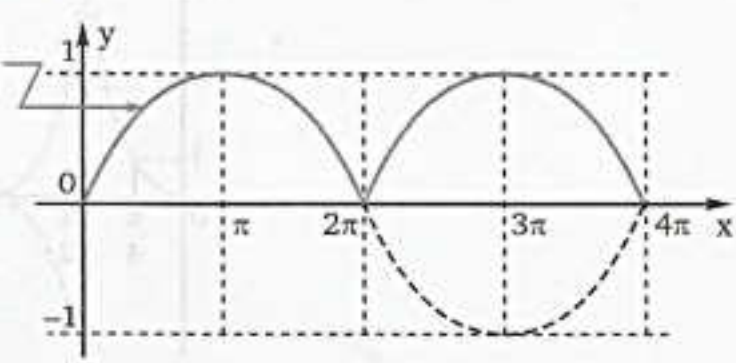
**PROBLEMA 18** Sea la función trigonométrica

$$F(x) = \left|\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right| + \left|\cos\frac{x}{2}\right|$$

Determine su período y rango.

**Resolución:**

Graficando : $h(x) = \left|\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right|$

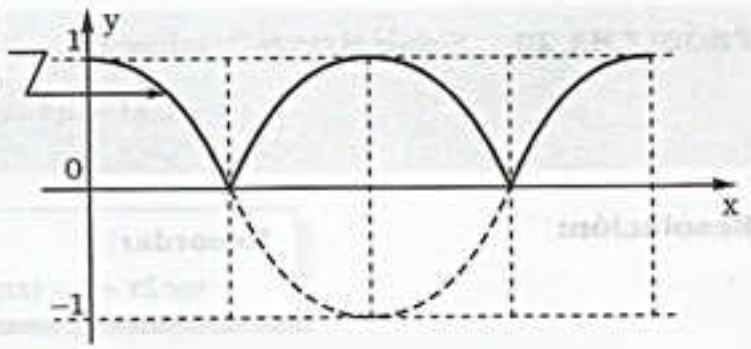



Su período : $T = \dfrac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$

team CALAPENSHKO

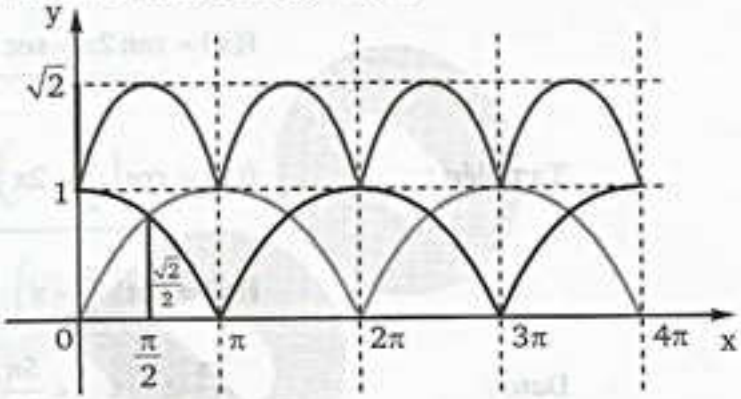


Graficando : $g(x) = \left|\cos\frac{x}{2}\right|$




Su período : $T = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$

Sumando ordenadas de las funciones $f(x) \wedge h(x)$




**Del gráfico se observa que el período $T = \pi$ y su rango de $f(x) \in [1;\sqrt{2}]$**

**PROBLEMA 19** Determine el dominio de f(x) definida por:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(x^2)}{|\operatorname{sen} x| - |\cos x|} \text{ ; para } k \in \mathbb{Z}$$

**Resolución:** Del enunciado : $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x^2}{|\operatorname{sen} x| - |\cos x|}$

Se nota que el denominador tiene que ser diferente de cero:

$$|\operatorname{sen} x| - |\cos x| \neq 0 \rightarrow |\tan x| \neq 1$$

De donde : i) $\tan x \neq 1 \rightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}$

ii) $\tan x \neq -1 \rightarrow x \neq k\pi - \frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}$

En conclusión : $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{4}$

**Dominio de $f(x) \in \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{4}\right\}$ ; $k \in \mathbb{Z}$**

**PROBLEMA 20** Señale el rango de la función:

$$y = f(x) = \tan 2x + \tan 2x \cot x - 1 \; ; \; x \in \left\langle \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right\rangle$$

**Resolución:**

**Recordar:**
$\sec 2x + 1 = \tan 2x \cot x$

$$f(x) = \tan 2x + \sec 2x + 1 - 1 \quad \begin{cases} 2x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2} \\ x \neq (2n+1)\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$f(x) = \underbrace{\tan 2x} + \underbrace{\sec 2x}$$

También : $f(x) = \underbrace{\cot\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + \csc\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}$

$\csc\theta + \cot\theta = \cot\frac{\theta}{2}$

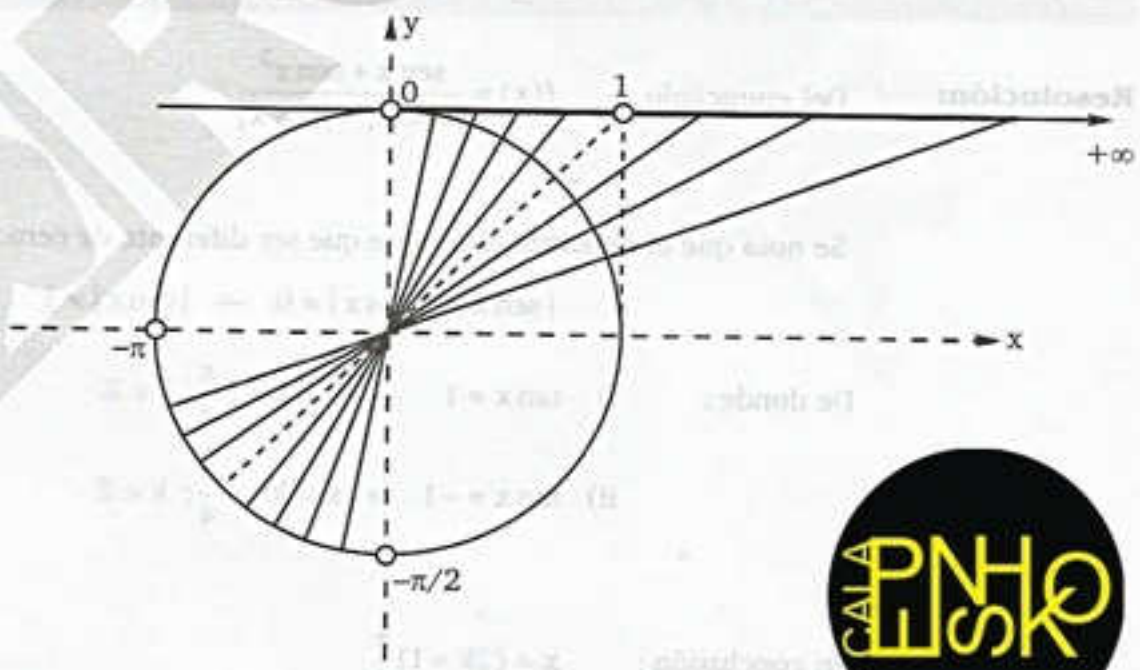
$$f(x) = \cot\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

Dato : $\frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$

Multiplicando $\times(-1)$ : $-\frac{3\pi}{4} > -x > -\frac{5\pi}{4}$

Sumando $\frac{\pi}{4}$ m.a.m : $-\frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{4} - x > -\pi$

Graficando en la CT




Evaluando para : $x \neq \pi \Rightarrow \cot\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \neq 1$

$\therefore$ **El rango es $\langle 0; +\infty \rangle - \{1\}$**

team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 21** Si: $-\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{3}$, determine el rango de:

$$f(\theta) = 2\csc\left(|\theta| + \frac{\pi}{6}\right) - 1$$

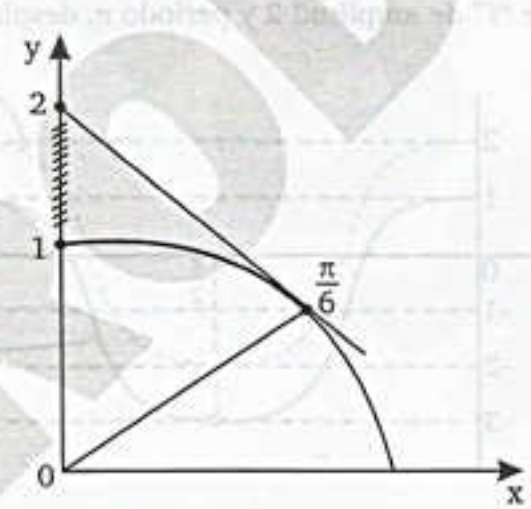
**Resolución:** Construiremos el argumento de la cosecante.

$$-\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{3}$$

$$0 \leq |\theta| < \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{6} \leq |\theta| + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$$

luego, graficando el recorrido de α y extensión para cscα, se tiene:




De aquí se deduce que:

$$1 < \csc\left(|\theta| + \frac{\pi}{6}\right) \leq 2$$

$$2 < 2\csc\left(|\theta| + \frac{\pi}{6}\right) \leq 4$$

$$\underbrace{1 < 2\csc\left(|\theta| + \frac{\pi}{6}\right) - 1 \leq 3}_{f(\theta)}$$

$$\therefore f(\theta) \in \langle 1;3]$$

**PROBLEMA 22** Graficar la función:

$$f(x) = \frac{\cos 3x}{\cos x}$$

**Resolución:** La función "f" existe siempre que:

$$\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \ldots\ldots$$

Luego la función "f" es idéntica a:

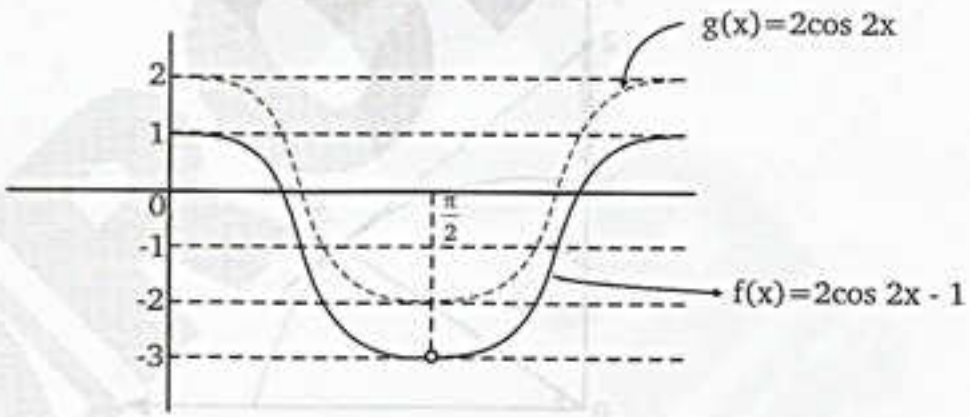
$$f(x) = \frac{\cos x\,(2\cos 2x - 1)}{\cos x}$$

$$f(x) = 2\cos 2x - 1 \;;\; x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

De esta función obtenemos:

* Amplitud: $A = 2$
* Periodo: $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

En gráfico de "f" de amplitud 2 y periodo π, desplazando hacia abajo 1 unidad.




**PROBLEMA 23** Graficar la función "f" definida por:

$$f(x) = \text{sen } 2x\,(\tan x + \cot x)$$

**Resolución:** La función es idéntica a:

$$f(x) = 2\,\text{sen}x\cos x\,(\sec x.\csc x)$$

$$f(x) = 2\,\text{sen}x\cos x\left(\frac{1}{\cos x.\text{sen}x}\right)$$

$$f(x) = 2 \;;\; \text{sen}x \neq 0 \wedge \cos x \neq 0$$

$$\rightarrow x \neq 0, \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2} \ldots\ldots$$

$$\therefore \; x \neq \frac{n\pi}{2}; n \in Z$$

**A todo el público en general:**

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

**Este libro no debe ser prostituito monetariamente**, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

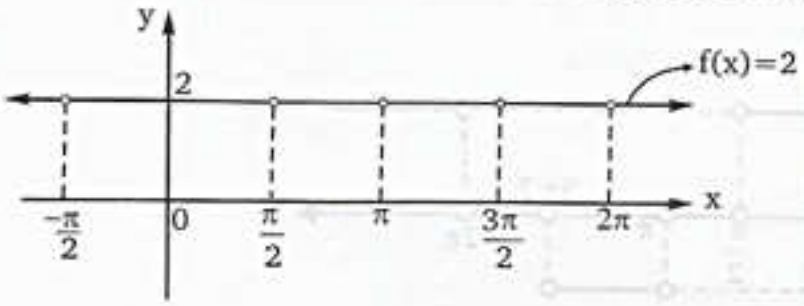
No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

**28 de agosto del 2020**

team CALAPENSHKO


La función "f" es una constante de rango 2 y dominio $R - \left\{\frac{n\pi}{2}/n \in \mathbb{Z}\right\}$




**PROBLEMA 24** Graficar la función "f" definida por:

$$f(x)=\frac{|\text{sen}x|}{\text{sen}x}+\frac{|\cos x|}{\cos x}$$

**Resolución:** Observa que la función "f" existe si:

$$\text{sen}x \neq 0 \ \wedge \ \cos x \neq 0$$

$$x \neq 0; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; 2\pi; \ldots..$$

$$x \neq \frac{n\pi}{2}; n \in Z$$

Analizamos a "f" en cada cuadrante:

$$\text{Si}: \ 0 < x < \frac{\pi}{2} \rightarrow f(x)=\frac{|\overset{+}{\text{sen}x}|}{\text{sen}x}+\frac{|\overset{+}{\cos x}|}{\cos x}$$

$$f(x)=\frac{\text{sen}x}{\text{sen}x}+\frac{\cos x}{\cos x} \rightarrow f(x)=2$$

$$\text{Si}: \frac{\pi}{2} < x < \pi \rightarrow f(x)=\frac{|\overset{+}{\text{sen}x}|}{\text{sen}x}+\frac{|\overset{-}{\cos x}|}{\cos x}$$

$$=\frac{\text{sen}x}{\text{sen}x}+\frac{-\cos x}{\cos} \rightarrow f(x)=0$$

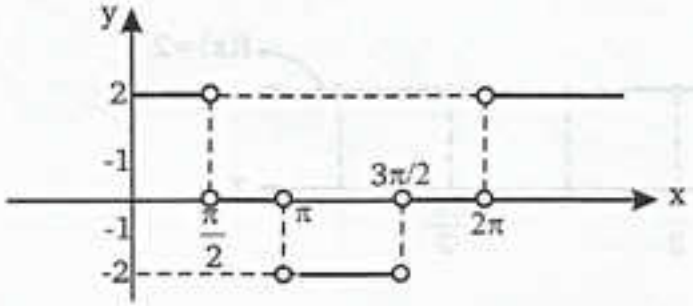
$$\text{Si}: \pi < x < \frac{3\pi}{2} \rightarrow f(x)=\frac{|\overset{-}{\text{sen}x}|}{\text{sen}x}+\frac{|\overset{-}{\cos x}|}{\cos x}$$

$$=\frac{-\text{sen}x}{\text{sen}x}+\frac{-\cos x}{\cos x} \rightarrow f(x)=-2$$

$$\text{Si}: \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \rightarrow f(x)=\frac{|\overset{-}{\text{sen}x}|}{\text{sen}x}+\frac{|\overset{+}{\cos x}|}{\cos x}$$

$$f(x)=\frac{-\text{sen}x}{\text{sen}x}+\frac{\cos x}{\cos} \rightarrow f(x)=0$$

La función "f" es constante de rango $\{-2; 0; 2\}$ y el dominio $R - \left\{\frac{n\pi}{2} / n \in Z\right\}$




**PROBLEMA 25** Determine el dominio de la función "f" definida por:

$$f(x) = \frac{\cos 2x + \cos 3x + \cos 4x}{\text{sen}2x + \text{sen}3x + \text{sen}4x}$$

**Resolución:** La función "f" existe siempre que:

$$\text{sen}2x + \text{sen}3x + \text{sen}4x \neq 0$$

Transformamos a producto la expresión:

$$(\text{sen}\,4x + \text{sen}\,2x) + \text{sen}3x \neq 0$$

$$2\,\text{sen}3x\cos x + \text{sen}3x \neq 0$$

$$\text{sen}3x\,(2\cos x + 1) \neq 0$$

i) $\text{sen}3x \neq 0 \quad \rightarrow \quad 3x \neq 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi$

$$x \neq 0, \frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{3}$$

ii) $\cos x \neq \frac{-1}{2} \quad \rightarrow \quad x \neq \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}; \frac{10\pi}{3} \ldots\ldots$

El dominio de la función "f" es el conjunto:

$$Df = R - \left\{0; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \pi; \frac{4\pi}{3} \ldots\ldots\right\}$$

$$Df = R - \left\{\frac{n\pi}{3} / n \in Z\right\}$$

team CALAPENSHKO


## PROBLEMAS PROPUESTOS

**1.** Hallar el dominio de:

$$f(x) = \frac{1-\operatorname{sen}x}{\cos x} + \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen}x};\ k \in \mathbb{Z}$$

A) $\mathbb{R}$ B) $\mathbb{R} - \{2k\pi\}$ C) $\mathbb{R} - \{k\pi\}$

D) $\mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$ E) $\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$

**2.** Acerca de la función:

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Podemos afirmar:

I. Dominio: D f $\in \mathbb{R}$

II. Rango: R f $\in [-1; 1]$

III. Periodo: T = $\pi$

A) Solo I B) Solo II C) Solo III

D) I y II D) Todas

**3.** Acerca de la función:

$$f(x) = (\sqrt{2}\cos x + 1)(\sqrt{2}\cos x - 1)$$

Podemos afirmar:

I. Dom f $\in \mathbb{R}$

II. Ran f $\in [-2; 2]$

III. Si: $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \Rightarrow$ f es creciente

IV. f es una función impar

A) Solo I B) Solo II C) Solo III

D) I y III E) I y IV

**4.** Sea la función definida por:

$$f(x) = \frac{\cos 2x}{\cos x - \operatorname{sen} x}$$

Determine si es verdadero (V) o falso (F) en cada proposición:

( ) Dom f $\in \mathbb{R}$

( ) Ran f $\in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

( ) Es creciente para $x \in \langle \pi; 2\pi \rangle$

( ) Es decreciente para $x \in \langle 1; 2 \rangle$

A) VVVV B) VFFV C) FFVV

D) FFFV E) FFFF

**5.** Si los puntos P(0; 3) y $Q\left(\frac{\pi}{2}; 2\right)$ pertenecen a la gráfica de la función:

$$f(x) = a\operatorname{sen}x + b\cos x$$

Determine su regla de correspondencia

A) $f(x) = 2\operatorname{sen}x - 3\cos x$

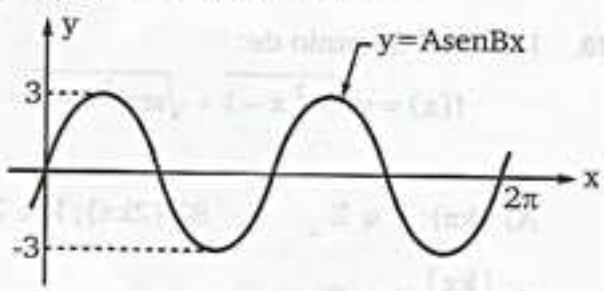
B) $f(x) = 2\operatorname{sen}x - \cos x$

C) $f(x) = \operatorname{sen}x - 3\cos x$

D) $f(x) = 3\operatorname{sen}x + 2\cos x$

E) $f(x) = 2\operatorname{sen}x + 3\cos x$

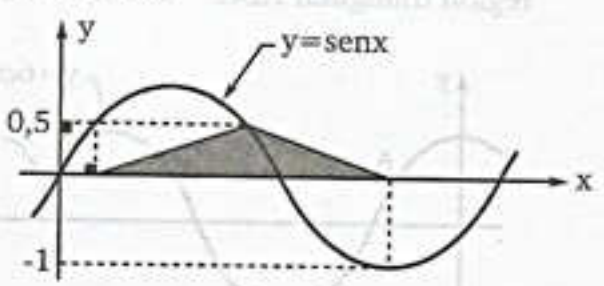
**6.** De la figura: hallar "A + B"




A) 2 B) 3 C) 4

D) 5 E) 6

**7.** Del gráfico, hallar el área de la región sombreada.




A) $\frac{\pi}{6}\ u^2$ B) $\frac{\pi}{3}\ u^2$ C) $\frac{\pi}{4}\ u^2$

D) $\frac{\pi}{2}\ u^2$ E) $\pi\ u^2$

**8.** Siendo "P" y "Q" los puntos de intersección entre las gráficas de las funciones $f(x) = \text{sen}x$ y $g(x) = \cos x$, en el intervalo de $[0; 2\pi]$. Hallar PQ.

A) $\pi$ u  B) $2\pi$ u  C) $\frac{\pi}{2}$ u

D) $\sqrt{\pi^2+1}$ u  E) $\sqrt{\pi^2+2}$ u

**9.** Hallar el dominio de la función f, cuya regla de correspondencia es:

$$f(x) = \sqrt{\text{sen}\,x - \cos x}$$

para x en $[0; 2\pi]$

A) $\left\langle 0; \frac{\pi}{4} \right\rangle$  B) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$  C) $\left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right\rangle$

D) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$  E) $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right\rangle$

**10.** Hallar el dominio de:

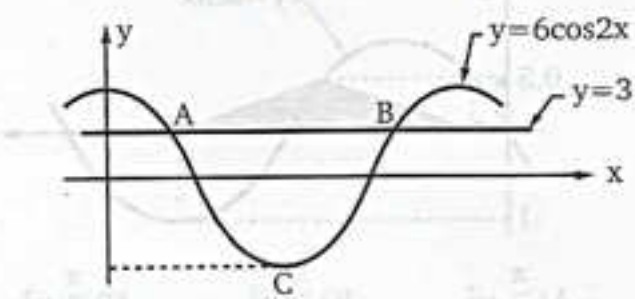
$$f(x) = \sqrt{\cos^2 x - 1} + \sqrt{\text{sen}^2 x - 1}$$

A) $\{k\pi\}; k \in \mathbb{Z}$  B) $\{2k\pi\}; k \in \mathbb{Z}$

C) $\left\{\frac{k\pi}{2}\right\}; k \in \mathbb{Z}$

D) $\mathbb{R}$  E) $\phi$

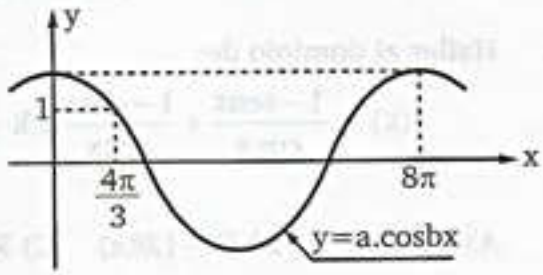
**11.** De la gráfica mostrada, hallar el área de la región triangular ABC.




A) $\pi$ u²  B) $2\pi$ u²  C) $3\pi$ u²

D) $4\pi$ u²  E) $6\pi$ u²

**12.** Según la gráfica mostrada, hallar: "a/b"

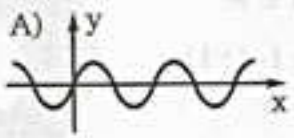


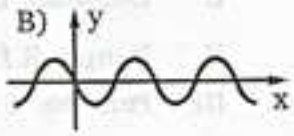

A) 2  B) 4  C) 6

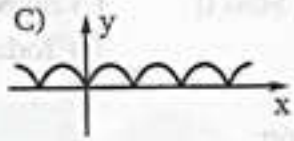
D) 8  E) 10

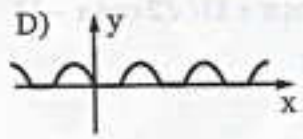
**13.** Bosquejar la gráfica de:

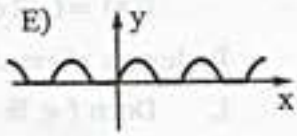
$$f(x) = \frac{\text{sen}x + |\text{sen}x|}{2}$$

A)


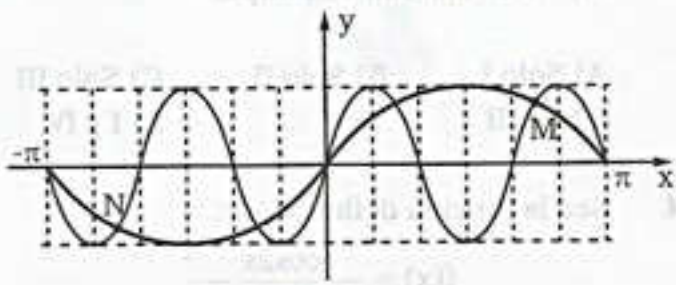

B)



C)



D)



E)



**14.** En un osciloscopio se muestran dos ondas senoidales de amplitud 1.
Hallar las abscisas de los puntos M y N




A) $\frac{3\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}$  B) $\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}$  C) $\frac{5\pi}{6}; -\frac{5\pi}{6}$

D) $\frac{2\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}$  E) $\frac{3\pi}{5}; -\frac{3\pi}{5}$

team CALAPENSHKO

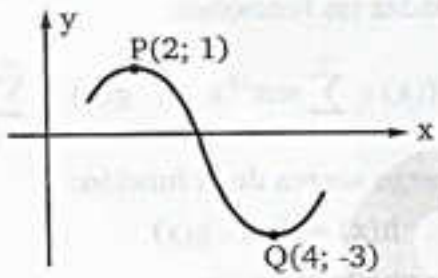

**15.** Indicar el período de la función:

$$f(x) = \operatorname{sen} x \cos^3 x - \cos x \operatorname{sen}^3 x$$

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $2\pi$

D) $\pi$ E) $\frac{\pi}{2}$

**16.** Hallar la regla de correspondencia de la senoide mostrada, siendo P y Q puntos máximo y mínimo respectivamente:




A) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + 1$

B) $f(x) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) - 1$

C) $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x - \pi) - 1$

D) $f(x) = 2\operatorname{sen}(\pi x + \pi) - 1$

E) $f(x) = 4\operatorname{sen}(2\pi x + \pi) + 1$

**17.** Determinar cuáles son funciones impares:

I. $f(x) = \operatorname{sen} x \cdot \cos x$

II. $g(x) = \cot\left(\frac{x + |x|}{2}\right)$

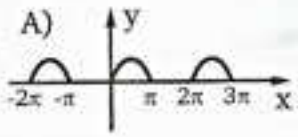
III. $h(x) = \sec(\pi \operatorname{csc} x)$

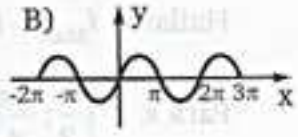
A) Solo I B) Solo II C) Solo III

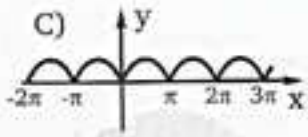
D) I y II D) I y III

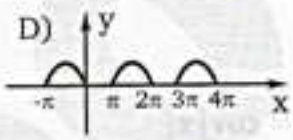
**18.** Graficar la función:

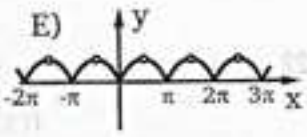
$$f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x \cdot \cos x \cdot \tan x}$$

A)



B)



C)



D)



E)



**19.** Hallar el rango de:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x \cdot \tan x - \cos x \cdot \cot x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$$

A) $Rf \in [2; +\infty\rangle$

B) $Rf \in [3; +\infty\rangle$

C) $Rf \in \langle -\infty; -2] \cup [2; +\infty\rangle$

D) $Rf \in \langle -\infty; -2] \cup [3; +\infty\rangle$

E) $Rf \in \langle -\infty; -1] \cup \langle 3; +\infty\rangle$

**20.** Para que valores de "x" en el intervalo $\langle 0; \pi\rangle$ la función f es no negativa:

$$f(x) = \tan x - \cot x$$

A) $\left\langle 0; \frac{\pi}{4} \right\rangle$

B) $\left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4} \right\rangle$

C) $\left\langle \frac{3\pi}{4}; \pi \right\rangle$

D) $\left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4} \right\rangle$

E) $\left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{4}; \pi \right\rangle$

**21.** Considerando a la función:

$$f(x) = 1 - 4\operatorname{sen} x \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Hallar: $f_{Máx.} - f_{Mín.}$

Para $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$

A) 2 B) $\sqrt{2}$ C) $-\sqrt{2}$
D) $-2$ E) 1

**22.** Si:

$$f(x) = \operatorname{cov}|x|$$

Indicar verdadero (V) o falso (F) en cada proposición:

( ) f(x) es creciente en $\left\langle\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\rangle$

( ) f(x) es decreciente en $\left\langle-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right\rangle$

( ) f(x) tiene como rango [0; 2]

( ) f(x) es una función par

A) FFFF B) FFFV C) FVFV
D) VVFF E) VVVV

**23.** Si el período de las funciones:

$$f(x) = \operatorname{sen}\pi x . \cos \pi x$$

$$g(x) = \frac{\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x}{\cos 3x + \cos x}$$

$$h(x) = 2^{\operatorname{sen} x}$$

Son $T_1$, $T_2$ y $T_3$ luego se cumple:

A) $T_1 > T_2 > T_3$
B) $T_1 = T_2 = T_3$
C) $T_1 < T_2 < T_3$
D) $T_1 + T_2 = 2T_3$
E) $T_1 . T_2 = T_3$

**24.** Acerca de la función:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1 + \cot^2 x}} + \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$$

Cuál de las alternativas es correcta:

A) Dom $f \in \mathbb{R}$
B) Ran $f \in \langle -1; 1\rangle$
C) Su período es: $T = \pi$
D) Es una función impar
E) Es discontinua para $x = \frac{k\pi}{2}$ ; $k \in \mathbb{Z}$

**25.** Dadas las funciones:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen}^{2k} x \quad \wedge \quad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos^{2k} x$$

Luego acerca de la función:

$$h(x) = f(x) . g(x)$$

Se puede afirmar:

I. Dom $h \in \mathbb{R}$
II. Ran $h \in \langle -1; 1\rangle$
III. Su período es: $T = \pi$
IV. Es una función par

A) Solo I B) Solo II C) Solo IV
D) I y III E) I y IV

**26.** Considerando a la función:

$$f(x) = \cos x . \cos 2x . \cos 4x$$

Hallar la ordenada del punto de intersección de la gráfica de la función g(x) definida así:

$$g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{9}\right)$$

y el eje y

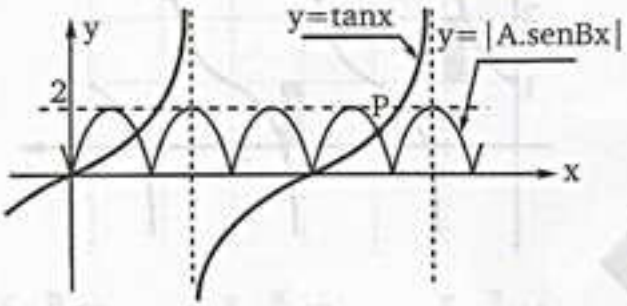
A) 1 B) 0,5 C) 0,25
D) 0,125 E) 0,1

**27.** Usando solo la definición hallar el período de la función:

$$f(x) = \tan(\cos x)$$

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\pi$ C) $\frac{3\pi}{2}$
D) $2\pi$ E) $4\pi$

**28.** Si la abscisa del punto P es "$x_0$"
Hallar: $\cos 3x_0 + 2\cos x_0$




A) 0,5 B) –0,5 C) 1
D) –1 E) 0

**29.** En cuantos puntos intercepta la gráfica de la función:

$$f(x) = 2x\cos x - \pi$$

Con el eje de las abscisas en el intervalo de $\langle -2\pi; 2\pi\rangle$

A) Uno B) Dos C) Tres
D) Cuatro E) Cinco

**30.** Resolver:

$$\operatorname{sen} x(2\operatorname{sen} x + 1) \geq 1$$

para x en $[0; \pi]$

A) $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ B) $\left[\frac{5\pi}{6}; \pi\right]$
C) $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$
D) $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ E) $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$

**31.** Determinar el rango de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{(1+\operatorname{sen} x\cos x)(1-\operatorname{sen} x\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x}$$

A) $\left\langle \frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$ B) $\left[\frac{3}{4}; +\infty\right\rangle$ C) $\left\langle \frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right\rangle$
D) $\left\langle \frac{1}{2}; +\infty\right\rangle$ E) $[1; +\infty\rangle$

**32.** Considerando a las funciones:

$$F(x) = 3\operatorname{sen} x - 4\cos x$$

$$G(x) = 3\operatorname{sen}^2 x - 6\cos^2 x$$

Hallar: $\text{Ran}F \cap \text{Ran}G$

A) $[-6; -5]$ B) $[-5; -3]$ C) $[3; 5]$
D) $[-5; 3]$ E) $[3; 6]$

**33.** La suma del máximo y mínimo valor de:

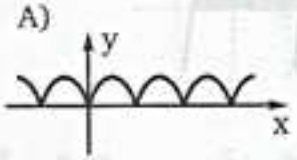
$$f(x) = 3\cos^2 x + 5\cos x$$

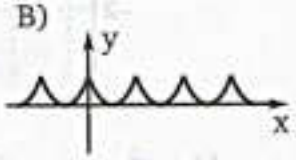
es:

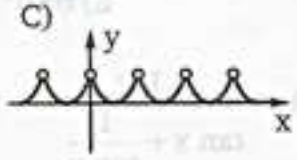
A) $\frac{91}{12}$ B) $\frac{61}{12}$ C) $\frac{71}{12}$
D) 0 E) 8

**34.** Bosquejar la gráfica de:

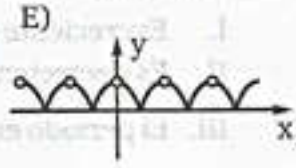
$$f(x) = \left|\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x} + \frac{\cos 3x}{\cos x}\right|$$

A)



B)



C)



D)

E)


**35.** Acerca de la función:

$f(x) = \sqrt{6}(\operatorname{sen}x + \cos x) + \sqrt{2}(\operatorname{sen}x - \cos x)$

Determinar verdadero (V) o falso (F) a cada proposición:

I. Su periodo es $2\pi$

II. Ranf $\in [\sqrt{2}; \sqrt{6}]$

III. Es creciente para $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{3} \right\rangle$

IV. $\exists!\, x_0 \in \langle 2; 3\rangle \,/\, f(x_0) = 0$

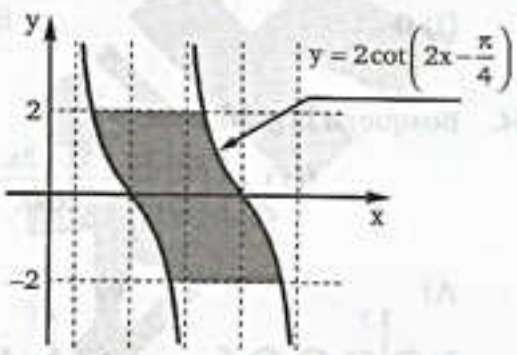
A) VVVV B) VFVV C) FVVF
D) FFVF E) FFFF

**36.** Hallar los puntos de discontinuidad de la función:

$$f(x) = \frac{3\operatorname{sen}2x + \operatorname{sen}4x}{2\operatorname{sen}2x + \operatorname{sen}x\cos 3x};\ k \in \mathbb{Z}$$

A) $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ B) $k\pi$ C) $\frac{k\pi}{4}$
D) $\frac{k\pi}{2}$ E) $2k\pi$

**37.** De la figura, hallar el área de la región sombreada:




A) $\pi u^2$ B) $2\pi u^2$ C) $3\pi u^2$
D) $4\pi u^2$ E) $6\pi u^2$

**38.** Sabiendo que: $f(x) = \dfrac{1}{\tan x + \dfrac{1}{\tan x}}$

Tenemos:

I. Es creciente en $\langle 2; 3\rangle$

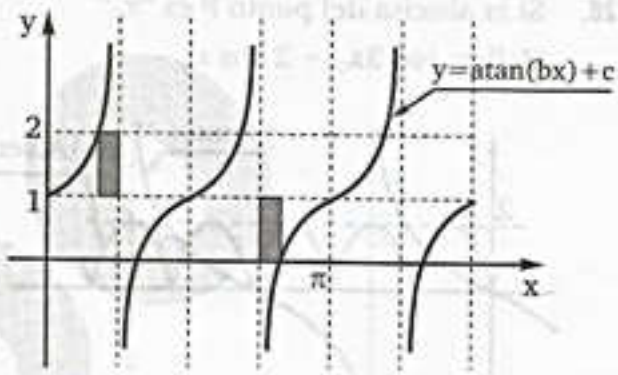
II. Es decreciente en $\langle 1; 1{,}5\rangle$

III. El período es $\frac{\pi}{4}$

Se puede afirmar:

A) Solo I B) Solo II C) I y II
D) I y III E) II y III

**39.** Hallar el área de la región sombreada, si el punto $\left(\frac{3\pi}{8}; 0\right)$ pertenece a la tangentoide.




A) $\frac{\pi}{2}u^2$ B) $\frac{\pi}{6}u^2$ C) $\frac{\pi}{8}u^2$
D) $\frac{\pi}{4}u^2$ E) $\frac{\pi}{5}u^2$

**40.** Dada la función:

$$f(x) = \tan^2 x + \sqrt{\tan^2 x + 8}$$

Hallar el número de valores enteros que toma el rango si:

$$\frac{5\pi}{4} < x \le \pi + \arctan(2\sqrt{2})$$

A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 10

**41.** Si el período de las funciones:

$f(x) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}6x}$

$g(x) = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}3x$

$h(x) = e^{\tan \pi x}$

son $T_1$, $T_2$ y $T_3$ luego se cumple:

A) $T_1 > T_1 > T_3$
B) $T_1 > T_2 > T_3$
C) $T_2 < T_3 < T_1$
D) $T_2 > T_3 > T_1$
E) $T_3 < T_1 < T_2$

team CALAPENSHKO


**42.** Indicar verdadero (V) o falso (F) en cada proposición:

I. La función $y = \text{vers } x$ es creciente $\forall\, x \in \langle \pi; 2\pi \rangle$

II. La función $y = \text{cov}x$ es una función par.

III. La función $y = |\, \text{Ex sec}x\,|$ obtiene su mínimo valor para $x = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

A) VVV B) VFV C) VVF
D) FFV E) FFF

**43.** Cuántos puntos de intersección existen entre las gráficas de las funciones:

$$f(x) = \text{vers } x$$
$$g(x) = \text{cov } 2x$$

en el intervalo $[-2\pi; 2\pi]$

A) 4 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

**44.** Hallar el período de la función:

$$f(x) = \frac{\text{vers}x - \text{cov}\,x}{1 + \text{ex sec}\,x}$$

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\pi$ C) $\frac{3\pi}{2}$
D) $2\pi$ E) $3\pi$

**45.** De la siguiente función:

$$f(x) = \cos(\text{sen}x)$$

Determinar (V) si es verdadero o (F) si es falso en cada una de las siguientes proposiciones:

I. La función es creciente para $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$

II. Es una función par de período "$\pi$"

III. El campo de variación de $f(x)$ es: $[\cos 1; 1]$

A) VVF B) FFV C) FVV
D) VVV E) FFF

**46.** Luego de esbozar la gráfica de la función:

$$g(x) = \frac{\cos x + \text{sen}\,x}{\cos x - \text{sen}\,x}$$

Hallar los valores de "x" que hacen positiva dicha función:

A) $\left\langle k\pi - \frac{\pi}{4}; k\pi + \frac{\pi}{4} \right\rangle;\ k \in \mathbb{Z}$

B) $\left\langle k\pi - \frac{\pi}{2}; k\pi + \frac{\pi}{4} \right\rangle;\ k \in \mathbb{Z}$

C) $\left\langle k\pi - \frac{\pi}{4}; k\pi + \frac{\pi}{2} \right\rangle;\ k \in \mathbb{Z}$

D) $\left\langle k\pi - \frac{\pi}{2}; k\pi + \frac{\pi}{2} \right\rangle;\ k \in \mathbb{Z}$

A) $\left\langle k\pi + \frac{\pi}{4}; k\pi + \frac{\pi}{2} \right\rangle;\ k \in \mathbb{Z}$

**47.** Si: $|x| \leq \frac{\pi}{12}$. Indicar el mayor valor que puede tomar:

$$E(x) = \frac{\sec\left|x + \frac{\pi}{12}\right|}{\cot|3x| \,.\, \csc\left|2x - \frac{\pi}{4}\right|}$$

A) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

C) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$

D) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$ E) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$

**48.** Cuántos puntos de intersección existen entre las gráficas de las funciones:

$f(x) = x + \cos x$

$g(x) = x \cos x$

en el intervalo para x en $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$

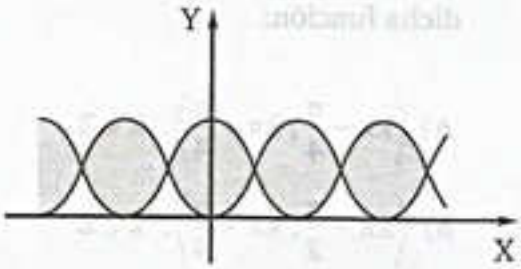
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

team CALAPENSHKO

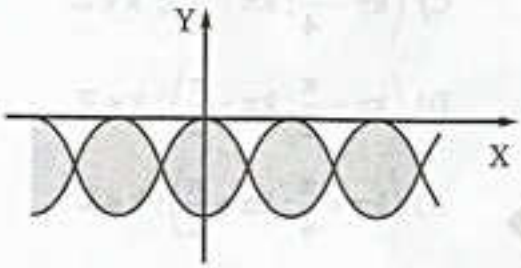

**49.** Expresar gráficamente el dominio de la función f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \sqrt{\cos x - |y|}$$

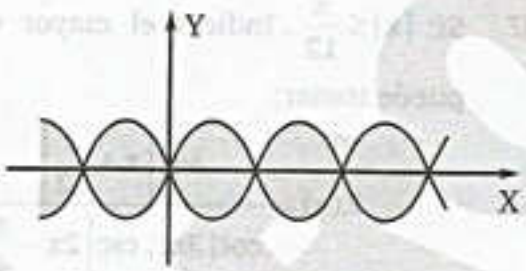
A)



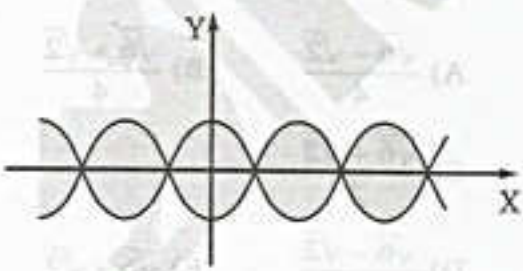

B)



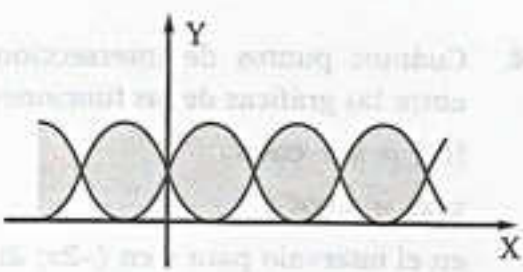

C)




D)




E)




**50.** Considerando la función:

$$f(x) = [\![\text{sen } x]\!] - [\![\cos x]\!]$$

Hallar los valores de "x" para los cuales se cumple $f(x) = 0$

NOTA: $[\![\ ]\!]$ : máximo entero

A) $\left\langle k\pi - \frac{\pi}{4}; k\pi + \frac{\pi}{4} \right\rangle; k \in \mathbb{Z}$

B) $\left\langle k\pi - \frac{\pi}{4}; k\pi + \frac{\pi}{2} \right\rangle; k \in \mathbb{Z}$

C) $\left\langle k\pi - \frac{\pi}{2}; k\pi + \frac{\pi}{4} \right\rangle; k \in \mathbb{Z}$

D) $\left\langle k\pi - \pi; k\pi + \frac{\pi}{4} \right\rangle; k \in \mathbb{Z}$

E) $\left\langle k\pi; k\pi + \frac{\pi}{2} \right\rangle; k \in \mathbb{Z}$

team CALAPENSHKO

Capítulo 13

# Funciones Trigonométricas Inversas

**CAPACIDADES**

- Determinar el dominio, rango e indicar la gráfica de las funciones trigonométricas inversas.
- Aplicar las diversas propiedades que relacionan las funciones trigonométricas directas e inversas.

## BROOKE TAYLOR Y EL MOVIMIENTO ONDULATORIO

En su Methodus Incrementorum Directa et Inversa (Londres, 1715) desarrolló una nueva parte dentro de la investigación matemática, que hoy se llama cálculo de las diferencias finitas. Entre las distintas aplicaciones, se usó para determinar la forma del movimiento de una cuerda vibrante, reducido por él por vez primera con éxito a principios mecánicos. El mismo trabajo contenía la famosa fórmula conocida como Teorema de Taylor, cuya importancia sólo se reconoció en 1772, cuando Lagrange se dio cuenta de su valor y lo definió como "el diferencial principal del fundamento del cálculo".

BROOK TAYLOR
GENIO DEL CÁLCULO

En su Ensayo sobre la prospectiva lineal (Londres, 1715) Taylor expresó los verdaderos principios de la prospectiva de modo más original y general que los anteriores; pero el trabajo tuvo algún problema por su brevedad y su oscuridad, defectos que se pueden aplicar a la mayor parte de sus obras.

Como matemático, era el único inglés tras Isaac Newton y Roger Cotes capaz de competir con matemáticos como Johann Bernoulli. Sin embargo, gran parte de los resultados de su demostración no tuvieron repercusión o se perdieron a causa de su incapacidad de expresar sus ideas completamente y con claridad.

Un trabajo póstumo titulado Contemplatio Philosophica fue impreso en 1793 por su sobrino, Sir William Young, que tenía un prólogo sobre la vida del autor y las cartas recibidas por Bolingbroke, Bossuet. Muchos de sus artículos breves se publicaron en la "Phylosophycal Transactions of the Royal Society", volúmenes del 27 al 33, incluyendo los informes de algunos experimentos interesantes sobre el magnetismo e sobre la atracción del vaso capilar. Publicó en 1719 una versión mejorada de su trabajo sobre la prospectiva, con el título Nuevos principios de la prospectiva lineal, revisada por Colson en 1749, e impresa con el retrato y la biografía del autor en 1811.

Taylor en su obra Methodus Incrementorum hizo una primera aproximación completa sobre la refracción astronómica. En 1715, Taylor encuentra que el movimiento de un punto arbitrario de la cuerda es el de un péndulo simple y determina su tiempo de vibración (periodo). Obtiene en su lenguaje propio, un tanto distinto del nuestro, la ecuación diferencial de la cuerda vibrante, es decir la ecuación unidimensional de ondas, y a partir de ella halla una solución: la forma de la curva que toma la cuerda en un instante dado es sinusoidal. Base para obtener la inversa de una función periódica.

team CALAPENSHKO



## INTRODUCCIÓN

Sin duda alguna el tema de funciones trigonométricas inversas para muchos de nosotros es complicado, pues no estamos acostumbrados a ver expresiones como y = arc senx (se lee: "y es un arco cuyo seno es x"), pero nos es familiar esta otra expresión como: y = senx. En este tema analizaremos la relación entre funciones trigonométricas inversas y funciones trigonométricas directas.

# FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

## 1. FUNCIÓN UNIVALENTE

También llamada función inyectiva, es aquel conjunto de pares ordenados (x; y) tal que para cada valor de la segunda componente (y) existe un único valor de la primera componente (x).

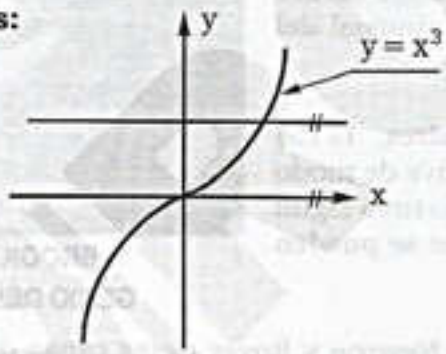
**Ejemplos:** $f = \{(1;0); (\pi;3); (-1;1)\}$ .... función inyectiva

$g = \{(0;0); (1;0{,}5); (2;0)\}$ .... no es función iyectiva, pues para $y = 0$ le corresponden $x = 0$ o $x = 2$

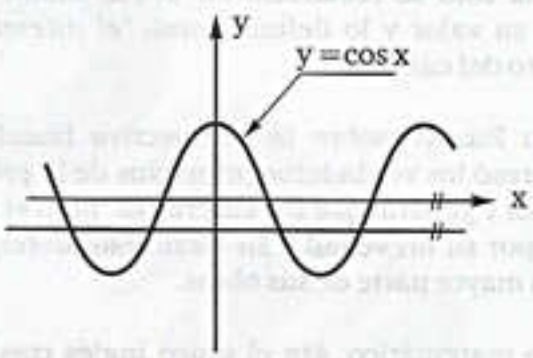
## RECONOCIMIENTO GRÁFICO DE UNA FUNCIÓN INYECTIVA

Una función es inyectiva si toda recta paralela al eje x corta a su gráfica a lo más en un punto.

**Ejemplos:**




Función inyectiva




Función no inyectiva

**OBSERVACIÓN**

Las funciones trigonométricas por ser periódicas, no son inyectivas

## 2. FUNCIÓN INVERSA

Si una función f es biyectiva (inyectiva y suryectiva) entonces tiene inversa y se denota por $f^*$ o $f^{-1}$.

Para obtener una función inversa, en su regla de correspondencia se intercambia **x** por **y** e **y** por **x**.

**Ejemplos:** Hallar la función inversa de:

$y = 2x + 1$ para x en $[0; 3]$

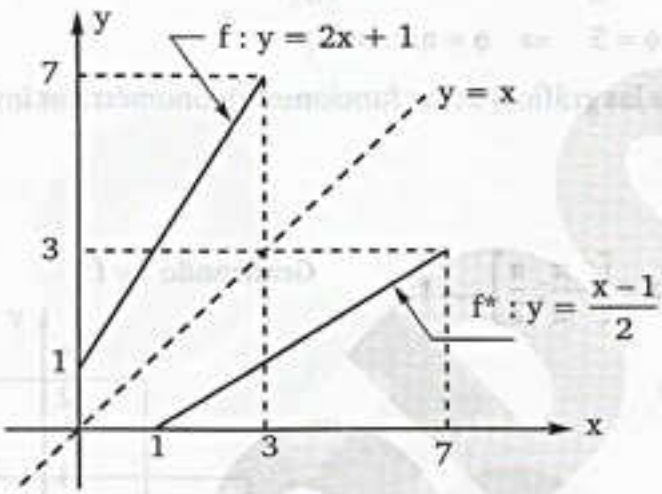
team CALAPENSHKO


**Resolución:** $y = 2x + 1 \;;\; x \in [0;3]$ ..... f

Despejando x: $x = \dfrac{y-1}{2}$

Intercambiando variables: $y = \dfrac{x-1}{2}$ ..... f*

Graficando:




Se observa:
$Df = [0;3]$ y $Rf = [1;7]$

Luego:
$Df^* = [1;7]$ y $Rf^* = [0;3]$

**Conclusión:**

$Df^* = Rf$

$Rf^* = Df$

**OBSERVACIÓN**

Las gráficas de las funciones f y f* son simétricas respecto a la recta $y = x$

## FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Las funciones trigonométricas ya son suryectivas pero no son inyectivas, luego restringiremos su dominio (como el cuadro adjunto) haremos que sean inyectivas, por lo cual podremos hallar su función inversa.

| FUNCIÓN | DOMINIO | RANGO |
|---|---|---|
| $y = \operatorname{sen} x$ | $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ | $[-1; 1]$ |
| $y = \cos x$ | $[0; \pi]$ | $[-1; 1]$ |
| $y = \tan x$ | $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ | $\mathbb{R}$ |
| $y = \cot x$ | $\langle 0; \pi \rangle$ | $\mathbb{R}$ |
| $y = \sec x$ | $\left[0; \frac{\pi}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi\right]$ | $\mathbb{R} - \langle -1; 1 \rangle$ |
| $y = \csc x$ | $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right\rangle \cup \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right]$ | $\mathbb{R} - \langle -1; 1 \rangle$ |

**Notación:** Si: $FT(\theta) = n$; donde $\theta$ pertenece al rango de la respectiva función inversa.

$$\theta = \text{arc}\,FT(n) \quad \vee \quad \theta = FT^{-1}(n)$$

Se lee: $\theta$ es un arco cuya función trigonométrica es "n".

**Ejemplos:**

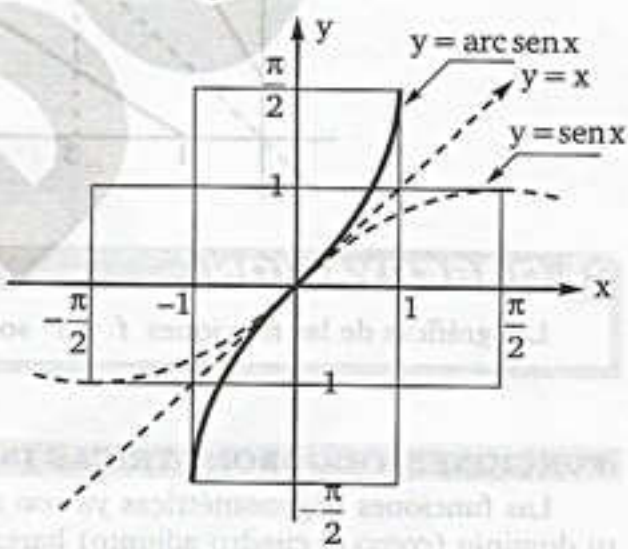
- Si: $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)$
- Si: $\cos\beta = \frac{1}{3} \Rightarrow \beta = \operatorname{arccos}\left(\frac{1}{3}\right)$
- Si: $\tan\phi = 5 \Rightarrow \phi = \operatorname{arccot}(5)$

A continuación le presentamos las gráficas de las funciones trigonométricas inversas.

## 1. FUNCIÓN ARCO SENO

Sea la función: $y = \operatorname{sen} x \;;\; x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .... f

Graficando f y f*




Despejamos x: $x = \operatorname{arcsen} y$

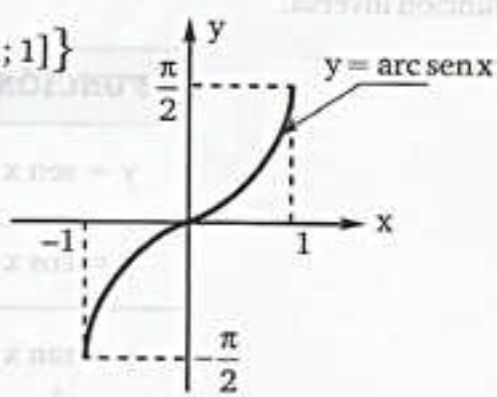
Intercambiando variables:

$y = \operatorname{arcsen} x$ ..... f*

Luego: $Df^* = Rf = [-1; 1]$

$Rf^* = Df = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Finalmente: $f = \left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = \operatorname{arcsen} x \;;\; x \in [-1; 1]\right\}$




Dominio: $[-1; 1]$

Rango: $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Función creciente impar

## 2. FUNCIÓN ARCO COSENO

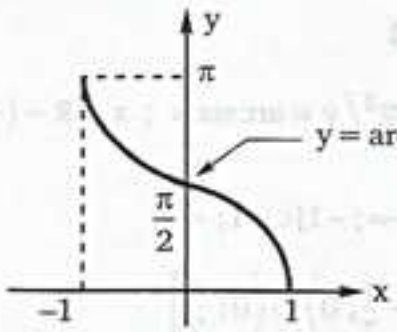
$$f = \left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = \operatorname{arccos} x \;;\; x \in [-1; 1]\right\}$$

Dominio: $[-1; 1]$

Rango: $[0; \pi]$

Función decreciente

team CALAPENSHKO

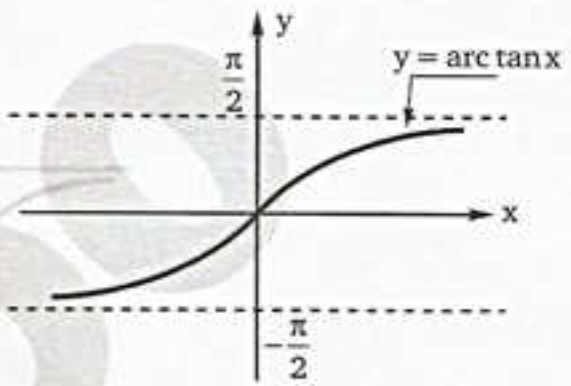

## 3. FUNCIÓN ARCO TANGENTE

$$f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = \arctan x \ ; \ x \in \mathbb{R}\}$$

Dominio: $\mathbb{R}$

Rango: $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$

Función creciente e impar



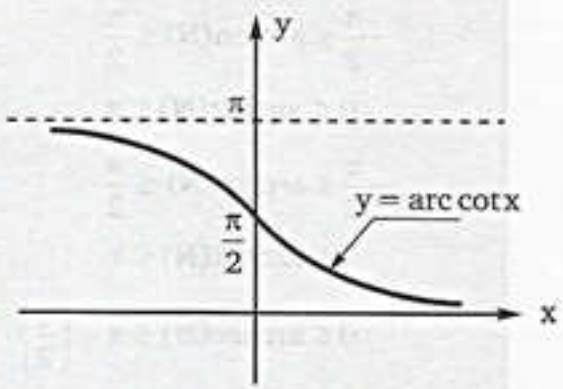

## 4. FUNCIÓN ARCO COTANGENTE

$$f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = \operatorname{arccot} x \ ; \ x \in \mathbb{R}\}$$

Dominio: $\mathbb{R}$

Rango: $\langle 0; \pi \rangle$

Función decreciente



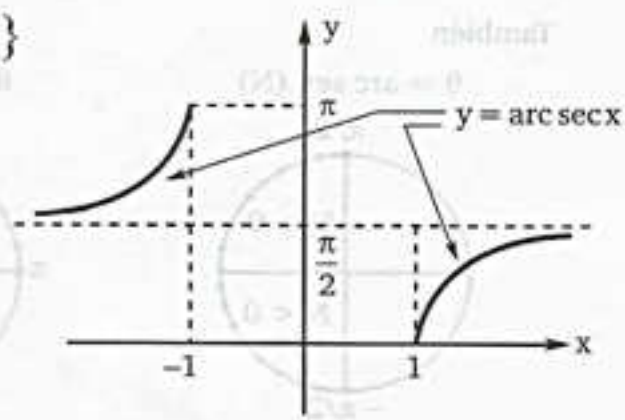

## 5. FUNCIÓN ARCO SECANTE

$$f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = \operatorname{arcsec} x \ ; \ x \in \mathbb{R} - \langle -1; 1 \rangle\}$$

Dominio: $\langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty \rangle$

Rango: $\left[0; \frac{\pi}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi\right]$

Función creciente



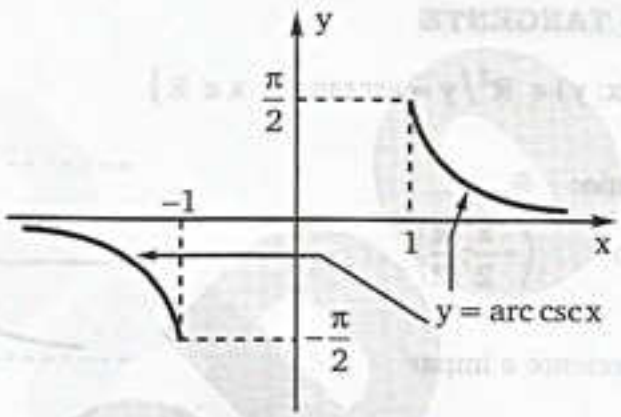
## 6. FUNCIÓN ARCO COSECANTE

$$f=\left\{(x;y)\in \mathbb{R}^2 / y=\operatorname{arcsec} x \ ; \ x\in \mathbb{R}-\langle -1;1\rangle\right\}$$

Dominio : $\langle -\infty;-1]\cup[1;+\infty\rangle$

Rango : $\left[-\frac{\pi}{2};0\right\rangle\cup\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right]$

Función decreciente




$$\underbrace{FT(\theta)}_{\text{Arco}}=\underbrace{N}_{\#} \quad \Rightarrow \quad \theta=\text{arc}\,FT(N)$$

$$-\frac{\pi}{2}\le \operatorname{arcsen}(N)\le \frac{\pi}{2}$$

$$0\le \operatorname{arccos}(N)\le \pi$$

$$-\frac{\pi}{2}\le \arctan(N)\le \frac{\pi}{2}$$

$$0\le \operatorname{arccot}(N)\le \pi$$

$$0\le \operatorname{arcsec}(N)\le \pi-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$-\frac{\pi}{2}\le \operatorname{arccsc}(N)\le \frac{\pi}{2}-\{0\}$$

**Ejemplos:**

$$\text{arc sen}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$$

$$\text{arc cos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$$

$$\text{arc tan}(-1)=-\frac{\pi}{4}$$

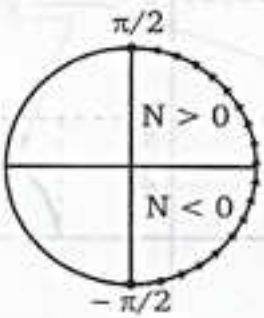
$$\text{arc cot}(\sqrt{3})=\frac{\pi}{6}$$

$$\text{arc sec}(1)=0$$

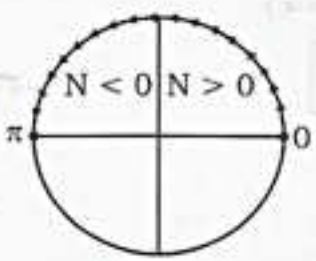
$$\text{arc csc}(-2)=-\frac{\pi}{6}$$

También

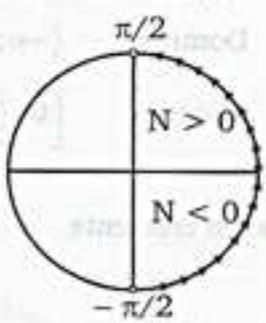
$\theta$ = arc sen (N)




$\theta$ = arc cos (N)



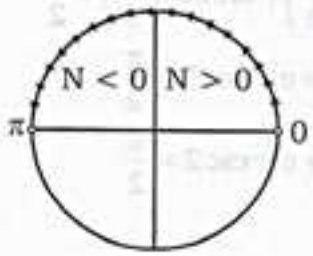

$\theta$ = arc sen (N)



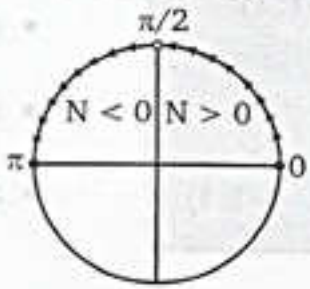
team CALAPENSHKO



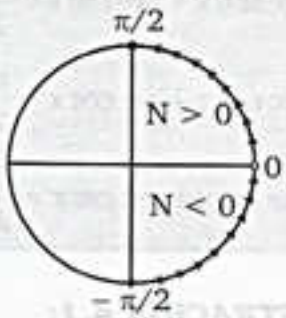
$\theta = \text{arc cot}(N)$




$\theta = \text{arc sec}(N)$




$\theta = \text{arc csc}(N)$




## PROPIEDADES PRINCIPALES

**1)**

$$\begin{aligned}
&\text{sen}(\text{arcsen}(N)) = N \quad ; \quad N \in [-1;1] \\
&\cos(\text{arccos}(N)) = N \quad ; \quad N \in [-1;1] \\
&\tan(\text{arctan}(N)) = N \quad ; \quad N \in \mathbb{R} \\
&\cot(\text{arccot}(N)) = N \quad ; \quad N \in \mathbb{R} \\
&\sec(\text{arcsec}(N)) = N \quad ; \quad N \in \mathbb{R} - \langle -1;1 \rangle \\
&\csc(\text{arccsc}(N)) = N \quad ; \quad N \in \mathbb{R} - \langle -1;1 \rangle
\end{aligned}$$

**Ejemplos:**

- $\text{sen}\left(\text{arc sen}\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$
- $\cos\left(\text{arc cos}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$
- $\tan(\text{arc tan}\,4) = 4$

**2)**

$$\begin{aligned}
&\text{arcsen}(\text{sen}\,\theta) = \theta \quad ; \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \\
&\text{arccos}(\cos\theta) = \theta \quad ; \quad \theta \in [0;\pi] \\
&\text{arctan}(\tan\theta) = \theta \quad ; \quad \theta \in \left\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2} \right\rangle \\
&\text{arccot}(\cot\theta) = \theta \quad ; \quad \theta \in \langle 0;\pi \rangle \\
&\text{arcsec}(\sec\theta) = \theta \quad ; \quad \theta \in [0;\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \\
&\text{arccsc}(\csc\theta) = \theta \quad ; \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] - \{0\}
\end{aligned}$$

**Ejemplos:**

- $\text{arc sen}\left(\text{sen}\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4}$
- $\text{arc cos}\left(\cos\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$
- $\text{arccot}(\cot 3) = 3$

**3)**

$$\begin{aligned}
&\text{arcsen}(-x) = -\text{arcsen}\,x \quad ; \quad x \in [-1;1] \\
&\text{arccos}(-x) = \pi - \text{arccos}\,x \quad ; \quad x \in [-1;1] \\
&\text{arctan}(-x) = -\text{arctan}\,x \quad ; \quad x \in \mathbb{R} \\
&\text{arccot}(-x) = \pi - \text{arccot}\,x \quad ; \quad x \in \mathbb{R} \\
&\text{arcsec}(-x) = \pi - \text{arcsec}\,x \quad ; \quad x \in \mathbb{R} - \langle -1;1 \rangle \\
&\text{arccsc}(-x) = -\text{arccsc}\,x \quad ; \quad x \in \mathbb{R} - \langle -1;1 \rangle
\end{aligned}$$

**Ejemplos:**

- $\text{arcsen}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\text{arcsen}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = -\dfrac{\pi}{4}$
- $\text{arctan}\left(-\sqrt{3}\right) = -\text{arctan}\sqrt{3} = -\dfrac{\pi}{3}$
- $\text{arccos}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \pi - \text{arccos}\dfrac{1}{2} = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$

**4)**

$$\arcsen x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \;;\; x \in [-1;1]$$

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} \;;\; x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arcsec} x + \operatorname{arccsc} x = \frac{\pi}{2} \;;\; x \in \mathbb{R} - \langle -1;1 \rangle$$

**Ejemplos:**

- $\arcsen\left(\frac{1}{3}\right) + \arccos\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{2}$
- $\arctan 5 + \operatorname{arccot} 5 = \frac{\pi}{2}$
- $\operatorname{arcsec} 2 + \operatorname{arccsc} 2 = \frac{\pi}{2}$

***DEMOSTRACIÓN 4.1:***

Sea: $\arcsen x + \arccos x = \frac{\pi}{2},\ x \in [-1,1]$

$\alpha = \arcsen x \ \wedge\ \theta = \arccos x$

$\rightarrow \operatorname{sen}\alpha = x \wedge \cos\theta = x \ \rightarrow\ x = \operatorname{sen}\alpha = \cos\theta$

De la última igualdad se deduce que: $\alpha + \theta = \frac{\pi}{2}$

$\therefore\ \arcsen x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

La demostración es análoga para las otras 2 propiedades.

**5)**

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + k\pi$$

Si: $xy < 1 \Rightarrow k = 0$

Si: $xy > 1 \wedge x > 0 \Rightarrow k = 1$

Si: $xy > 1 \wedge x < 0 \Rightarrow k = -1$

**Ejemplo:**

Calcular: $E = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$

**Resolución:**

Como: $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) < 1 \ \Rightarrow\ k = 0$

Luego: $E = \arctan\left(\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}\right) = \arctan(1)$

$\therefore\ E = \frac{\pi}{4}$

**6)**

$$\arcsen x = \operatorname{arccsc}\left(\frac{1}{x}\right) \;;\; -1 \le x \le 1 - \{0\}$$

$$\arccos x = \operatorname{arcsec}\left(\frac{1}{x}\right) \;;\; -1 \le x \le 1 - \{0\}$$

$$\arctan x = \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{x}\right) \;;\; x > 0$$

$$\arctan x = \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{x}\right) - \pi \;;\; x < 0$$

**Ejemplos:**

- $\arcsen\left(\frac{2}{3}\right) = \operatorname{arccsc}\left(\frac{3}{2}\right)$
- $\arccos\left(\frac{1}{4}\right) = \operatorname{arcsec}(4)$
- $\arctan(5) = \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{5}\right)$
- $\arctan(-7) = \operatorname{arccot}\left(-\frac{1}{7}\right) - \pi$

team CALAPENSHKO


**DEMOSTRACIÓN:**

*) $\operatorname{arcsen} x = \operatorname{arc}\csc\left(\frac{1}{x}\right) ; -1 \le x \le 1 - \{0\}$

Sea: $\alpha = \operatorname{arcsen} x \rightarrow \operatorname{sen}\alpha = x \ ; \ \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$

$$\theta = \operatorname{arc}\csc\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow \csc\theta = \frac{1}{x} \ ; \ \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$$

$$\rightarrow x = \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\theta$$

Observando el intervalo de variación de $\alpha$ y $\theta$, se deduce que $\alpha = \theta$

$$\therefore \ \operatorname{arcsen} x = \operatorname{arc}\csc\left(\frac{1}{x}\right)$$

*) $\operatorname{arc}\tan x = \operatorname{arc}\cot\left(\frac{1}{x}\right) - \pi \ ; \ x < 0$

Sea: $\alpha = \operatorname{arc}\tan x \rightarrow \tan\alpha = x$

$$\theta = \operatorname{arc}\cot\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow \cot\theta = \frac{1}{x}$$

Debido a que $x < 0 \ \Rightarrow \alpha \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, 0 \right] \ \wedge \ \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, 0\right\rangle$

Ahora : $x = \tan\alpha = \tan\theta$

Debido al intervalo de variación de $\alpha$ y $\theta$.

$$\theta = \alpha + \pi \rightarrow \alpha = \theta - \pi$$

$$\therefore \ \operatorname{arc}\tan x = \operatorname{arc}\cot\left(\frac{1}{x}\right) - \pi \ ; x < 0$$

twitter.com/calapenshko

## EJERCICIOS DE APLICACIÓN

**1.** Relaciona:

a) $\arcsen\frac{1}{2}$ • $\frac{\pi}{4}$

b) $\arctan 1$ • $\frac{\pi}{3}$

c) $\operatorname{arcsec}\sqrt{2}$ • $\frac{\pi}{6}$

**2.** Si:

a) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{4} \Rightarrow x = .....$

b) $\tan\theta = \frac{3}{7} \Rightarrow \theta = .....$

c) $\sec\beta = \sqrt{7} \Rightarrow \beta = .....$

**3.** Calcule el valor de:

a) $\arcsen\frac{\sqrt{7}}{4} + \arccos\frac{\sqrt{7}}{4} = .....$

b) $\operatorname{arcsec}(5) + \operatorname{arccsc}(5) = .....$

c) $\arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arccot}\left(-\frac{1}{2}\right) = .....$

**4.** Calcule el valor de:

a) $\arccos\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = .....$

b) $\arctan(\cos 2\pi) = .....$

c) $\operatorname{arcsec}\left(\tan\frac{\pi}{4} + \cot\frac{\pi}{4}\right) = .....$

**5.** Calcule el valor de:

a) $\arcsen\left(-\frac{1}{2}\right) = .....$

b) $\arccos\left(-\sqrt{\frac{2}{2}}\right) = .....$

c) $\operatorname{arcsec}(-1) = .....$

**6.** Calcule el valor de

a) $\operatorname{sen}\left(\arcsen\frac{1}{3}\right) = .....$

b) $\tan(\arctan 3) = .....$

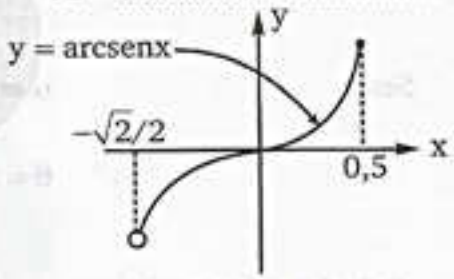
c) $\operatorname{arcsec}\left(\sec\frac{\pi}{3}\right) = .....$

d) $\operatorname{arccot}\left(\cot\frac{\pi}{4}\right) = .....$

**7.** Determine el dominio y rango.

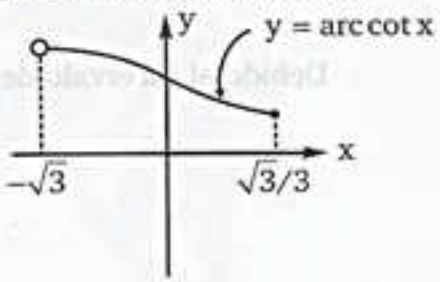
Df = .....

Rf = .....




Df = .....

Rf = .....




**8.** Determine el Rango de cada función:

a) $f(x) = \arcsen x;\ x \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right]$

b) $f(x) = \arctan x;\ x \in \left[1; \sqrt{3}\right\rangle$

c) $f(x) = \sec x;\ x \in \left\langle -1; 2\right]$

team CALAPENSHKO



## PROBLEMAS RESUELTOS

**PROBLEMA 1** Determine el valor de M, Si:

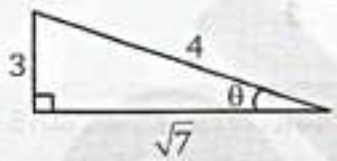
$$M = \operatorname{sen}\left(\arccos\frac{\sqrt{7}}{4}\right) + \cos\left(\arctan\sqrt{15}\right)$$

**Resolución:** Lo pedido : $M = \operatorname{sen}\left(\arccos\frac{\sqrt{7}}{4}\right) + \cos\left(\arctan\sqrt{15}\right)$

Sea :

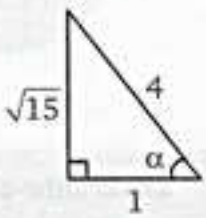
i) $\theta = \arccos\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\therefore \cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$, en un triángulo rectángulo




ii) $\alpha = \arctan\sqrt{15}$

$\therefore \tan\alpha = \sqrt{15}$, en un triángulo rectángulo




Reemplazando en "M"

$$M = \operatorname{sen}\theta + \cos\alpha$$

$$M = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\therefore \mathbf{M = 1}$$

**PROBLEMA 2** Determine el equivalente de N, si:

$$N = \operatorname{sen}\left\{\arccos\left[\operatorname{sen}\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]\right\}$$

**Resolución:** De lo pedido : $N = \operatorname{sen}\left\{\arccos\left[\operatorname{sen}\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]\right\}$

$$N = \operatorname{sen}\left\{\arccos\left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right]\right\}$$

$$N = \operatorname{sen}\left\{\arccos\frac{1}{2}\right\}$$

Luego : $N = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$

$$\therefore \mathbf{N = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

**Sabemos:**

$$-\frac{\pi}{2} \le \operatorname{arcsen}(N) \le \frac{\pi}{2}$$

$$0 \le \arccos(N) \le \pi$$

**PROBLEMA 3** Determine el valor de "x" si: $\arctan x = \arccos\left(\frac{3}{4}\right)$

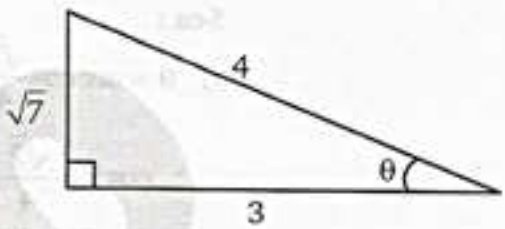
**Resolución:** De la condición : $\arctan(x) = \arccos\left(\frac{3}{4}\right)$

Haciendo : $\theta = \arctan(x) = \arccos\left(\frac{3}{4}\right)$

i) $\theta = \arctan(x) \Rightarrow \tan\theta = x$

ii) $\theta = \arccos\left(\frac{3}{4}\right) \Rightarrow \cos\theta = \frac{3}{4}$

Luego:




Reemplazando en (i) : $x = \tan\theta$

$$\therefore \quad \mathbf{x = \frac{\sqrt{7}}{3}}$$

**PROBLEMA 4** Determine el valor de: $P = \tan(\arctan 4 + \arctan 5 - \pi)$

**Resolución:** Lo pedido : $P = \tan(\arctan 4 + \arctan 5 - \pi)$

Sea: $\begin{cases} \alpha = \arctan 4 \Rightarrow \tan\alpha = 4 \\ \theta = \arctan 5 \Rightarrow \tan\theta = 5 \end{cases}$

Reemplazando en "P":

$$P = \tan(\alpha + \theta - \pi)$$
$$P = \tan\{-[\pi - (\alpha + \theta)]\}$$

Por reducción al primer cuadrante:

$$P = -\tan[\pi - (\alpha + \theta)]$$
$$P = -[-\tan(\alpha + \theta)]$$
$$P = \tan(\alpha + \theta)$$

Por compuesto : $P = \frac{\tan\alpha + \tan\theta}{1 - \tan\alpha\tan\theta}$

Reemplazando : $\tan\alpha = 4 \ \wedge \ \tan\theta = 5$

$$P = \frac{4 + 5}{1 - (4)(5)}$$

$$\therefore \quad \mathbf{P = -\frac{9}{19}}$$

**PROBLEMA 5** Si: $\theta = \arctan(-1) + \arccos\left(\frac{1}{2}\right)$

Calcule E: $E = \operatorname{sen} 2\theta + \cos 4\theta$

team CALAPENSHKO



**Resolución:** De la condición : $\theta = \arctan(-1) + \arccos\frac{1}{2}$

$$\theta = -\arctan(1) + \arccos\frac{1}{2}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{12}$$

Reemplazando en lo pedido "E":

$$E = \operatorname{sen} 2\theta + \cos 4\theta$$

$$E = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3}$$

$$E = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\therefore \mathbf{E = 1}$$

**PROBLEMA 6** Simplifique:

$$\frac{\cos\left(2\operatorname{arc\,sen}\frac{2}{3}\right)}{\tan^2\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)}$$

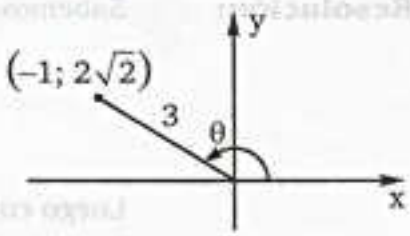
**Resolución:** Considerando que : $K = \dfrac{\cos\left(2\operatorname{arc\,sen}\frac{2}{3}\right)}{\tan^2\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)}$

Supongamosque:
$$\begin{cases} \alpha = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{3} \\ \theta = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{3} = \frac{x}{r} \end{cases}$$

Luego : $K = \dfrac{\cos(2\alpha)}{\tan^2(\theta)}$

Por identidad del ángulo doble:

$$K = \frac{1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha}{\tan^2\theta}$$




Reemplazando : $K = \dfrac{1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{2\sqrt{2}}{-1}\right)^2} = \dfrac{1 - \frac{8}{9}}{8}$

$$\begin{cases} x = -1 \\ r = 3 \\ x^2 + y^2 = r^2 \\ \therefore\ y = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\therefore \mathbf{K = \frac{1}{72}}$$

**PROBLEMA 7** Si $x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$ y la función g está definida por: $g(x) = \frac{2\pi + \cos^{-1}(2x)}{\pi + \cos^{-1}(2x)}$, hallar el rango de g.

**ADMISIÓN CALLAO 2016 - I**

**Resolución:**

Sea: $g(x) = \frac{\pi}{\pi + \cos^{-1}(2x)} + 1$

Entonces: $-\frac{\sqrt{3}}{4} \le x \le \frac{\sqrt{2}}{4} \rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} \le 2x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{\pi}{4} \le \cos^{-1}(2x) \le \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{4} \le \pi + \cos^{-1}(2x) \le \frac{11\pi}{6}$$

$$\frac{6}{11\pi} \le \frac{1}{\pi + \cos^{-1}(2x)} \le \frac{4}{5\pi}$$

$$\frac{17}{11} \le \frac{\pi}{\pi + \cos^{-1}(2x)} + 1 \le \frac{9}{5} \rightarrow \frac{17}{11} \le g(x) \le \frac{9}{5}$$

$$\therefore \text{Ran}(g) = \left[\frac{17}{11}; \frac{9}{5}\right]$$

**PROBLEMA 8** Si: $\arcsen x + \arcsen y + \arcsen z = \frac{2\pi}{3}$

$\forall x, y, z \in [-1; 1]$. Determinar el valor de M, si:

$M = \arccos x + \arccos y + \arccos z$

**Resolución:**

Sabemos por propiedad:

$$\boxed{\arcsen(N) + \arccos(N) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow N \in [-1; 1]}$$

Luego como: $\frac{2\pi}{3} = \arcsen x + \arcsen y + \arcsen z$

$$M = \arccos x + \arccos y + \arccos z$$

Sumando m.a.m: $\frac{2\pi}{3} + M = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$

$$\therefore M = \frac{5\pi}{6}$$

**PROBLEMA 9** Calcule el valor de M, si:

$$M=\frac{\sqrt{\pi^2-2\pi\arccos x+\sqrt{\operatorname{arcsen} x-\frac{\pi}{2}}}}{\arctan x+\operatorname{arcsen}(x-1)}$$

**Resolución:** Sabemos: $\boxed{-\frac{\pi}{2}\le \operatorname{arcsen} x \le \frac{\pi}{2}}$

$$M=\frac{\sqrt{\pi^2-2\pi\arccos x+\sqrt{\operatorname{arcsen} x-\frac{\pi}{2}}}}{\arctan x+\operatorname{arcsen}(x-1)}$$

Analizando la expresión " M":

$$* \quad \operatorname{arcsen} x-\frac{\pi}{2}\ge 0$$

$$\operatorname{arcsen} x \ge \frac{\pi}{2}$$

$$\text{i) } \operatorname{arcsen} x>\frac{\pi}{2} \quad \text{o} \quad \text{ii) } \operatorname{arcsen} x=\frac{\pi}{2}$$

Luego, analizando (i) no se cumple por que el máximo valor del arc sen $x=\frac{\pi}{2}$ por lo tanto (ii) si cumple:

Entonces : $\operatorname{arcsen} x=\frac{\pi}{2}$

$$x=\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=1$$

Reemplazandoen"M":

$$M=\frac{\sqrt{\pi^2-2\pi\arccos(1)+\sqrt{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}}}{\arctan(1)+\operatorname{arcsen} 0}$$

$$M=\frac{\sqrt{\pi^2-2\pi(0)+0}}{\frac{\pi}{4}}$$

$$M=\frac{\sqrt{\pi^2}}{\frac{\pi}{4}}$$

$$M=\frac{\pi}{\frac{\pi}{4}}$$

$$\therefore \quad \mathbf{M=4}$$

**A todo el público en general:**

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

**Este libro no debe ser prostituito monetariamente**, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

**28 de agosto del 2020**

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 10** Calcule el valor de M, si:

$$M = \sum_{k=1}^{5} \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} k)$$

**Resolución:** Sabemos para que:

$$\boxed{\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}\theta) = \theta \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \quad \text{ó} \quad -1{,}57 \le \theta \le 1{,}57}$$

Luego: $M = \sum_{k=1}^{5} \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} k)$

- $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} 1) = 1$
- $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} 2) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(\pi - \alpha))$

Sea: $\begin{cases} 2 = \pi - \alpha \\ \alpha = 1{,}14 \end{cases}$

$= \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}\alpha)$

$= \alpha$

$= \pi - 2$

- $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} 3) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(\pi - \theta))$

Sea: $\begin{cases} 3 = \pi - \theta \\ \theta = 0{,}14 \end{cases}$

$= \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}\theta)$

$= \theta$

$= \pi - 3$

- $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} 4) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(\pi + \phi))$

Sea: $\begin{cases} 4 = \pi + \phi \\ \phi = 0{,}86 \end{cases}$

$= \operatorname{arcsen}(-\operatorname{sen}\phi)$

$= -\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}\phi)$

$= -\phi$

$= \pi - 4$

- $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} 5) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(2\pi - \beta))$

Sea: $\begin{cases} 5 = 2\pi - \beta \\ \beta = 1{,}28 \end{cases}$

$= \operatorname{arcsen}(-\operatorname{sen}\beta)$

$= -\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}\beta)$

$= -\beta$

$= 5 - 2\pi$

Luego lo pedido: $M = 1 + \pi - 2 + \pi - 3 + \pi - 4 + 5 - 2\pi$

$\therefore \quad \mathbf{M = \pi - 3}$

**PROBLEMA 11** Calcule el valor de M, si:

$$M = \operatorname{arccot}\left(\frac{\tan 3 - \cot 3}{2}\right)$$

**Resolución:** Recordar la identidad auxiliar:

$$\boxed{\cot x - \tan x = 2\cot 2x}$$

Luego:

$$M = \operatorname{arccot}\left[-\left(\frac{\cot 3 - \tan 3}{2}\right)\right]$$

$$M = \operatorname{arccot}\left[-\frac{2\cot 6}{2}\right]$$

$$M = \operatorname{arccot}(-\cot 6)$$

Sea: $\boxed{6 = 2\pi - \theta} \Rightarrow \theta = 0{,}28$

team CALAPENSHKO


Reemplazando : $M = \operatorname{arc\,cot}[-\cot(2\pi-\theta)]$

$M = \operatorname{arc\,cot}[-(-\cot\theta)]$

$M = \operatorname{arc\,cot}(\cot\theta)$

Sabemos : $\operatorname{arc\,cot}(\cot x) = x \Leftrightarrow x \in \langle 0; \pi\rangle$

Entonces como $\theta = 0{,}28$ :

$M = \operatorname{arc\,cot}(\cot\theta)$

$M = \theta$

$\therefore \quad \mathbf{M = 2\pi - 6}$

**PROBLEMA 12** Determine el valor de x en:

$$\operatorname{arc\cos} 2x - \operatorname{arc\cos} x = \frac{\pi}{3}$$

**Resolución:**

$$\operatorname{arc\cos} 2x - \operatorname{arc\cos} x = \frac{\pi}{3} \quad \text{.....(1)}$$

Sea: $\begin{cases} \theta = \operatorname{arc\cos} 2x \Rightarrow 2x = \cos\theta \\ \beta = \operatorname{arc\cos} x \Rightarrow x = \cos\beta \end{cases}$

Reemplazando en (1): $\theta - \beta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + \beta$

Luego : $\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \beta\right)$

$$\cos\theta = \cos\frac{\pi}{3}\cos\beta - \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\beta$$

$$2x = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\beta \Rightarrow \sqrt{3}\operatorname{sen}\beta = -3x$$

Despejando : $\sqrt{3}\operatorname{sen}\beta = -3x$

Elevando al cuadrado m.a.m:

$$\left(\sqrt{3}\operatorname{sen}\beta\right)^2 = (-3x)^2 \Rightarrow 3\operatorname{sen}^2\beta = 9x^2$$

$$1 - \cos^2\beta = 3x^2$$

$$1 - x^2 = 3x^2$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = \pm\frac{1}{2}$$

El que verifica la ecuación es:

$$\therefore \mathbf{x = -\frac{1}{2}}$$

**PROBLEMA 13** Determine el dominio y el rango de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{1}{4}\operatorname{arc\cos}\left(\frac{2-x}{4}\right) + \frac{3\pi}{8}$$

**Resolución:** De la función : $f(x)=\frac{1}{4}\arccos\left(\frac{2-x}{4}\right)+\frac{3\pi}{8}$

Luego:

i) En busca del dominio :

Sabemos : $-1\le\frac{2-x}{4}\le 1$

$-6\le -x\le 2$ ..... (multiplicando por (–1)

$-2\le x\le 6$

$\therefore$ **Dom(f) = [–2; 6]**

ii) En busca del rango :

Sabemos : $0\le\arccos\left(\frac{2-x}{4}\right)\le\pi$

Multiplicando por $\left(\frac{1}{4}\right)$ : $0\le\frac{1}{4}\arccos\left(\frac{2-x}{4}\right)\le\frac{\pi}{4}$

Sumando $\frac{3\pi}{8}$ : $\frac{3\pi}{8}\le\frac{1}{4}\arccos\left(\frac{2-x}{4}\right)+\frac{3\pi}{8}\le\frac{5\pi}{8}$

$\therefore$ **Ran(f) :** $\left[\frac{3\pi}{8};\frac{5\pi}{8}\right]$

**PROBLEMA 14** Grafique la siguiente función:

$$f(x)=4\operatorname{arc\,sen}(x-1)+\pi$$

**Resolución:** i) En busca del dominio :

$f(x)=y=4\operatorname{arc\,sen}(x-1)+\pi$

$-1\le x-1\le 1$

$0\le x\le 2$

$\therefore$ **Dom:[0;2]**

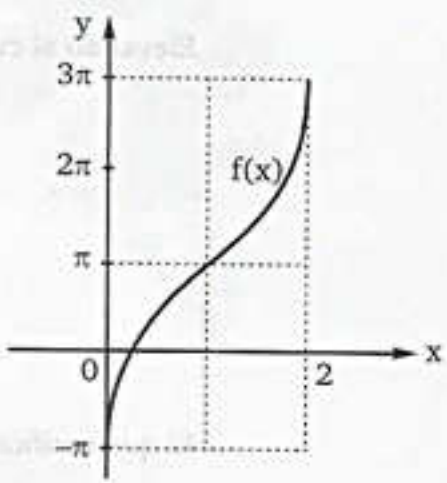
ii) En busca del rango :

$-\frac{\pi}{2}\le \operatorname{arc\,sen}(x-1)\le\frac{\pi}{2}$

$-2\pi\le 4\operatorname{arc\,sen}(x-1)\le 2\pi$

$-\pi\le 4\operatorname{arc\,sen}(x-1)+\pi\le 3\pi$

$\therefore$ **Ran : [– π; 3π]**




**Luego, la gráfica de la función:**

**PROBLEMA 15** Determine el dominio de la función: f definida como:

$$f(x)=\sqrt{2(\operatorname{arc\,sen}x-\arccos x)}$$

team CALAPENSHKO


**Resolución:** Sabemos: $\boxed{\arcsen x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \leftrightarrow -1 \leq x \leq 1}$

$$f(x) = \sqrt{2(\arcsen x - \arccos x)}$$

$$f(x) = \sqrt{2\left[\arcsen x - \left(\frac{\pi}{2} - \arcsen x\right)\right]}$$

$$f(x) = \sqrt{4\arcsen x - \pi}$$

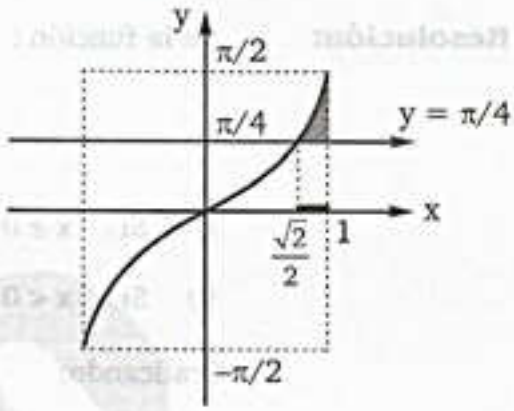
Restringiendo los valores de "x"

$$4\arcsen x - \pi \geq 0$$

$$\arcsen x \geq \frac{\pi}{4}$$

Luego, graficando las funciones:

$$y = \arcsen x \quad ; \quad y = \frac{\pi}{4}$$




Del gráfico

$$\therefore \quad \mathbf{Dom(f)}: \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$$

**PROBLEMA 16** Determine el rango de la función: f: $[-1; 1] \rightarrow R$ definida por

$$f(x) = \frac{\arcsen(x) + \frac{\pi}{2}}{\arccos(x) - 2\pi}$$

**ADMISIÓN UNI 2016 - I**

**Resolución:**

**RECORDAR**

$$\arcsen x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = \frac{\arcsen x + \frac{\pi}{2}}{\arccos x - 2\pi} = \frac{\pi - \arccos x}{\arccos x - 2\pi}$$

$$f(x) = \frac{-\pi}{\arccos x - 2\pi} - 1$$

Ahora: $0 \leq \arccos x \leq \pi$

$$-2\pi \leq \arccos x - 2\pi \leq -\pi$$

Luego: $$-\frac{1}{2} \leq \frac{-\pi}{\arccos x - 2\pi} - 1 \leq 0$$

$$\therefore \text{ Ranf}: \left[-\frac{1}{2}; 0\right]$$

**PROBLEMA 17** Grafique la siguiente función:

$$y = f(x) = \arctan(x + |x|) + \frac{\pi}{4}$$

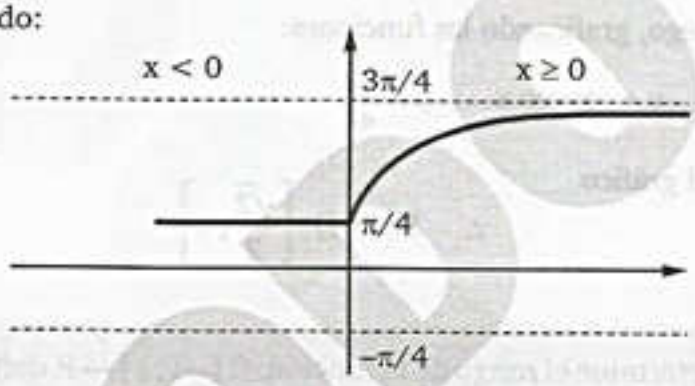
**Resolución:** De la función : $f(x) = \arctan(x + |x|) + \frac{\pi}{4}$

$$|x| = \begin{cases} x\ ;\ x \geq 0 \\ -x\ ;\ x < 0 \end{cases}$$

i) Si : $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow f(x) = \frac{\pi}{4} + \arctan(2x)$

ii) Si : $x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow f(x) = \frac{\pi}{4}$

Graficando:




**PROBLEMA 18** Simplificar la expresión matemática:

$$S = \arctan\left(\frac{1}{2.1^2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{2.2^2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{2.3^2}\right) + \ldots\ldots$$

Si la sumatoria tiene "n" términos.

**Resolución:**

**Sabemos que:** $\arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right) = \arctan a - \arctan b$

Además : $\arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right) = \arctan\left(\frac{2}{4n^2}\right) = \arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right)$

Se observa que : $a - b = 2$ .....(i)

$1 + ab = 4n^2$

$ab = (2n+1)(2n-1)$ .....(ii)

Resolviendo el sistema (i $\wedge$ ii) :

$a = 2n + 1\ ;\ b = 2n - 1$

Luego : $\arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right) = \arctan(2n+1) - \arctan(2n-1)$

Evaluando para "n" : $\arctan\left(\frac{1}{2.1^2}\right) = \arctan(3) - \arctan(1)$

$$\arctan\left(\frac{1}{2.2^2}\right)=\arctan(5)-\arctan(3)$$

$$\arctan\left(\frac{1}{2.3^2}\right)=\arctan(7)-\arctan(5)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right)=\arctan(2n+1)-\arctan(2n-1)$$

Sumando m.a.m : $S=\arctan(2n+1)-\arctan(1)$

$$S=\arctan\left[\frac{2n+1-1}{1+2n+1}\right]$$

$$\therefore \quad \mathbf{S=\arctan\left(\frac{n}{n+1}\right)}$$

**PROBLEMA 19** Sabiendo que: $\arcsen x+\arcsen y+\arcsen z=\pi$

Calcular: $M=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{yz}+\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{xz}+\dfrac{\sqrt{1-z^2}}{xy}$

**Resolución:** Haciendo que :

$\arcsen x=\theta \Rightarrow x=\sen\theta$ .....(1)

$\arcsen y=\alpha \Rightarrow y=\sen\alpha$ .....(2)

$\arcsen z=\beta \Rightarrow z=\sen\beta$ .....(3)

Además se observa que: $\theta+\alpha+\beta=\pi$

Luego (1),(2) y (3) reemplazamos en "M":

$$M=\frac{\sqrt{1-\sen^2\theta}}{\sen\alpha\sen\beta}+\frac{\sqrt{1-\sen^2\alpha}}{\sen\theta\sen\beta}+\frac{\sqrt{1-\sen^2\beta}}{\sen\theta\sen\alpha}$$

$$M=\frac{\cos\theta}{\sen\alpha\sen\beta}+\frac{\cos\alpha}{\sen\theta\sen\beta}+\frac{\cos\beta}{\sen\theta\sen\alpha}$$

**Recordar:**

$\cos\theta=-\cos(\alpha+\beta)$

$\cos\alpha=-\cos(\theta+\beta)$

$\cos\beta=-\cos(\theta+\alpha)$

Reemplazando :

$$M=-\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sen\alpha\sen\beta}-\frac{\cos(\theta+\beta)}{\sen\theta\sen\beta}-\frac{\cos(\theta+\alpha)}{\sen\theta\sen\alpha}$$

**Recordar:**

$$\frac{\cos(x+y)}{\sen x\,\sen y}=\cot x\cot y-1$$

Luego : $M=-\cot\alpha\cot\beta+1-\cot\theta\cot\beta+1-\cot\theta\cot\alpha+1$

$M=-(\cot\alpha\cot\beta+\cot\theta\cot\beta+\cot\theta\cot\alpha)+3$

**Sabemos que:**

Si: $\theta+\alpha+\beta=\pi$

Entonces : $\cot\alpha\cot\beta+\cot\theta\cot\beta+\cot\theta\cot\alpha=1$

$M=-1+3$

$\therefore \quad \mathbf{M=2}$

**PROBLEMA 20** Calcular el valor de M, si:

$$M = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{\csc 10^\circ - 1}\right)$$

**Resolución:** De la condición : $M = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{\csc 10^\circ - 1}\right)$

Reemplazando por su co – razón : $\csc 10^\circ = \sec 80^\circ$

$$M = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{\sec 80^\circ - 1}\right)$$

**Observación:**
$\sec 2x - 1 = \tan 2x \tan x$

$$M = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{\tan 80^\circ \tan 40^\circ}\right)$$

Pero : $\sqrt{3} = \tan 60^\circ = \tan 20^\circ \tan 40^\circ \tan 80^\circ$ $\left(\begin{matrix}\text{propiedad de}\\ \angle \text{ triple}\end{matrix}\right)$

Reemplazando : $M = \arctan\left(\frac{\tan 20^\circ \tan 40^\circ \tan 80^\circ}{\tan 80^\circ \tan 40^\circ}\right)$

Simplificando $\wedge\ 20^\circ <> \frac{\pi}{9}$ rad

$$M = \arctan\left(\tan\frac{\pi}{9}\right)$$

$$\therefore\ \mathbf{M = \frac{\pi}{9}}$$

**PROBLEMA 21** Dadas las funciones f y g definidas por

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2|x|}{1+x^2}\right),\ g(x) = \arcsen\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$$

Determine Ran (f) ∩ Dom (g) **ADMISIÓN UNI 2017 - I**

**Resolución:** I. Hallando el rango de f(x):

$$* \quad \frac{2|x|}{1+x^2} = \frac{2}{\frac{1+|x|^2}{|x|}} = \frac{2}{|x| + \frac{1}{|x|}}$$

$$|x| + \frac{1}{|x|} \geq 2 \ \rightarrow\ 0 < \frac{2}{|x| + \frac{1}{|x|}} \leq 1 \ \rightarrow\ 0 < \arctan\left(\frac{2}{|x| + \frac{1}{|x|}}\right) \leq \frac{\pi}{4};$$

Para $x = 0$, $\arctan\left(\frac{2|x|}{1+x^2}\right) = 0$ Luego: $\text{Ran } f = \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

team CALAPENSHKO



II. Hallando el dominio de g(x):

$$* \quad \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{x+\frac{1}{x}}$$

$$x+\frac{1}{x} \geq 2 \ \vee \ x+\frac{1}{x} \leq -2 \quad \rightarrow \quad 0 < \frac{1}{x+\frac{1}{x}} \leq \frac{1}{2} \ \vee \ -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+\frac{1}{x}} < 0$$

$$\rightarrow \quad -\frac{1}{2} \leq x+\frac{1}{x} \leq \frac{1}{2} - \{0\}$$

para $x = 0$, g está definida.

$$\rightarrow \quad -\frac{1}{2} \leq x+\frac{1}{x} \leq \frac{1}{2} \subset [-1;1]$$

**PROBLEMA 22** Simplifique la expresión:

$$H = \frac{\operatorname{arcsen}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right) + 2\arccos\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)}{\arctan\left[\operatorname{arccot}\left(\tan(2a)\right) - \operatorname{arccot}(\tan(3a))\right]}$$

considerando $\arctan(a) \neq 0$. **ADMISIÓN UNI 2017-II**

**Resolución:** Nos piden simplificar la expresión H.

Sea $a = \tan\alpha$ y además por dato $\arctan(a) \neq 0$.

Reemplazando en H:

$$H = \frac{\operatorname{arcsen}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right) + 2\arccos\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)}{\arctan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(\tan 2a) - \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(\tan(3a))\right)\right)}$$

$$H = \frac{\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} 2\alpha) + 2\arccos(\cos 2)\alpha}{\arctan(\arctan(\tan 3a) - \arctan(\tan 2a))}$$

$$H = \frac{2\alpha + 2(2\alpha)}{\arctan(a)}$$

$$H = \frac{6\alpha}{\alpha}$$

$$\therefore \quad H = 6$$

**PROBLEMA 23** Determine el máximo valor de:

$$P = \cos(3 \operatorname{arc\,sen} x) - \operatorname{sen}(3 \operatorname{arc\,cos} x)$$

**Resolución:**

$$P = \cos(3 \operatorname{arc\,sen} x) - \operatorname{sen}(3 \operatorname{arc\,cos} x);\ x \in [-1;\ 1]$$

Simplificaremos la expresión uniformizando los argumentos:

Sabemos que: $\operatorname{arcsen} x + \operatorname{arccos} x = \dfrac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow P = \cos\underbrace{\left(\frac{3\pi}{2} - 3\operatorname{arccos} x\right)}_{-\operatorname{sen}(3\operatorname{arccos} x)} - \operatorname{sen}(3\operatorname{arccos} x)$$

$$\Rightarrow P = -2\operatorname{sen}(3\operatorname{arccos} x)$$

Además se conoce que: $0 \le \operatorname{arccos} x \le \pi$

$$0 \le 3\operatorname{arccos} x \le 3\pi$$

$$\Rightarrow -1 \le \operatorname{sen}(3\operatorname{arccos} x) \le 1$$

$$-2 \le \underbrace{-2\operatorname{sen}(3\operatorname{arccos} x)}_{P} \le 2$$

$$\therefore\ P_{Máx.} = 2$$

**PROBLEMA 24** Determine el dominio de la función:

$$f(x) = \frac{1}{\operatorname{arccos}(\cos x)};\ K \in \mathbb{Z}$$

**Resolución:** Nos piden: Dom f: $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{arccos}(\cos x)}$

El dominio de f(x) será: $R - \{x \in R / \operatorname{arccos}(\cos x) = 0\}$

$$\Rightarrow \operatorname{arccos}(\cos x) = 0$$

$$\cos(\operatorname{arccos}(\cos x)) = \cos(0)$$

$$\cos x = 1$$

$$\longrightarrow x = 2k\pi;\ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\therefore\ \text{Dom } f = R - \{2K\pi\}$$

team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 25** Calcular la suma de las abscisas de todos los puntos de intersecciones de la función:

$$f(x) = \arctan 2x - \operatorname{arcsen}\frac{x}{2};\ \text{cuando } f(x) \text{ es nula.}$$

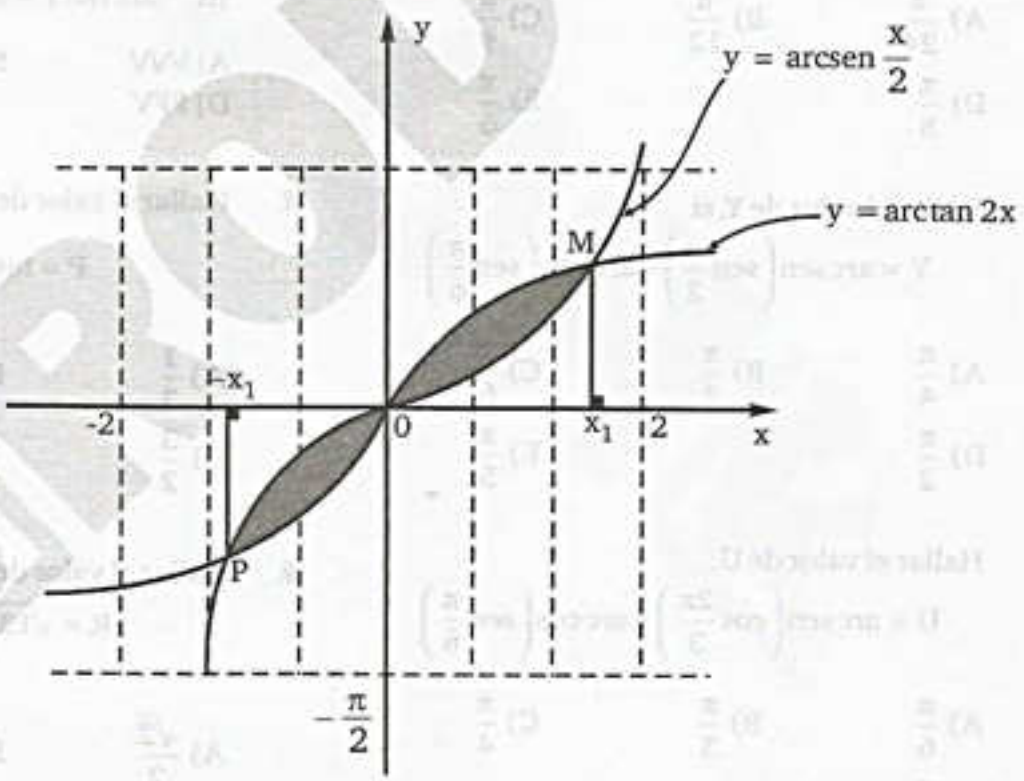
**Resolución:** Nos piden los valores de "x" para los cuales

$$f(x) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \arctan 2x - \operatorname{arcsen}\frac{x}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \arctan 2x = \operatorname{arcsen}\frac{x}{2}$$

Para hallar la suma de valores de "x" grafiquemos ambas funciones:




Notar que los puntos P y M son simétricos.

$$\therefore \quad \Sigma \text{abscisas} = x_1 + 0 + (-x_1) = 0$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS

**1.** Determinar verdadero (V) ó falso (F) en cada proposición:

I. $\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$

II. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$

III. $\operatorname{arcsen}(-1)=\frac{3\pi}{2}$

A) VVV B) VVF C) VFF
D) FFV E) FFF

**2.** Hallar el valor de P:

$$P=\arctan\sqrt{3}-\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

A) $\frac{\pi}{24}$ B) $\frac{\pi}{12}$ C) $\frac{\pi}{9}$
D) $\frac{\pi}{8}$ E) $\frac{\pi}{6}$

**3.** Hallar el valor de Y, si

$$Y=\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)-\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$$

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{6}$
D) $\frac{\pi}{2}$ E) $\frac{\pi}{5}$

**4.** Hallar el valor de U.

$$U=\operatorname{arcsen}\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)+\arccos\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$$

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{4}$
D) $\frac{\pi}{2}$ E) $\pi$

**5.** Hallar el valor de E, si:

$$E=\operatorname{sen}\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\operatorname{sen}(\arctan(-1))$$

A) 0 B) 1 C) −1
D) $\sqrt{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

**6.** Hallar el valor de K, si:

$$K=\operatorname{sen}\left[\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{2}+\operatorname{arcsen}\frac{1}{2}\right]$$

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
D) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ E) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

**7.** Determinar verdadero (V) ó falso (F) en cada proposición:

I. $\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)=\operatorname{arccsc}2$

II. $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\operatorname{arcsec}\sqrt{2}$

III. $\arctan 1=\operatorname{arccot}1$

A) VVV B) VVF C) VFF
D) FFV E) FFF

**8.** Hallar el valor de P, si:

$$P=\tan\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{12}{13}\right)\right)$$

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 3
D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

**9.** Hallar el valor de R, si:

$$R=\sqrt{13}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{3}{2}\right)$$

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
D) $4\sqrt{2}$ E) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

**10.** Hallar el valor de N, si:

$$N=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right)$$

A) 0,5 B) 0,8 C) 3
D) 0,4 E) 2

team CALAPENSHKO


**11.** Hallar el valor de "x" al resolver:

$$2\arcsen x + \arccos x = \frac{3\pi}{4}$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{3}{5}$

D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

**12.** Si: $\arcsen x + \arcsen y = \frac{\pi}{4}$

Hallar el valor de M, si:

$$M = \arccos x + \arccos y$$

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{3\pi}{4}$

D) $\pi$ E) $\frac{5\pi}{4}$

**13.** Hallar el valor de A, si:

$$A = \arccos\left[\sqrt{4\cos^4\frac{\pi}{12} - 4\cos^2\frac{\pi}{12} + 1}\right]$$

A) $\frac{\pi}{24}$ B) $\frac{\pi}{12}$ C) $\frac{\pi}{6}$

D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{2}$

**14.** Si: $\arcsen x - \arccos x = k$

Hallar el valor de L si:

$$L = \cos(2\arccos x)$$

A) k B) $k^{-1}$ C) 2k

D) sen k E) cos k

**15.** El equivalente de:

$$Y = \arccos(2x^2 - 1)$$

es:

A) $\arccos x$

B) $2\arccos x$

C) $3\arccos x$

D) $\frac{1}{2}\arccos x$

E) $\frac{1}{4}\arccos x$

**16.** Hallar:

$$\frac{\arccos\frac{3}{8} - \pi}{\arctan\sqrt{\frac{11}{5}}} + \arcsen\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\operatorname{arccot}(2+\sqrt{3})$$

A) 0 B) 2 C) –2

D) $2\pi$ E) $\frac{5\pi}{6}$

**17.** Hallar el equivalente de T, si:

$$T = \arcsen\frac{3}{4} + \arcsen\frac{1}{3}$$

A) $\arcsen\left(\frac{2\sqrt{14}-3}{2}\right)$

B) $\arccos\left(\frac{2\sqrt{14}-3}{12}\right)$

C) $\arcsen\left(\frac{3-2\sqrt{14}}{12}\right)$

D) $\arccos\left(\frac{3-2\sqrt{14}}{12}\right)$

E) $\arcsen\left(\frac{2\sqrt{14}-3}{6}\right)$

**18.** Hallar:

$$\operatorname{sen}\left(\arcsen\frac{1}{4} + \arccos\frac{1}{5}\right) + \operatorname{sen}\left(\arcsen\frac{1}{4} - \arccos\frac{1}{5}\right)$$

A) 0 B) 0,5 C) 0,05

D) 1 E) 0,25

**19.** Hallar el máximo valor de:

$$y = \cos(3\arcsen x) - \operatorname{sen}(3\arccos x)$$

A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{3}{4}$

**20.** Hallar el valor de "x" al resolver

$$\cos(\arccos x) + \operatorname{sen}\left(\arcsen\frac{x}{2}\right) = 1{,}5$$

Se obtiene:

A) 0,5 B) 1 C) 0,25

D) 0,2 E) 0,4

team CALAPENSHKO



**21.** En la ecuación:

$$\arctan x + \arctan nx = \frac{\pi}{4} + \arctan 3$$

¿Cuál es la condición que debe cumplir "n", para que "x" tenga un sólo valor?

A) $(n-1)^2 - 16n = 0$
B) $(n-1)^2 + 16n = 0$
C) $(n+1)^2 + 16n = 0$
D) $n(n-1)^2 - 64n = 0$
E) $(n-1)^2 - 32n = 0$

**22.** m; n y p son las raíces de la ecuación:

$$x(x-2)(3x-7) = 2$$

Hallar:

$$\arctan m + \arctan n + \arctan p$$

A) $-\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{3\pi}{4}$
D) $\frac{5\pi}{4}$ E) $\frac{7\pi}{4}$

**23.** Simplificar:

$$\sec^2\left(\arctan\frac{\sqrt{a^2x^2-b^2y^2}}{by}\right) - \tan^2\left(\operatorname{arccsc}\frac{\sqrt{a^2x^2+b^2y^2}}{ax}\right)$$

A) $ax + by$ B) $ax - by$ C) $ab - xy$
D) $ab^2 + xy^2$ E) 0

**24.** Reducir la expresión E, si:

$$E = 2\arccos(\cos x) - 8\operatorname{arcsen}(\cos x)$$

Si: $x \in [-10\pi; -9\pi]$

A) $-6x$ B) $10x + 100\pi$ C) $-6x - 4\pi$
D) $10x + 96\pi$ E) $10x - 4\pi$

**25.** Hallar las soluciones de la inecuación trigonométrica: $\arccos 3x \geq \operatorname{arcsen} 2x$

A) $\left\langle -\frac{1}{3}; 0 \right\rangle$ B) $\left[-\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{13}}{13}\right]$
C) $\left[-\frac{11}{23}; -\right]$
D) $\left[-\frac{\sqrt{13}}{13}; \frac{\sqrt{13}}{13}\right]$ E) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{13}}{13}\right]$

**26.** Hallar el valor de:

$$\tan\left\{\frac{7}{2}\left[\arctan\left(\frac{\cos\frac{\pi}{7}}{2-\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}}\right) + \operatorname{arccot}\left(\frac{1-2\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}}{2\cos\frac{\pi}{7}}\right)\right]\right\}$$

A) 7 B) $-4$ C) 1
D) 2 E) 3

**27.** Si $k \in \mathbb{Z}$. Hallar el área de la región comprendida por las gráficas de:

$y = k \cdot \operatorname{arcsen}(x - k\pi)$ ; $y = \operatorname{arcsen}(x - k\pi + \pi)$

y las rectas: $y = k \wedge y = -k$

A) $\frac{\pi}{2}|k|u^2$ B) $\pi\sqrt{2}|k|u^2$ C) $\pi|k|u^2$
D) $2\pi\sqrt{2}|k|u^2$ E) $2\pi|k|u^2$

**28.** Si:

$$f(x) = \frac{\arccos x}{\operatorname{arcsen} x} + \frac{\operatorname{arcsen} x}{\arccos x}$$

Hallar el rango de f(x) si $x \in \langle 0; 1\rangle$

A) $\langle 0; +\infty\rangle$ B) $\langle -2; 2\rangle$ C) $\langle 2; +\infty\rangle$
D) $[-2; 2]$ E) $[2; +\infty\rangle$

**29.** Las gráficas de las funciones:

$$f(x) = \frac{7\pi}{2} + \arccos x$$

$$g(x) = 3\pi + \operatorname{arccot}(-x)$$

se intersecan en el punto $P(x_0; y_0)$. Hallar el valor de $x_0^2 \csc\frac{\pi}{10}$

A) 1 B) 0,5 C) 2
D) 4 E) $\pi$

**30.** Hallar el área de la región limitada por la gráfica de la función: $f(x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$ con el eje x en el intervalo $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Además, hallar el período de f(x).

A) $3\pi^2; \pi$ B) $\frac{5\pi^2}{3}; \frac{3\pi}{2}$ C) $\frac{3\pi^2}{8}; 2\pi$
D) $\frac{3\pi^2}{2}; 2\pi$ E) $\frac{2\pi^2}{5}; \pi$

team CALAPENSHKO



**31.** Hallar el dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \text{arc cot}(\tan x - \sec x) + \arctan(\tan x + \sec x)$$

A) $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ B) $\langle 0; \pi \rangle$ C) $\left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$

D) $\left\langle -\frac{\pi}{22}; \frac{\pi}{2} \right\rangle - \{0\}$ E) $[0; \pi]$

**32.** Hallar la suma de las abscisas de todos los puntos de intersecciones de la función:

$$f(x) = \arctan 2x - \text{arcsen}\frac{x}{2}$$

cuando f(x) es nula.

A) $\sqrt{15}$ B) $-\sqrt{15}$ C) 0

D) $2\sqrt{15}$ E) $-2\sqrt{15}$

**33.** Hallar el valor de

$$P = \sum_{i=3}^{6} (\text{arcsen}(\text{sen } i) + \text{arc cot}(\cot i))$$

A) 36 B) $22 - 5\pi$ C) $36 - 5\pi$

D) $22 + 5\pi$ E) $36 + 5\pi$

**34.** A partir de la siguiente función:

$$f(x) = 2\arccos\left(\text{sen}\frac{x}{2}\right)$$

Hallar el período y rango respectivamente.

A) $T = \frac{\pi}{2}; [-\pi; \pi]$ B) $T = \pi; [-2; 2]$

C) $T = 2\pi; [0; 2\pi]$

D) $T = 4\pi; [0; 2\pi]$ E) $T = 4\pi; \langle 0; 2\pi]$

**35.** Hallar el rango de:

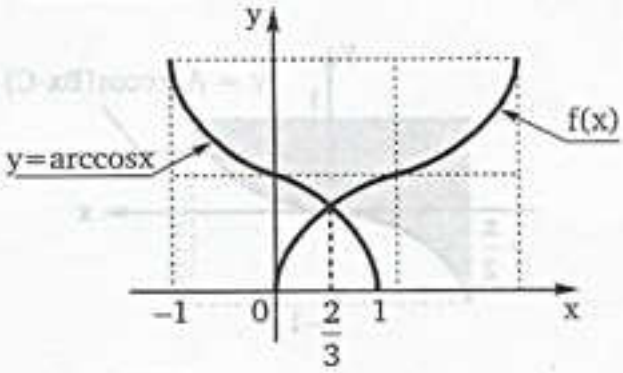
$$f(x) = \frac{1}{|\text{arctañ } x| - 2|\text{arc cot } x|}; \text{ si } x < 0$$

A) $\left\langle -\frac{2}{\pi}; -\frac{3}{2\pi} \right\rangle$ B) $\left\langle -\frac{1}{\pi}; -\frac{2}{3\pi} \right\rangle$

C) $\left\langle -\frac{1}{2\pi}; \frac{2}{3\pi} \right\rangle$

D) $\left\langle \frac{2}{\pi}; \frac{3}{\pi} \right\rangle$ E) $\left\langle \frac{1}{2\pi}; \frac{3}{2\pi} \right\rangle$

**36.** Hallar la regla de correspondencia de la función f(x).




A) $h(x) = \frac{\pi}{2} + \text{arcsen}\left(\frac{x}{2} - 1\right)$

B) $h(x) = \pi + \text{arcsen}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$

C) $h(x) = \frac{\pi}{2} + \text{arcsen}\left(\frac{x}{2} + 1\right)$

D) $h(x) = \text{arcsen}\left(\frac{x}{2} - 1\right)$

E) $h(x) = \text{arcsen}\left(\frac{x}{2} + 1\right)$

**37.** Halle el número de soluciones de la ecuación:

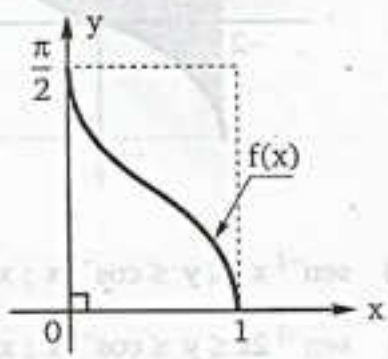
$$\text{sen}(5\arccos x) = 1$$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

**38.** Si la regla de correspondencia de la gráfica adjunta es:

$$f(x) = a \arccos(bx + c) + d$$



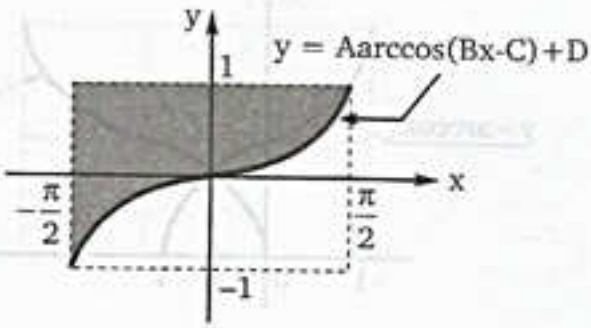

Hallar el valor de:

$$R = \cos(dc\pi) + \tan\left(\frac{\pi a}{b}\right)$$

A) 1 B) 3/2 C) 2

D) 0 E) -2

**39.** Hallar la regla de correspondencia de la región sombreada.




A) $\frac{2}{\pi}\operatorname{arcsen}\frac{2x}{\pi} \le y < 1$

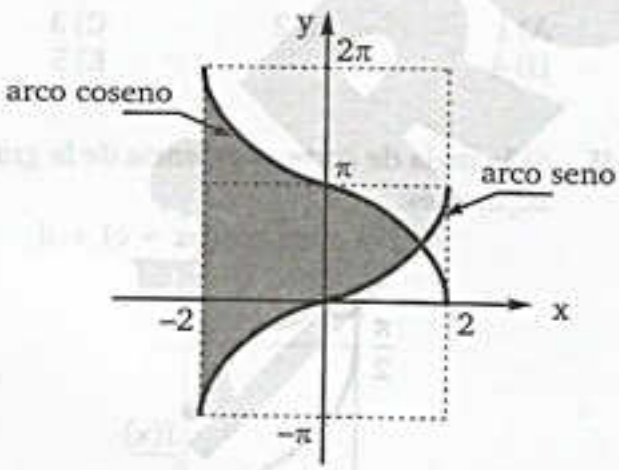
B) $\frac{2}{\pi}\arccos\frac{x}{\pi} \le y \le 1$

C) $\arccos\frac{2x}{\pi} \le y < 1$

D) $1-\frac{2}{\pi}\arccos\frac{2x}{\pi} \le y < 1$

E) $1+\frac{2}{\pi}\arccos\frac{x}{\pi} \le y \le 1$

**40.** Hallar la regla de correspondencia de la región sombreada:




A) $\operatorname{sen}^{-1}x \le y \le \cos^{-1}x\ ;\ x \in \left[-2; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

B) $\operatorname{sen}^{-1}2x \le y \le \cos^{-1}x\ ;\ x \in [-2; 1]$

C) $\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{2} \le y \le \cos^{-1}\frac{x}{2}\ ;\ x \in \left[-2; \sqrt{2}\right]$

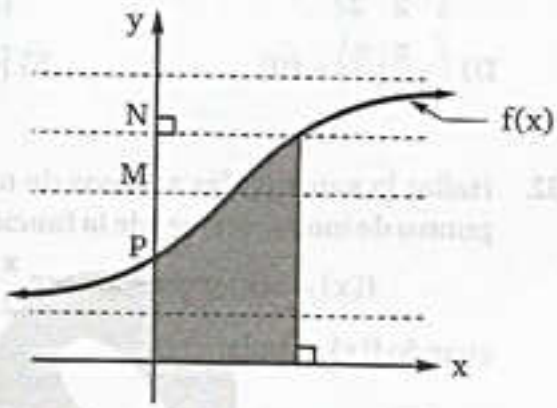
D) $\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{2} \le \frac{y}{2} \le \cos^{-1}\frac{x}{2}\ ;\ x \in \left[-2; \sqrt{2}\right]$

E) $\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{2} \le \frac{y}{2} \le \cos^{-1}\frac{x}{2}\ ;\ x \in [-2; 1]$

**41.** Halle el área de la región sombreada, siendo:

$$f(x) = \pi + \tan^{-1}(2x-1)$$

Además: PM = MN.



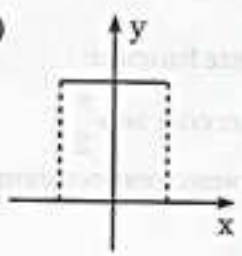

A) $\frac{\pi}{2}u^2$ B) $\pi\,u^2$ C) $\frac{3\pi}{4}u^2$

D) $\frac{3\pi}{4}u^2$ E) $2\,u^2$

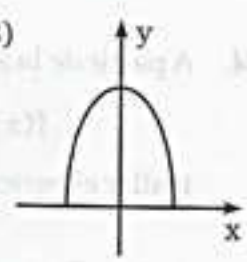
**42.** Grafique:

$$h(x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x+|x|}{2}\right) + \arccos\left(\frac{x-|x|}{2}\right)$$

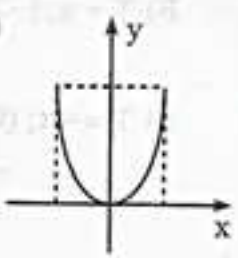
A)



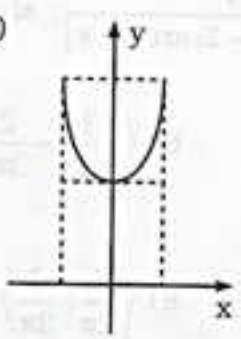

B)



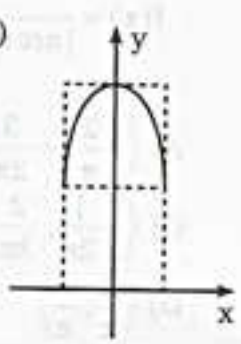

C)




D)




E)



team CALAPENSHKO

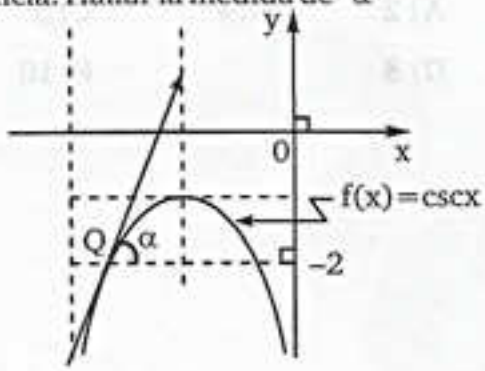

**43.** Determine la abscisa del punto de intersección entre las gráficas de las funciones:

$f(x) = 2\arctan x$ y $g(x) = \pi - \text{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right)$

A) 1 B) 0 C) $-\sqrt{3}$

D) $\sqrt{3}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

**44.** Del gráfico adjunto, Q es punto de tangencia. Hallar la medida de "α"




A) $\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ B) $\arctan(2\sqrt{3})$

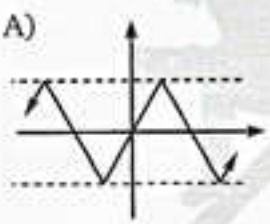
C) $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

D) $\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$ E) $\frac{\pi}{3}$

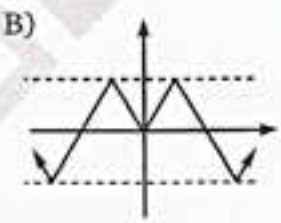
**45.** Cuál de las siguientes alternativas es el gráfico de f(x). Si:

$f(x) = \text{arc sen}(\cos x)$

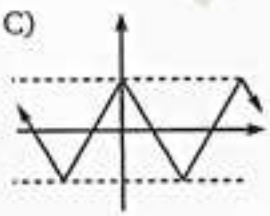
A)



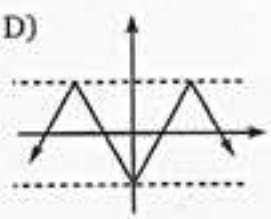
B)



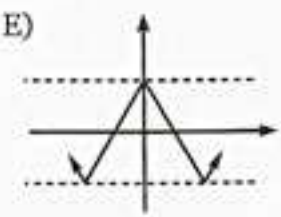
C)



D)



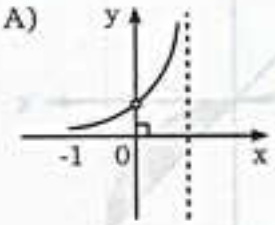
E)



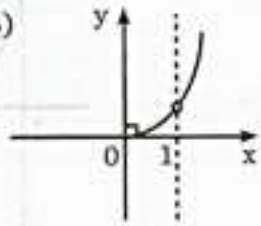
**46.** Graficar:

$$f(x) = \frac{\text{sen}(\text{arc sen}\,x) + \cos(\text{arc cos}\,x)}{\tan\left[\arctan(x - x^2)\right]}\ ;\ x < 1$$

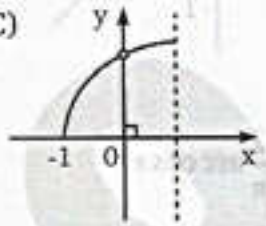
A)



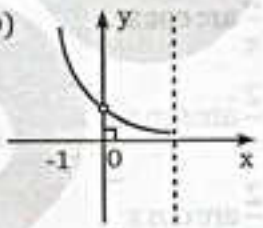

B)



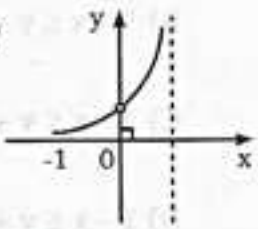

C)




D)




E)




**47.** Señale si la función:

$f(x) = \pi - 4\ \text{arc cos}|\text{sen}2x|$

es periódica.

En caso afirmativo, dar el período.

A) Si es periódica; $T = \frac{\pi}{6}$

B) Si es periódica; $T = \frac{\pi}{2}$

C) Si es periódica; $T = \frac{\pi}{3}$

D) Si es periódica; $T = \frac{\pi}{5}$

E) No es periódica

**48.** Dada la función:

$f(x) = 3 - \text{arc sen}x + 2\text{arc tan}x$

Hallar el número de intersecciones de su gráfica a la recta: $y - 3 = 0$

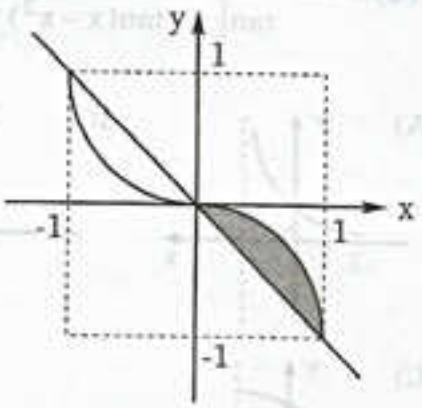
A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

team CALAPENSHKO



**49.** Del gráfico, hallar la regla de correspondencia de la región sombreada.




A) $1+x \le y+1 \le \frac{2}{\pi}\arccos x$

B) $1-x \le y-1 \le \frac{2}{\pi}\arccos x$

C) $1-x \le y+1 \le \frac{2}{\pi}\operatorname{arcsen} x$

D) $1-x \le y+1 \le \frac{2}{\pi}\arccos x$

D) $1+x \le y+1 \le \frac{2}{\pi}\operatorname{arcsen} x$

**50.** Sean:

$$f(x) = -\frac{5}{\pi}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x-2}{3}\right) \; ; \; x \in \mathbb{Z}$$

$$g(x) = -\frac{\pi}{3}\arccos\left(\frac{2x-1}{8}\right) \; ; \; x \in \mathbb{N}$$

Hallar la suma de valores del conjunto A que satisface:

$$A = \{\text{dom } f(x) \cap \text{Dom } g(x)\}$$

A) 2 B) 4 C) 6

D) 8 E) 10

CALAPENSHKO

team CALAPENSHKO

Capítulo 14

# Ecuaciones e Inecuaciones Trigonométricas

**CAPACIDADES**

- Diferenciar ecuación trigonométrica de identidad trigonométrica.
- Resolver ecuaciones trigonométricas mediante diversos métodos.
- Resolver sistemas de ecuaciones e inecuaciones trigonométricas.

## JACOB BERNOULLI "EL GENIO DE LAS ECUACIONES"

Jacob Bernoulli

El primer trabajo relacionado con el análisis de los infinitesimales publicado por Jacob fue en 1690 en el Acta Eruditorum. Al final de este trabajo Jacob propuso como un reto el conocido como problema de la catenaria: "Encontrar la forma que toma una cuerda (o cadena), perfectamente flexible y homogénea, por la acción sólo de su peso, si sus extremos son fijos."

Este era un viejo problema que los geómetras más eminentes de épocas anteriores no habían sido capaces de resolver satisfactoriamente. La forma que toma la cuerda tiene un gran parecido con una parábola y precisamente ésta fue la primera conjetura formulada por varios matemáticos, Galileo entre ellos.

Después de lanzado el reto por Jacob, el problema fue resuelto geométricamente por Huygens y, mediante el uso de los medios del cálculo infinitesimal, por Johann Bernoulli y Leibniz.

Y todos obtuvieron constructivamente la misma curva a la que Huygens denominó catenaria, del vocablo latino catena que significa cadena. Actualmente esta curva se describe a través de la función exponencial, mediante la función conocida como coseno hiperbólico.

Jacob analizó una serie de curvas relacionadas con la espiral logarítmica (evoluta, involuta, cáustica...) y el resultado era frecuentemente otra espiral logarítmica. Esta propiedad extraordinaria de reproducirse bajo diversas transformaciones fue lo que motivó que Jacob denominara a esta espiral spira mirabilis (espiral milagrosa) y que ordenase que fuera colocada en la lápida de su tumba junto a la inscripción latina Eadem mutata resurgo, lo que puede traducirse como: Aún siendo modificada, resurjo. Sin embargo, por ironías del destino, la espiral que aparece grabada en su tumba es la de Arquímedes y no la logarítmica, como él había dispuesto.

En junio de 1696, mientras Johann estaba en Groninga, propuso el problema de la braquistócrona y retó a la comunidad matemática a resolverlo antes del fin del año, añadiendo con sarcasmo que la curva es una bien conocida de los matemáticos (La cual resultó ser la cicloide).

team CALAPENSHKO



## INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones trigonométricas son igualdades condicionales, donde la variable se encuentra afectada por algún operador trigonométrico y se cumple para un conjunto de valores.

Son ecuaciones trigonométricas:

- $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos 2x = 1$
- $\tan\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}$
- $2\operatorname{sen}^2 x = \cos 2x$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \csc x - \cot x$

# ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

## ECUACIÓN TRIGONOMÉTRICA ELEMENTAL (ETE)

Son aquellas ecuaciones de la forma

$$\underbrace{FT\,(ax + b) = N}_{\text{Argumento de la ETE}} \quad \ldots\ldots\ldots(*)$$

Donde:
- FT : Operador trigonométrico
- x : Variable angular
- a, b : Constante reales, $a \neq 0$
- N : Constante real el cual pertenece al rango de la función trigonométrica

**Ejemplos:**
- $\operatorname{sen} 3x = \frac{1}{2}$
- $\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\tan 2x = -1$

## TIPOS DE SOLUCIONES

### SOLUCIÓN GENERAL

Es el conjunto de todos los valores que asume la variable angular.

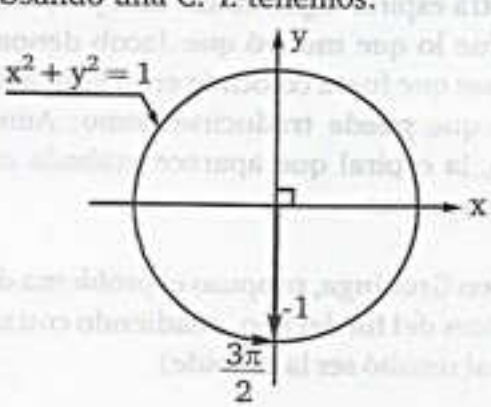
### SOLUCIÓN PRINCIPAL

Es el menor valor no negativo que sume la variable angular.

**Ejemplo:** Resolver: $\operatorname{sen} 2x = -1$

Indicando la solución principal y la solución general.

**Resolución:** Usando una C. T. tenemos:




Luego: $2x = \ldots\ldots -\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}; \ldots\ldots$

$\Rightarrow x = \ldots\ldots -\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}; \ldots\ldots$

Solución principal: $x = \frac{3\pi}{4}$

Solución general: $x = k\pi - \frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}$

team CALAPENSHKO


## VALOR PRINCIPAL ( $V_p$ )

Considerando la ecuación trigonométrica elemental (*), el valor principal es aquel valor del argumento de la ETE comprendido en el rango de la función inversa, así:

$$V_p = \text{arc FT (N)}$$

**Ejemplos:**

- $\text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V_p = \text{arcsen } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$
- $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow V_p = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$
- $\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow V_p = \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$
- $\text{sen } 3x = \frac{1}{3} \Rightarrow V_p = \text{arcsen } \frac{1}{3}$

## EXPRESIONES GENERALES DE TODOS LOS ARCOS QUE TIENEN LA MISMA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA

1. **PARA EL SENO:** Si: $\text{sen } x = N \Rightarrow \boxed{x = k\pi + (-1)^k V_p}$ $k \in \mathbb{Z}$ Donde: $V_p = \text{arcsen } N$

2. **PARA EL COSENO:** Si: $\cos x = N \Rightarrow \boxed{x = 2k\pi \pm V_p}$ $k \in \mathbb{Z}$ Donde: $V_p = \arccos N$

3. **PARA LA TANGENTE:** Si: $\tan x = N \Rightarrow \boxed{x = k\pi + V_p}$ $k \in \mathbb{Z}$ Donde: $V_p = \arctan N$

**Ejemplo (1):** Resolver: $\text{sen } x = \frac{1}{2}$

**Resolución:** $V_p = \text{arcsen } \frac{1}{2} \Rightarrow V_p = \frac{\pi}{6}$

Aplicando la forma general

$$\therefore \quad x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6} \; ; k \in \mathbb{Z}$$

**Ejemplo (2):** Resolver: $\cos^2 x - \text{sen}^2 x = -\frac{1}{2}$

**Resolución:** Utilizando la identidad: $\cos^2 x - \text{sen}^2 x = \cos 2x$

Tenemos: $\cos 2x = -\frac{1}{2}$

Luego: $V_p = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow V_p = \frac{2\pi}{3}$

Aplicando la forma general:

$$2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore \quad x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}\ ;\ k \in \mathbb{Z}$$

**Ejemplo (3):** Resolver: $\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$

**Resolución:**

$$Vp = \arctan 1 \Rightarrow Vp = \frac{\pi}{4}$$

Aplicando la forma general:

$$x - \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \quad x = k\pi + \frac{5\pi}{12}\ ;\ k \in \mathbb{Z}$$

**OBSERVACIÓN**

Si las ecuación trigonométrica contiene las funciones cotangente, secante o cosecante, usar las identidades:

$$\cot x = \frac{1}{\tan x};\ \sec x = \frac{1}{\cos x}\ ;\ \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

**NOTA**

Ecuaciones trigonométricas elementales usuales y sus respectivas soluciones generales ($k \in \mathbb{Z}$)

I. $\operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = k\pi$

II. $\operatorname{sen} x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

III. $\operatorname{sen} x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \vee x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

IV. $\cos x = 0 \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

V. $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$

VI. $\cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi$

## ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS NO ELEMENTALES

Son aquellas cuya resolución requiere de la aplicación de ciertos conceptos algebraicos o trigono - métricos tales como factorización, diferencia de cuadrados, resolución de una ecuación de segundo grado, identidades trigonométricas básicas, identidades del ángulo doble y otros.

Para resolver estas ecuaciones no hay un método general que se debe aplicar, lo que se hace es transformar estas ecuaciones (aplicando los conceptos algebraicos y trigonométricos ya mencionados) en ecuaciones elementales y el conjunto solución sera la unión de cada una de las ecuaciones elementales que se determinen.

team CALAPENSHKO


**Ejemplos:**

1. Resolver: $\text{sen}^2x = \frac{1}{2}$. Hallar su conjunto solución y las soluciones comprendidas en $[0, 2\pi\rangle$

**Solución:**

* $2\text{sen}^2x = 1 \rightarrow$ No es recomendable extraer raíz cuadrada (se pierden soluciones)

* Entonces: $\underbrace{2\text{sen}^2x}_{} = 1$

$$1 - \cos 2x = 1 \Rightarrow \cos 2x = 0$$

* Conjunto solución: $\cos 2x = \cos(2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ C.S. $= \left\{x / x = \frac{(2n+1)\pi}{4}\right\}, n \in \mathbb{Z}$

Soluciones en $[0; 2\pi\rangle$

* $n = 0 \Rightarrow x_1 = (2(0)+1)\frac{\pi}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4}$

* $n = 1 \Rightarrow x_2 = (2(1)+1)\frac{\pi}{4} \Rightarrow x_2 = \frac{3\pi}{4}$

* $n = 2 \Rightarrow x_3 = (2(2)+1)\frac{\pi}{4} \Rightarrow x_3 = \frac{5\pi}{4}$

* $n = 3 \Rightarrow x_4 = (2(3)+1)\frac{\pi}{4} \Rightarrow x_4 = \frac{7\pi}{4}$

* $n = 4 \Rightarrow x_5 = (2(4)+1)\frac{\pi}{4} \Rightarrow x_5 = \frac{9\pi}{4}$ (No)

Las soluciones pedidas son : $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

2. Resolver la ecuación: $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$ indicar las soluciones en $[0; 2\pi\rangle$

**Solución:**

*Esta es una ecuación de segundo grado en cosx y puede factorizarse (método del aspa simple)

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

$2\cos x$ — $+1$

$\cos x$ — $-1$

$$\Big\} \; (2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$$

* Cada factor se iguala a cero:

* $2\cos x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow x_1 = \frac{2\pi}{3}$ y $x_2 = \frac{4\pi}{3}$

* $\cos x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \cos x = 1 \quad \Rightarrow x_3 = 0$

Luego las soluciones pedidas son : $\left\{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

3. Hallar el conjunto solución de la ecuación: $\text{sen}3x + \text{sen}x = \text{sen}2x$

**Solución:**

* Recordar : $\text{sen}a + \text{sen}b = 2\text{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

* $\underbrace{\text{sen}3x + \text{sen}x}_{} = \text{sen}2x \Rightarrow 2\text{sen}2x\cos x = \text{sen}2x \Rightarrow 2\text{sen}2x\cos x - \text{sen}2x = 0$

## SISTEMA DE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Un sistema de Ecuaciones Trigonométricas consiste en un conjunto de ecuaciones ( de la cual al menos una es trigonométrica) donde intervienen dos o más incógnitas.

Para resolver un Sistema de Ecuaciones Trigonométricas deben haber tantas ecuaciones como incógnitas tenga el sistema.

Al igual que en los casos anteriores no existe un método a seguir para la resolución de un S.E.T. , lo aconsejable es aplicar ciertos conceptos algebraicos o trigonométricos que nos permita llegar a un punto en el cual se pueda determinar alguna relación simple entre las incógnitas o quizás el conjunto solución de ellas, de tal manera que nos facilite la obtención del conjunto solución de cada una de las otra incógnitas.

**NOTA**

En un sistema de Ecuaciones Trigonométricas se debe tener mucho cuidado al momento de expresar el conjunto solución de cada una de las incógnitas. La forma de expresarlos debe ser tal que cuando estos se reemplazan (a la vez) en cualesquiera de las ecuaciones que componen el sistema se verifique la igualdad correspondiente.

**Ejemplos:**

I. Resolver el Sistema : $\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{3} & ...(1) \\ \operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y=1 & ...(2) \end{cases}$

* $\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y=2\operatorname{sen}\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)=1 \qquad ...(3)$

* Reemplazamos (1) en (3): $2\operatorname{sen}\left(\dfrac{\frac{\pi}{3}}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)=1 \Rightarrow 2\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)=1$

* $\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)=1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x-y}{2}=2k\pi \quad \Rightarrow \quad x-y=4\,k\pi$

* De (1)..... $x+y=\dfrac{\pi}{3}$

* Resolviendo se obtiene: $\boxed{\begin{array}{l} x=2k\pi \\ y=\dfrac{\pi}{6}-2\,k\pi \end{array}}$

team CALAPENSHKO



## INECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

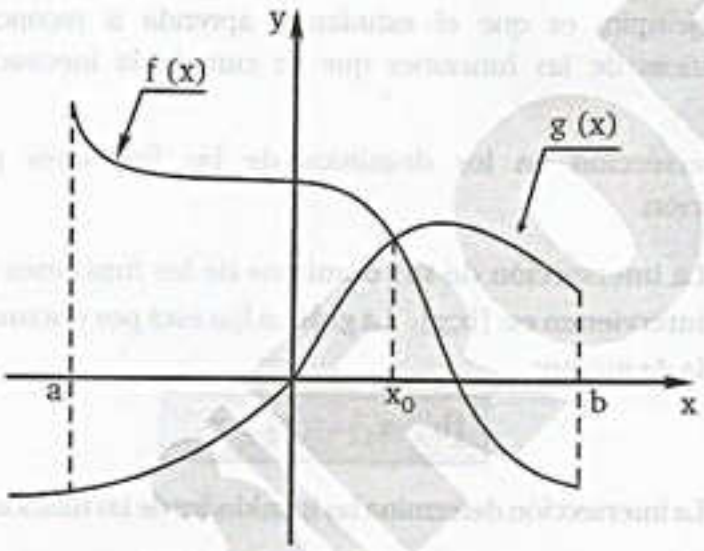
Para la resolución de inecuaciones trigonométricas se requiere los conocimientos previos de álgebra y de trigonometría. No hay un método general que se debe seguir, en los diversos ejemplos que se resuelven a continuación, se indican algunos procedimientos para resolver una inecuación, pero existen otros métodos.

Es importante antes de preceder a la resolución de inecuaciones, aclarar algunos conceptos.

**1.°** Para que exista solución en una inecuación debe haber intersección entre los dominios de las funciones que intervienen, si no existe intersección se dice que no existe solución.

**2.°** Puede ocurrir que exista intersección entre los dominios, pero ningún valor de éste verifica la inecuación, en ese caso también se dice que existe solución.

**3.°** Dadas las funciones **f(x)** y **g(x)** tal que su dominio sea **<a; b>** y sus gráficas se indican en la figura adjunta entonces:




Observa que:

**i)** Existe un punto de intersección cuya abscisa es $x_0$. Entonces para dicho valor se cumple:

$$f(x) = g(x)$$

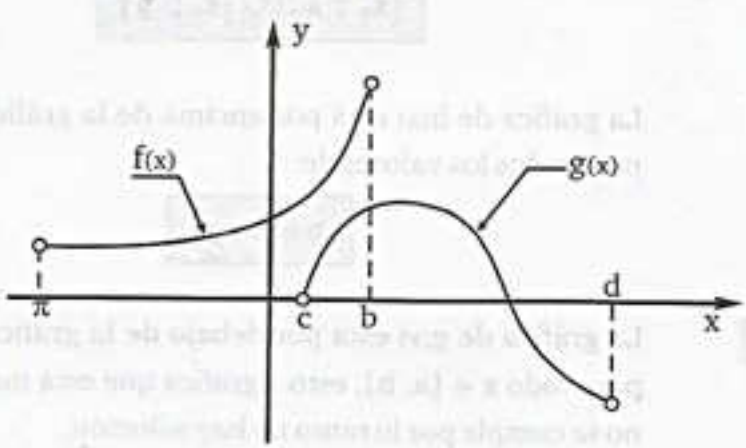
**ii)** Antes de $x_0$ la curva de **f(x)** está por encima de la curva de **g(x)** entonces:

$$f(x) > g(x); \forall x \in \langle a; x_0 \rangle$$

**iii)** Después de $x_0$ de la curva de **f(x)** está por debajo de la curva de **g(x)** entonces:

$$f(x) < g(x); \forall x \in \langle x_0; b \rangle$$

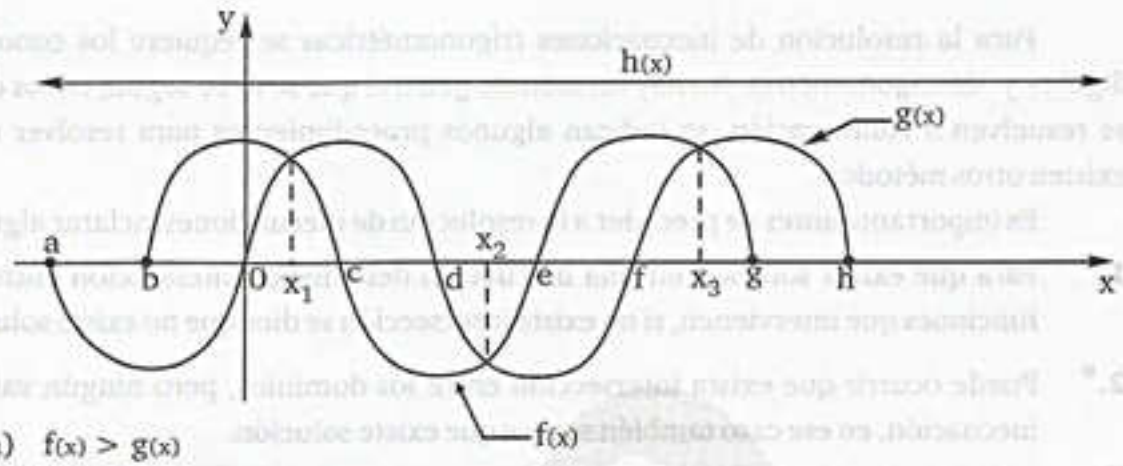
**4.°** En las figuras siguientes se muestran dos funciones, en este caso hay intersección entre los dominios [c;b). Entonces:




* $g(x) > f(x)$; no tiene solución.

* $f(x) > g(x)$; se cumple $\forall x \in \langle c; b \rangle$

**Ejemplo:** De la figura adjunta, determinar la solución en cada caso:




a) $f(x) > g(x)$
b) $f(x) = g(x)$
c) $f(x) < g(x)$
d) $h(x) > f(x)$
e) $g(x) > h(x)$

**Resolución:** * La intención de este ejemplo, es que el estudiante aprenda a reconocer rápidamente de las gráficas de las funciones que se cumple la inecuación propuesta.

* Observa: que hay intersección en los dominios de las funciones que intervienen en la inecuación.

**a)** $\boxed{f(x) > g(x)}$ La intersección de sus dominios de las funciones que intervienen es: [b;g]. La gráfica $f(x)$ está por encima de la de $g(x)$ en:

$$[b\,;\ x_1\rangle \cup \langle x_2\,;\ x_3\rangle$$

**b)** $\boxed{f(x) = g(x)}$ La intersección determina las igualdades de las funciones:

$$\{x_1;\ x_2\ ;x_3\}$$

**c)** $\boxed{f(x) < g(x)}$ La gráfica de $f(x)$ está por debajo de la gráfica de $g(x)$ es:

$$\langle x_1\ ;\ x_2\rangle \cup \langle x_3;\ g]$$

**d)** $\boxed{h(x) > f(x)}$ La gráfica de $h(x)$ está por encima de la gráfica de $f(x)$ para todos los valores de:

$$x \in [b; g]$$

**e)** $\boxed{g(x) > h(x)}$ La gráfica de $g(x)$ está por debajo de la gráfica de $h(x)$ para todo $x \in [a; h]$, esto significa que está inecuación no se cumple por lo tanto no hay solución.

team CALAPENSHKO

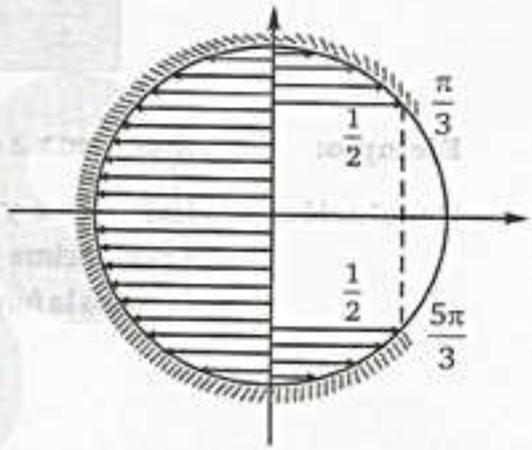


**5.° Otro Método:** Para resolver las inecuaciones trigonométricas es utilizando la circunferencia trigonométrica, este método resulta sencillo cuando las funciones que intervienen en la inecuación son funciones trigonométricas básicas (es decir senx, cosx, tgx, ..., etc.) y cuando aparecen funciones trigonométricas compuestas (es decir sen2x, cos3x, ..., etc.) lo recomendable es hacer en cambio de variable tal como se indica en los ejemplos siguientes:

**Ejemplo:** Resolver: $\cos\theta < \frac{1}{2}$

**Resolución:** Graficamos la CT y determinamos para qué valores: $\cos\theta = \frac{1}{2}$ ; $[0;\ 2\pi)$

$\theta = \frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{5\pi}{3}$




Analizamos para que valores de $\theta$, se cumple $\cos\theta < \frac{1}{2}$; de la figura se obtiene:

$\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{5\pi}{3}$; este es un conjunto solución.

Como cos $\theta$ es periódica y su periodo es $2\pi$ se suman $2n\pi$ a cada extremo y se obtiene la solución del problema.

$$2n\pi + \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{5\pi}{3} + 2n\pi \quad ; n \in \mathbb{Z}$$

**Ejemplo:** Resolver: $\tan\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) > 1$

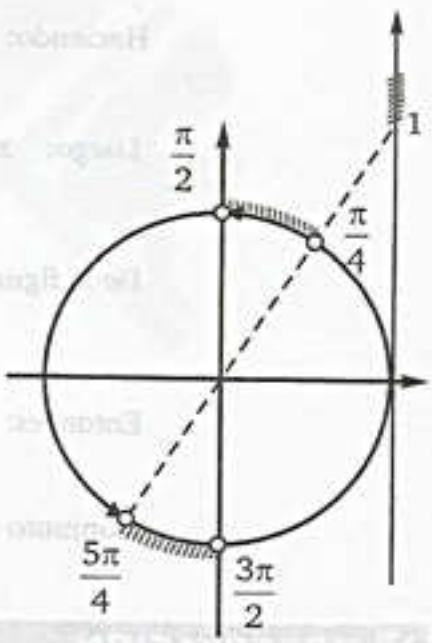
**Resolución:** Hacemos el cambio de variable:

$$\theta = 3x + \frac{\pi}{4}$$

Resulta: $\tan\theta = 1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}$

Observa que: $\tan\theta > 1$; implica que:

$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2} \ \vee \ \frac{5\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{2}$$




Analizando de $\langle 0;\ 2\pi\rangle$

Como el periodo de la tangente es $\pi$ se suma a los extremos $n\pi$; $n \in \mathbb{Z}$

$$n\pi + \frac{\pi}{4} < \theta < n\pi + \frac{\pi}{2} \ \vee \ n\pi + \frac{5\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{2} + n\pi$$

Pero resulta que este caso resulta lo mismo decir:

$$n\pi+\frac{\pi}{4}<\theta<n\pi+\frac{\pi}{2}$$

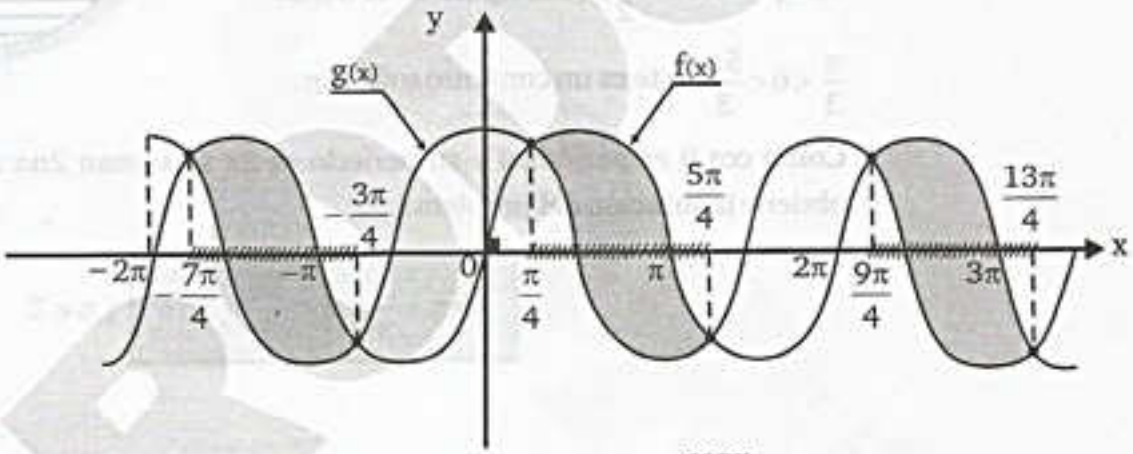
Ahora volvemos a la variable original: $n\pi+\frac{\pi}{4}<3x+\frac{\pi}{4}<n\pi+\frac{\pi}{2}$

$$n\pi \quad < \quad 3x \quad < n\pi+\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{n\pi}{3}<x<\frac{n\pi}{3}+\frac{\pi}{12};\ n\in\mathbb{Z}$$

**Ejemplo:** Resolver: $\operatorname{sen} x \geq \cos x$

**Resolución:** Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$; se verifica para toda x donde la gráfica de f(x); se halle por encima de la gráfica de g(x). Para hallar los puntos de intersección igualaremos la función $f(x) = g(x)$ y desarrollamos.




Haciendo: $f(x) = g(x)$ $\quad \operatorname{sen} x = \cos x \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 1 \Rightarrow \tan x = 1$

Luego: $x = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}; \frac{17\pi}{4}; \ldots\ldots; -\frac{3\pi}{4}; -\frac{7\pi}{4}; \ldots\ldots\right\}$

De la figura: $$x \in \ldots\ldots\left[-\frac{7\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{9\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}\right] \cup \ldots\ldots \quad (*)$$

Entonces: $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$, como conjunto particular, el periodo del senx y cosx es $2\pi$.

Conjunto solución general será: $$\left[\frac{\pi}{4}+2n\pi; \frac{5\pi}{4}+2n\pi\right];\ n\in\mathbb{Z}$$

**OBSERVACIÓN**

Para cualquier valor entero de n, encontraremos un conjunto solución particular, (*)

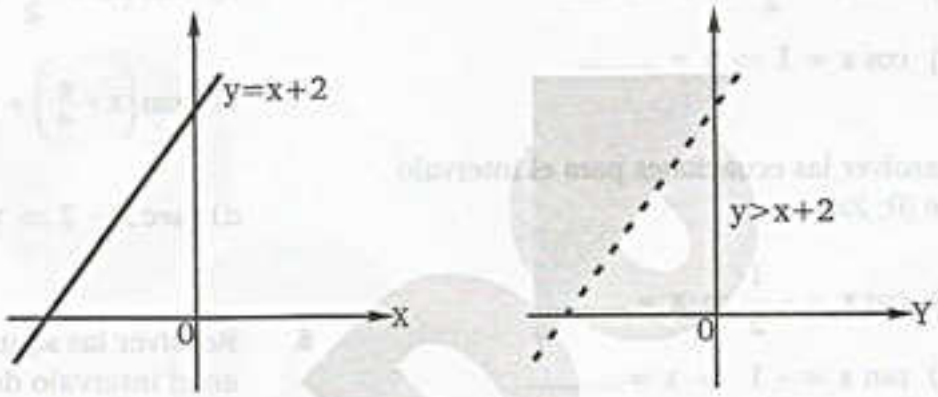
team CALAPENSHKO



**6.°** Hasta el momento solo se han analizado inecuaciones trigonométricas donde solo interviene una incógnita, pero puede ocurrir que se presente una inecuación y dos incógnitas por ejemplo:

$y>x+2$, en este caso las soluciones son pares ordenados y se representa gráficamente , en el ejemplo planteado primero graficamos.

$y=x+2$ y luego tomamos un punto de los semiplanos que se determinar por ejemplo (0, 0) si sustituimos estos valores en la ecuación obtenemos $0>2$ que es falso entonces la solución de la inecuación será el otro semiplano.

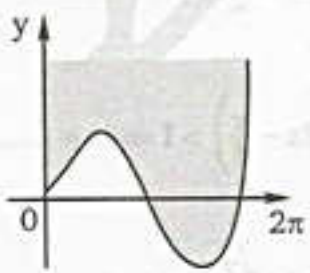



**7.°** Cuando se presenta un sistema de inecuaciones lo que se hace es resolver cada inecuación separadamente y luego intersectarlas , la solución será la parte común.

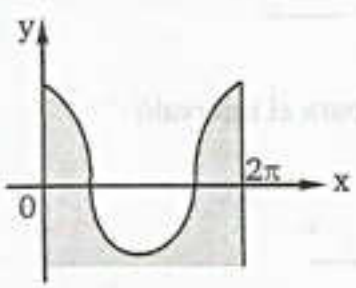
Por ejemplo resolver el sistema $\begin{cases} y \geq \text{sen}x \\ y \leq \cos x \\ 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases}$

Entonces graficamos cada inecuación separadamente, graficamos primero $y \geq \text{sen}x$, teniendo en cuenta que $0 \leq x \leq 2\pi$. Luego graficamos $y \leq \cos x$ para $0 \leq x \leq 2\pi$. Finalmente intersectamos las gráficas. La respuesta es la parte común.

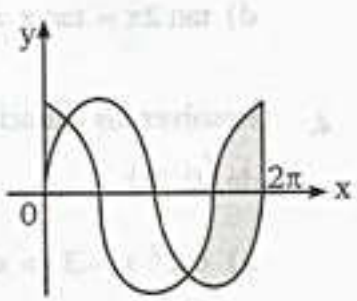
$y \geq \text{sen}x$, $0 \leq x \leq 2\pi$




$y \leq \cos x$, $0 \leq x \leq 2\pi$




Respuesta :



## EJERCICIOS DE APLICACIÓN

**1.** Resolver las ecuaciones para el intervalo de $\langle 0, \pi \rangle$

a) $\tan x = \sqrt{3} \Rightarrow x =$ .....

b) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x =$ .....

c) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow x =$ .....

d) $\cos x = 1 \Rightarrow x =$ .....

**2.** Resolver las ecuaciones para el intervalo de $\langle 0; 2\pi \rangle$

a) $\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x =$ .....

b) $\tan x = -1 \Rightarrow x =$ .....

c) $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x =$ .....

d) $\sec x = -2 \Rightarrow x =$ .....

**3.** Resolver las ecuaciones para el intervalo de $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$

a) $\operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow x =$ .....

b) $\operatorname{sen} 2x = \cos 2x \Rightarrow x =$ .....

c) $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 2x \Rightarrow x =$ .....

d) $\tan 2x = \tan x \Rightarrow x =$ .....

**4.** Resolver las ecuaciones para el intervalo de $\langle 0, 2\pi \rangle$

a) $\cot^2 x = 3 \Rightarrow x =$ .....

b) $\csc^2 2x = 4 \Rightarrow x =$ .....

c) $2\cos^2 x = 1 \Rightarrow x =$ .....

d) $3\operatorname{sen} 2x = 4\operatorname{sen}^3 2x \Rightarrow x =$ .....

**5.** Resolver las ecuaciones siguientes indicando su solución general:

a) $\operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow x =$ .....

b) $\cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x =$ .....

c) $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} \Rightarrow x =$ .....

d) $\sec x = 2 \Rightarrow x =$ .....

**6.** Resolver las siguientes inecuaciones en el intervalo de $\langle 0; 2\pi \rangle$

a) $\operatorname{sen} x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x \in$ .....

b) $\tan x < 1 \Rightarrow x \in$ .....

c) $\sec x > 2 \Rightarrow x \in$ .....

d) $\cot x \leq \sqrt{3} \Rightarrow x \in$ .....

**7.** Resolver las siguientes inecuaciones

a) $\cos 2x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x \in$ .....

b) $\tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) > 1 \Rightarrow x \in$ .....

c) $\operatorname{sen} \frac{x}{2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x \in$ .....

d) $\sec\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) < 2 \Rightarrow x \in$ .....

team CALAPENSHKO



## PROBLEMAS RESUELTOS

**PROBLEMA 1** Determine la solución principal de:

$$\cos x \,.\, \cot x = \sqrt{2} - \operatorname{sen} x$$

**Resolución:**

$$\cos x \cot x = \sqrt{2} - \operatorname{sen} x \quad \ldots\ldots \quad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$\cos x \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \sqrt{2} - \operatorname{sen} x$$

Desarrollando y trasladando : $\dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} + \operatorname{sen} x = \sqrt{2}$

Desarrollando : $\dfrac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} = \sqrt{2}$ ..... $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$

$\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} = \sqrt{2}$ ..... recíproca y efectuando

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore$ $\mathbf{x = \dfrac{\pi}{4}}$ **..... solución principal**

**PROBLEMA 2** Halle la suma de las raíces de la ecuación: $\cos^2 4x + 2\operatorname{sen}^2 2x = 3,\ 0 < x < \dfrac{3\pi}{2}$

**ADMISIÓN UNMSM 2017 - II**

**Resolución:**

$$\sum x = ? \ ; \ 0 < x < \frac{3\pi}{2} \ ; \ \cos^2 4x + 2\operatorname{sen}^2 2x = 3$$

Pasar al ángulo 4x: $\cos^2 4x + 2\left(\dfrac{1-\cos 4x}{2}\right) = 3$

$$\cos^2 4x - \cos 4x - 2 = 0$$

$$(\cos 4x - 2)(\cos 4x + 1) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos 4x = 2 \ (\text{No}) \\ \cos 4x = -1 \ (\text{Si}) \end{array}\right\} \quad \cos 4x = -1$$

Queda : ..., $7\pi$, $5\pi$, $3\pi$, $\pi$

Despejando: $x = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}$

$$\therefore \quad \sum x = \frac{9\pi}{4}$$

twitter.com/calapenshko

team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 3** Calcular la suma de las tres primeras soluciones positivas al resolver:

$$\operatorname{sen}(5x-10°)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

**Resolución:** De :

$$\operatorname{sen}(5x-10°)=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{..... ETE}$$

Valor principal $= 45°$

Luego usando la expresión general:

$$5x-10°=180°k+(-1)^k 45°$$

$$x=36°k+(-1)^k 9°+2 \; ; \; k\in$$

Tabulando :

$k=0 \Rightarrow x_1=11°$ +

$k=1 \Rightarrow x_2=29°$

$k=2 \Rightarrow x_3=83°$

$x_1+x_2+x_3=123°$

∴ **Suma de tres primeras soluciones positivas es 123°**

**PROBLEMA 4** Luego de resolver la ecuación:

$$4\operatorname{sen}^2x+2\operatorname{sen}^2x\cos 2x=1$$

Calcular la suma de las soluciones positivas menores a $2\pi$

**Resolución:** Usando la identidad:

$$\cos 2x=1-2\operatorname{sen}^2x$$

Tenemos:

$$4\operatorname{sen}^2x+2\operatorname{sen}^2x\,(1-2\operatorname{sen}^2x)=1$$

$$4\operatorname{sen}^4x+2\operatorname{sen}^2x-4\operatorname{sen}^4x=1$$

$$\Rightarrow 0=1-2\operatorname{sen}^2x$$

$$\Rightarrow \cos 2x=0 \text{ .....ETE}$$

Luego:

$$2x=(2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=(2k+1)\frac{\pi}{4} \text{ .....(1)}$$

Tabulando: (hallamos; $0<x<2\pi$) en (1)

$$k=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}$$

$$k=1 \Rightarrow x=\frac{3\pi}{4}$$

team CALAPENSHKO


$$k = 2 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4}$$

$$k = 3 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{4}$$

Luego: Suma de soluciones $= \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{7\pi}{4}$

$\therefore$ **Suma de soluciones = $4\pi$**

**PROBLEMA 5** Encontrar la solución general de la ecuación:

$$3\tan^2 x + 5 = 7\sec x$$

**Resolución:** Usando identidad : $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

$$3(\sec^2 x - 1) + 5 = 7\sec x$$

Luego :

$$3\sec^2 x - 7\sec x + 2 = 0$$

$3\sec x \quad -1$

$\sec x \quad -2$

$$\underbrace{(3\sec x - 1)}\underbrace{(\sec x - 2)} = 0$$

$\sec x = \frac{1}{3} \Rightarrow$ ¡Incomplatible!

$\sec x = 2 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$

$Vp = \frac{\pi}{3}$

$\therefore \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \; ; \; k \in \mathbb{Z}$

**PROBLEMA 6** Encontrar la solución general de la ecuación:

$$2\cos^2\theta + 3\operatorname{sen}\theta = 3$$

**Resolución:** Usando la identidad:

$$\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta$$

Tenemos: $2(1 - \operatorname{sen}^2\theta) + 3\operatorname{sen}\theta = 3$

$$2\operatorname{sen}^2\theta - 3\operatorname{sen}\theta + 1 = 0$$

Factorizando: $(2\operatorname{sen}\theta - 1)(\operatorname{sen}\theta - 1) = 0$

team CALAPENSHKO



1.ª Solución: $\operatorname{sen}\theta - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = 1$

$$\therefore \theta = 2k\pi + \frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}$$

2.ª Solución: $2\operatorname{sen}\theta - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$ ..... ETE

$$\therefore V_p = \frac{\pi}{6}$$

Luego: $\theta = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6};\ k \in \mathbb{Z}$

$$\therefore\ \boldsymbol{\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \ \vee\ \theta = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6};\ k \in \mathbb{Z}}$$

**PROBLEMA 7**

Sea f: $[-\pi; \pi] \to \mathbb{R}$ la función definida por: $f(x) = \cos^4 x + \operatorname{sen}^2 x - 1$
¿En cuántos puntos el gráfico de esta función interseca al eje de las abscisas?

**ADMISIÓN UNI 2017 - I**

**Resolución:**

f(x) interseca al eje $x \to f(x) = 0$.

$$\cos^4 x + \operatorname{sen}^2 x - 1 = 0$$

$$\cos^4 x - \cos^2 x = 0$$

$$\cos^2 x(\cos^2 x - 1) = 0$$

$$\cos^2 x(\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \quad \to \quad x = -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x + 1 = 0 \ \to \ \cos x = -1 \ \to \ x = -\pi; \pi$$

$$\cos x - 1 = 0 \ \to \ \cos x = 1 \quad \to \ x = 0$$

Entonces, existen cinco soluciones para:

$$x \in [-\pi; \pi]$$

$\therefore$ **f(x) interseca al eje x en 5 puntos.**

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 8** Calcule el mayor valor entero de k, si θ pertenece al cuarto cuadrante y se cumple:

$$\begin{cases} 4\operatorname{sen}^2\theta - 4[\![\cos\theta + 1]\!]\operatorname{sen}\theta - [\![\operatorname{sen}\theta]\!] \leq 0, \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{2k-3}{2} \end{cases}$$

**Resolución:**

**ADMISIÓN UNI 2017 - II**

Nos piden el mayor valor entero de k.

Por dato, sabemos que:

$$\theta \in \text{IV C; entonces, } 0 < \cos\theta < 1$$

I. Analizando la primera inecuación dada, tenemos:

$$4\operatorname{sen}^2\theta - 4[\![\cos\theta + 1]\!]\operatorname{sen}\theta - [\![\operatorname{sen}\theta]\!] \leq 0$$

Entonces: $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{2}$ (resultado incorrecto ya que $\theta \in$ IV C).

Debido a lo anterior, consideraremos que la condición debe ser:

$$4\operatorname{sen}^2\theta - 4[\![\cos\theta + 1]\!]\operatorname{sen}\theta - [\![\operatorname{sen}\theta]\!] \leq 0$$

$$4\operatorname{sen}^2\theta + 4(1)\operatorname{sen}\theta - (-1) \leq 0$$

$$4\operatorname{sen}^2\theta + 4\operatorname{sen}\theta + 1 \leq 0$$

$$(2\operatorname{sen}\theta + 1)^2 \leq 0$$

Luego: $2\operatorname{sen}\theta + 1 = 0$

$$\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2}$$

II. Reemplazando en la otra inecuación, tenemos:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{2k-3}{2}$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{2k-3}{2}$$

$$2k - 3 = -1$$

$$\therefore \quad \mathbf{k = 1}$$

team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 9** Resolver el sistema de ecuaciones trigonométricas

$$\tan x + \tan y = \csc\frac{\pi}{6} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\cos x \cos y = \cos\frac{\pi}{3} \quad \ldots\ldots (2)$$

Indicar las soluciones principales

**Resolución:** De los datos:

$$\tan x + \tan y = 2 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} \quad \ldots\ldots (2)$$

Usamos la identidad:

$$\frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos x \cos y} = \tan x + \tan y$$

Dando valores:

$$\operatorname{sen}(x+y) = \cos x \cos y(\tan x + \tan y)$$

$$\operatorname{sen}(x+y) = \frac{1}{2}.2$$

$$\operatorname{sen}(x+y) = 1 \quad \ldots\ldots \text{ETE}$$

$$x + y = \frac{\pi}{2} \quad \ldots\ldots (3)$$

$$\operatorname{sen} x = \cos y \quad \ldots\ldots \text{prop. de ángulos complementarios}$$

En (2):

$$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\underbrace{2\operatorname{sen} x \cos x} = 1$$

$$\operatorname{sen} 2x = 1 \quad \ldots\ldots \text{Id. de ángulo doble}$$

$$2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

En (3):

$$y = \frac{\pi}{4}$$

$\therefore$ **Las soluciones principales son** $x = \frac{\pi}{4} \wedge y = \frac{\pi}{4}$

**PROBLEMA 10** Encontrar la solución general de la ecuación:

$$13(1 + \operatorname{sen} x + \cos x) + \operatorname{sen} 2x = 0 \; ; \; n \in Z$$

**Resolución:**

**Recordar:**

$$\operatorname{sen} 2x = (\operatorname{sen} x + \cos x + 1)(\operatorname{sen} x + \cos x - 1)$$

team CALAPENSHKO


Factorizando : $(\operatorname{sen}x+\cos x+1)(\operatorname{sen}x+\cos x-1+13)=0$

$(\operatorname{sen}x+\cos x+1)(\operatorname{sen}x+\cos x+12)=0$

Se observa que : $\operatorname{sen}x+\cos x+12\neq 0$

$\operatorname{sen}x+\cos x+1=0$

**Recordar:**

$$\operatorname{sen}x+\cos x=\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

Luego : $\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$

$$\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ Vp=-\frac{\pi}{4}$$

$$x+\frac{\pi}{4}=n\pi+(-1)^n\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore\ \ x=n\pi-(-1)^n\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4};\ n\in\mathbb{Z}$$

**PROBLEMA 11** Resolver la inecuación:

$$\cos x\leq \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$$

Para x en $[0\ ;\ 2\pi]$

**Resolución:** De la desigualdad: $\underbrace{\cos x}_{f(x)}<\underbrace{\frac{1}{2}}_{g(x)}$ .....(*)

Graficaremos las funciones:

$$f(x)=\cos x\wedge g(x)=\frac{1}{2}$$

Primero resolvemos: $f(x)=g(x)$

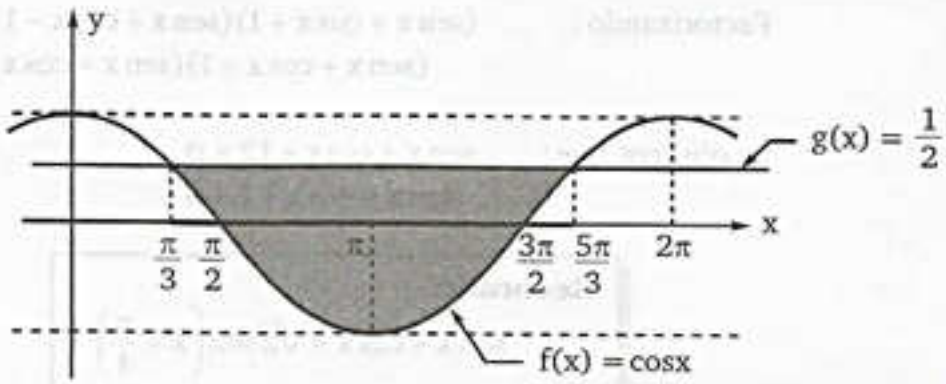
Los cuales nos darán los puntos de intersección entre dichas funciones.

Así: $\cos x=\frac{1}{2}$ ..... ETE

$$V_p=\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\ ;\ k\in\mathbb{Z}$$

Tabulando: $k=0\Rightarrow x_1=\frac{\pi}{3}$

$k=1\Rightarrow x_2=\frac{5\pi}{3}$




La solución de (*) será cuando gráficamente f(x) se encuentra por debajo de g(x)

$$\therefore \quad x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$$

**PROBLEMA 12** Calcule el mayor valor de $x < 360°$, correspondiente al máximo valor de:
$V = \operatorname{sen} 4x + \cos 4x$ **ADMISIÓN UNI 2017-II**

**Resolución:**

$$V = \operatorname{sen} 4x + \cos 4x; \; x < 360°$$

$$V = \sqrt{2}\, \operatorname{sen}(4x + 45°)$$

Para que V sea máximo, se debe cumplir:

$$\operatorname{sen}(4x + 45°) = 1$$

$$\rightarrow \; 4x + 45° = 360°n + 90°; \; n \in \mathbb{Z}$$

como, $x < 360°$ $\rightarrow \; \dfrac{360°n + 45°}{4} < 360°$

$\rightarrow n < 3{,}875$ para que x sea el mayor valor, n tiene que ser máximo.

$$\rightarrow \; n = 3$$

Luego :

$$x = \frac{360°(3) + 45°}{4}$$

$$x = \frac{360°(3)}{4} + \frac{45°}{4}$$

$$x = 270° + \frac{45°}{4}$$

$$x = 270° + 11° + 15'$$

$$\therefore \; x = 281°15'$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 13** Dada la ecuación trigonométrica: $5\cos x - 4\operatorname{sen} x = 4$, determine el valor positivo de $\operatorname{sen}(x_1)$, donde $x_1$, es una solución de la ecuación planteada.

**ADMISIÓN UNI 2017 - II**

**Resolución:**

Dando forma: $5\cos x - 4\operatorname{sen} x = 4$

$$5\left(\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\right) - 4\left(\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\right) = 4$$

$$5 - 5\tan^2\frac{x}{2} - 8\tan\frac{x}{2} = 4 + 4\tan^2\frac{x}{2}$$

$$9\tan^2\frac{x}{2} + 8\tan\frac{x}{2} - 1 = 0 \rightarrow \tan\frac{x}{2} = \frac{1}{9}$$

$$\rightarrow \tan\frac{x_1}{2} = \frac{1}{9}$$

Nos piden: $M = \operatorname{sen} x_1 = \dfrac{2\tan\frac{x_1}{2}}{1+\tan^2\frac{x_1}{2}} = \dfrac{2\left(\frac{1}{9}\right)}{1+\left(\frac{1}{9}\right)^2} = \dfrac{\frac{2}{9}}{1+\frac{1}{81}}$

$$\therefore \quad M = \frac{9}{41}$$

**PROBLEMA 14** Determine los valores de "a" para los cuales la ecuación:

$$\operatorname{sen}^4 x - 2\cos^2 x + a^2 = 0$$

tiene soluciones reales.

**Resolución:**

Usando la identidad: $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$

$$\operatorname{sen}^4 x - 2(1 - \operatorname{sen}^2 x) + a^2 = 0$$

$$\operatorname{sen}^4 x + 2\operatorname{sen}^2 x + a^2 - 2 = 0$$

Completando cuadrados: $\underline{\operatorname{sen}^4 x + 2\operatorname{sen}^2 x + 1} + a^2 - 3 = 0$

$$(\operatorname{sen}^2 x + 1)^2 = 3 - a^2 \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

Sabemos: $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$

Elevando al cuadrado: $0 \leq \operatorname{sen}^2 x \leq 1$

Sumando "1": $1 \leq \operatorname{sen}^2 x + 1 \leq 2$

Elevando al cuadrado: $1 \leq (\operatorname{sen}^2 x + 1)^2 \leq 4 \quad \ldots\ldots\ldots(2)$

(1) en (2): $1 \le 3-a^2 \le 4$

$-2 \le -a^2 \le 1$

$-1 \le a^2 \le 2$

$0 \le a^2 \le 2$

$\therefore \quad |a| \le \sqrt{2}$

**PROBLEMA 15** Determine la solución de la ecuación:

$$\csc x + \csc\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)+\csc\left(\frac{4\pi}{3}+x\right)=6 \ ; \ k \in \mathbb{Z}$$

**Resolución:**

Reducción al primer cuadrante:

- $\csc(120°+x)=\csc(60°-x)$
- $\csc(240°+x)=-\csc(60°+x)$

Reemplazando en la ecuación y pasando a senos:

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x}+\frac{1}{\operatorname{sen}(60°-x)}-\frac{1}{\operatorname{sen}(60°+x)}=6$$

Operando: $\dfrac{\operatorname{sen}(60°-x)\operatorname{sen}(60°+x)+\operatorname{sen} x\operatorname{sen}(60+x)-\operatorname{sen} x\operatorname{sen}(60°-x)}{\operatorname{sen} x\operatorname{sen}(60°-x)\operatorname{sen}(60°+x)}=6$

Multiplicando al numerador por (2) para luego Transformarlo de producto a suma:

$$\frac{2\operatorname{sen}(60°-x)\operatorname{sen}(60°+x)+2\operatorname{sen} x\operatorname{sen}(60°+x)-2\operatorname{sen} x\operatorname{sen}(60°-x)}{\operatorname{sen} x\operatorname{sen}(60°-x)\operatorname{sen}(60°+x)}=12$$

$$\frac{\cos 2x-\cos 120°+\cos 60°-\cos(60°+2x)-\left[\cos(60°-2x)-\cos 60°\right]}{\operatorname{sen} x\operatorname{sen}(60°-x)\operatorname{sen}(60°+x)}=12$$

**Recordar:**

$$\operatorname{sen} x \,.\, \operatorname{sen}(60°-x)\operatorname{sen}(60°+x)=\frac{\operatorname{sen} 3x}{4} \ \wedge \ \cos 120°=-\frac{1}{2}$$

Reemplazando y operando:

$$\frac{\cos 2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\overbrace{-\cos(60°+2x)-\cos(60°-2x)}^{-\cos 2x}+\frac{1}{2}}{\frac{\operatorname{sen} 3x}{4}}=12$$

$$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{\operatorname{sen} 3x}{4}}=12 \Rightarrow \frac{\cancel{12}}{2\operatorname{sen} 3x}=\cancel{12} \Rightarrow \operatorname{sen} 3x=\frac{1}{2} \ldots\ldots \text{ ETE}$$

Entonces: $Vp=\dfrac{\pi}{6}$

$$x=\frac{k\pi}{3}+(-1)^k\frac{\pi}{18}$$

team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 16** Encontrar la solución que satisface a la ecuación:

$$(\tan 2x + \cot 2x)^2 + |\tan 2x + \cot 2x| = 6 \;;\; k \in \mathbb{Z}$$

**Resolución:**

**Recordar:** * $\tan\theta + \cot\theta = 2\csc 2\theta$
* $|x|^2 = x^2$

Luego : $(\tan 2x + \cot 2x)^2 + |\tan 2x + \cot 2x| = 6$

Reemplazando : $|2\csc 4x|^2 + |2\csc 4x| - 6 = 0$

$$(\underbrace{|2\csc 4x| + 3}_{(+)})(|2\csc 4x| - 2) = 0$$

Cumple : $|2\csc 4x| = 2$

i) $\csc 4x = 1 \rightarrow \operatorname{sen} 4x = 1 \;;\; Vp = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore\; 4x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{8}$$

ii) $\csc 4x = -1 \rightarrow \operatorname{sen} 4x = -1 \;;\; Vp = -\frac{\pi}{2}$

$$\therefore\; 4x = k\pi + (-1)^k\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} - (-1)^k \frac{\pi}{8}$$

Si "k" es par

$$\therefore\; \mathbf{x = \frac{k\pi}{4} \pm \frac{\pi}{8}}$$

**PROBLEMA 17** Dada la ecuación:

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$$

Calcular la suma de todas las soluciones de dicha ecuación, si estas soluciones están comprendidas entre 0 y $2\pi$ (radianes).

**Resolución:**

De la ecuación : $\underbrace{\cos x + \cos 3x} + \cos 2x = 0$

Transf. a producto : $2\underline{\cos 2x}\cos x + \underline{\cos 2x} = 0$

Factorizando : $\cos 2x(2\cos x + 1) = 0$

Resolviendo para cada caso:

$$\text{i)}\quad \cos 2x = 0 \rightarrow 2x = \frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2};\frac{7\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4};\frac{7\pi}{4}$$

$$\text{ii)}\quad \cos x = -\frac{1}{2} \rightarrow \quad x = \frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}$$

Entonces la suma: $\sum = \frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}+\frac{7\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}$

$$\therefore \quad \sum = 6\pi$$

**PROBLEMA 18** Si $\left|2-\sqrt{3}\tan x\right| \leq 1$, entonces todos los valores de "x" en $\langle 0;\pi\rangle$ que verifica la desigualdad, se encuentran comprendidos entre: **ADMISIÓN CALLAO 2016-I**

**Resolución:**

De los datos: $\left|2-\sqrt{3}\tan x\right| \leq 1 \;;\; x \in \langle 0;\pi\rangle$

$$-1 \leq 2-\sqrt{3}\tan x \leq 1$$

$$-3 \leq -\sqrt{3}\tan x \leq -1$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \leq \tan x \leq \sqrt{3}$$

$$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \quad x \in \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$$

**PROBLEMA 19** Determine el número de soluciones de la ecuación:

$$2\operatorname{sen} x = x$$

**Resolución:**

$$2\operatorname{sen} x = x \;.....(*)$$

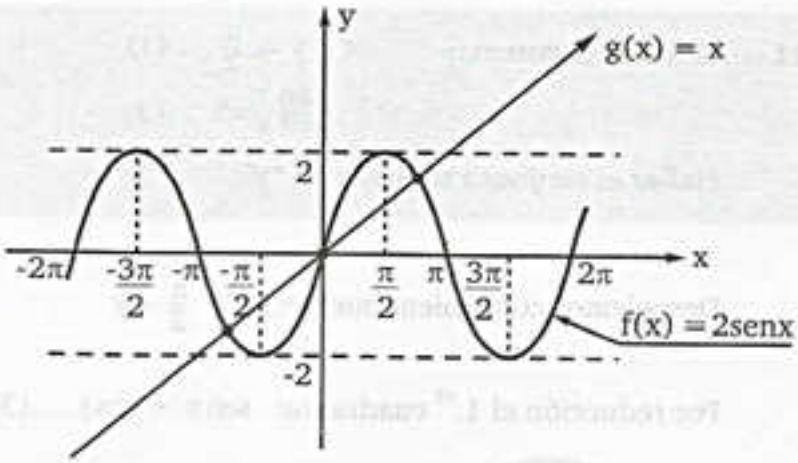
Sea: $f(x) = 2\operatorname{sen} x \wedge g(x) = x$

El número de soluciones de (*) serán el número de intersección entre las gráficas f y g.

team CALAPENSHKO



Así:




∴ **La ecuación (*) tiene tres soluciones.**

**PROBLEMA 20** Resolver trigonométricamente la ecuación:

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

**Resolución:** De la identidad de Arco triple tenemos:

$$\operatorname{sen} 3\theta = 3\operatorname{sen}\theta - 4\operatorname{sen}^3\theta$$

Entonces:

$$4\operatorname{sen}^3\theta - 3\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}3\theta = 0$$

Así:

$$\operatorname{sen}^3\theta - \frac{3}{4}\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen}3\theta = 0 \quad .....(1)$$

Asumiendo que: $x = a\operatorname{sen}\theta\ ;\ a > 0$

En la ecuación, tenemos:

$$a^3\operatorname{sen}^3\theta - 3a\operatorname{sen}\theta + 1 = 0$$

Así:

$$\operatorname{sen}^3\theta - \frac{3}{a^2}\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{a^3} = 0 \quad .....(2)$$

Si las ecuaciones (1) y (2) son idénticos, tenemos:

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow a = 2$$

$$\frac{1}{4}\operatorname{sen}3\theta = \frac{1}{a^3} \Rightarrow \frac{1}{4}\operatorname{sen}3\theta = \frac{1}{8} \Rightarrow \operatorname{sen}3\theta = \frac{1}{2} \quad .....\text{ETE}$$

$$\Rightarrow 3\theta = 180°k + (-1)^k 30°$$

$$\theta = 60°k + (-1)^k 10°\ ;\ k \in \mathbb{Z}$$

Tabulando:

$k = -1 \Rightarrow \theta_1 = -70°$
$k = 0 \Rightarrow \theta_2 = 10°$
$k = 1 \Rightarrow \theta_3 = 50°$

Los demás valores de k hacen que se repitan las soluciones.

∴ **Las soluciones de la ecuación inicial son:**
**-2 sen 70° ; 2 sen 10° ; 2 sen 50°**

**PROBLEMA 21** Resolver el sistema: $x - y = \frac{\pi}{2}$.....(1)

$\frac{\text{sen x}}{\text{sen y}} = 5$.....(2)

Hallar el conjunto solución de "y":

**Resolución:** Despejemos convenientemente: $x = \frac{\pi}{2} + y$

Por reducción el 1.er cuadrante: $\text{sen x} = \text{cos y}$.....(3)

Reemplazando (3) en (2): $\frac{\cos y}{\text{sen y}} = 5 \Rightarrow \tan y = \frac{1}{5}$

entonce el valor principal Vp= arc cot $\left(\frac{1}{5}\right)$

$$\therefore \mathbf{y = k\pi + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) \wedge x = k\pi + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{\pi}{2}; \forall k \in Z}$$

**PROBLEMA 22** Si: $\theta \in [0;\pi]$ , la suma de los valores de "θ" que satisfacen la ecuación.

Resolver: $\text{sen}^4\theta + \cos^4\theta + \sec^4\theta(1 - 2\text{sen}^2\theta) + \tan^2\theta(\tan^2\theta + 2\cos^4\theta) = 1 + \cos\theta$

**Resolución:** Desarrollando la condición

$$1 - 2\text{sen}^2\theta\cos^2\theta + \sec^4\theta - 2\sec^2\theta\tan^2\theta + \tan^4\theta + 2\text{sen}^2\theta\cos^2\theta = 1 + \cos\theta$$

$$\underbrace{\sec^4\theta - 2\sec^2\theta\tan^2\theta + \tan^4\theta}_{} = \cos\theta$$

$$\underbrace{\left(\sec^2\theta - \tan^2\theta\right)^2}_{1} = \cos\theta$$

Si: $\cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 0, 2\pi$

Dato: $\theta \in [0,\pi]$

$$\therefore \mathbf{\theta = 0}$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 23** Resolver: $\operatorname{sen} 2x + \tan x = 2; k \in Z$

**Resolución:** Nos piden, resolver: $\operatorname{sen} 2x + \tan x = 2$

Operando: $\tan x - 1 = 1 - 2 \operatorname{sen} x \cos x$

$$\frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\cos x} = (\operatorname{sen} x - \cos x)^2$$

Analizando: I) $\operatorname{sen} x - \cos = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \cos x \Rightarrow \tan x = 1$

$$\therefore x = k\pi + \frac{\pi}{4}; k \in Z$$

II) $\frac{1}{\cos x} = \operatorname{sen} x - \cos x \Rightarrow 1 = \operatorname{sen} x \cos x - \cos^2 x$

Multiplicando x 2 $\longrightarrow$ $2 = \operatorname{sen} 2x - 2\cos^2 x$

$2 = \operatorname{sen} 2x - (1 + \cos 2x)$

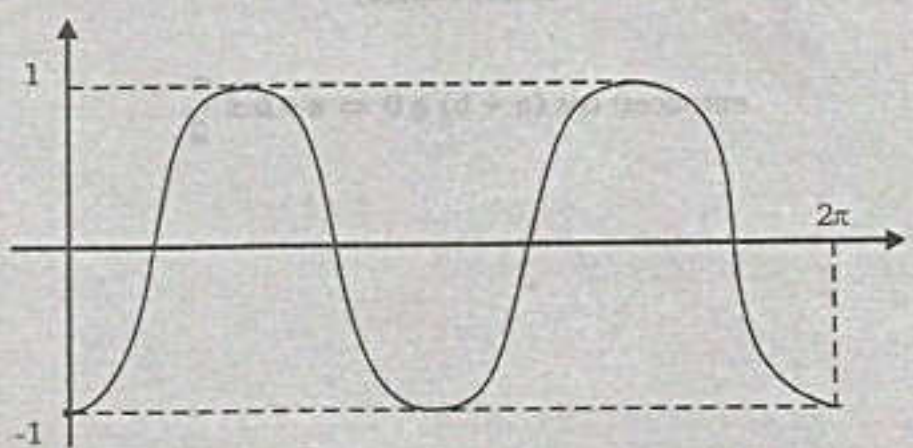
$3 = \operatorname{sen} 2x - \cos 2x$ ... No hay solución en los reales, ya que:

$$-\sqrt{2} \leq \operatorname{sen} 2x - \cos 2x \leq \sqrt{2}$$

$$\therefore x = k\pi + \frac{\pi}{4}; k \in Z$$

**PROBLEMA 24** Una computadora genera el gráfico adjunto según la función

$$y = \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x \;\; ; \;\; 0 \leq x \leq 2\pi$$




Determinar la suma de las abscisas de las intersecciones de esta curva con el eje "x".

team CALAPENSHKO


**Resolución:** Puntos de intersección con el eje de abscisas $y = 0$

Entonces: $\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x = 0$

$$2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

$$x = \begin{cases} n\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{9\pi}{4} \\ n\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}; \frac{11\pi}{4} \end{cases}$$

**Suma de abscisas:** $\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} = 4\pi$

**PROBLEMA 25** Si: $0 < a < \frac{\pi}{2}$ y $0 < b < \frac{\pi}{2}$, ¿Qué condición deben satisfacer a y b para que la ecuación: $x^2 \tan(a) - 2x = -\tan(b)$ presente raíces reales?

**Resolución:** La ecuación:

$$x^2 \tan(a) - 2x = -\tan(b)$$

tendrá raíces reales si: $\Delta \geq 0$

$$4 - 4\tan(a)\tan(b) \geq 0$$

$$1 - \frac{\operatorname{sen}(a)}{\cos(a)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(b)}{\cos(b)} \geq 0$$

$$\frac{\cos(a+b)}{\cos(a) \cdot \cos(b)} \geq 0 \text{ ; con el dato: } \cos a \cdot \cos b > 0$$

entonces: $\cos(a + b) \geq 0 \Rightarrow a + b \leq \frac{\pi}{2}$

team CALAPENSHKO



## PROBLEMAS PROPUESTOS

**1.** Siendo $V_p$ : valor principal.

Indicar verdadero (V) o falso (F) en cada proposición:

( ) Si: $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V_p = \frac{\pi}{3}$

( ) Si: $\cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow V_p = \frac{\pi}{4}$

( ) Si: $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{3} \Rightarrow V_p = \frac{\pi}{6}$

A) VVV B) VVF C) VFF
D) FFV E) FFF

**2.** Calcular la suma de las 3 primeras soluciones positivas de la ecuación.

$$\operatorname{sen} 5x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

A) 90° B) 100° C) 110°
D) 120° E) 130°

**3.** Calcular la suma de las tres primeras soluciones positivas de la ecuación:

$$\sqrt{2}\cos 3x = 1$$

A) 255° B) 305° C) 315°
D) 405° E) 450°

**4.** Hallar la solución principal de:

$$10\cos^2 x + 4 = 13\cos x$$

A) 15° B) 30° C) 37°
D) 45° E) 53°

**5.** Luego de resolver la ecuación:

$$\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x} + \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$$

Calcular la suma de soluciones positivas menores a 360°

A) 90° B) 180° C) 360°
D) 450° E) 720°

**6.** La solución principal de:

$$3 + 2\cos x = 4\cos\frac{x}{2}$$

es:

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{4}$
D) $\frac{2\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{3}$

**7.** Luego de resolver la ecuación:

$\cos^2 x + \tan^2 x + \csc^2 x = \operatorname{sen}^2 x + \cot^2 x + \sec^2 x$

Calcular la suma de soluciones positivas y menores a 360°.

A) 360° B) 450° C) 540°
D) 630° E) 720°

**8.** Dada la ecuación:

$$2\cos 80°\cos 4x = \sqrt{2} - 2\operatorname{sen} 4x\cos 10°$$

La suma de los valores de x entre 0° y 90° es igual a:

A) 22°30' B) 30° C) 40°
D) 80° E) 55°

**9.** Calcular la suma de soluciones de:

$$1 + \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} x + \cos x$$

en el intervalo de $[0; 4\pi]$

A) $3\pi$ B) $4\pi$ C) $10\pi$
D) $18\pi$ E) $9\pi$

**10.** Indicar el conjunto solución de la ecuación:

$$\tan 2x = \cot\frac{\pi}{3}$$

A) $n\pi + \frac{\pi}{12}; n \in \mathbb{Z}$ B) $2n\pi + \frac{\pi}{3}; n \in \mathbb{Z}$

C) $\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{12}; n \in \mathbb{Z}$

D) $\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{6}; n \in \mathbb{Z}$ E) $n\pi + \frac{\pi}{6}; n \in \mathbb{Z}$

**11.** Resolver:

$$\sec^2 x = \tan x + 1$$

A) $k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

B) $k\pi + \frac{\pi}{4};\ k \in \mathbb{Z}$

C) $k\pi + \frac{\pi}{3};\ k \in \mathbb{Z}$

D) A y B son soluciones

E) B y C son soluciones

**12.** Resolver la ecuación:

$$\text{sen}^3 x + \cos^3 x = \cos 2x$$

Un conjunto solución es:

A) $\frac{k\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}$

B) $\frac{2k\pi}{3};\ k \in \mathbb{Z}$

C) $k\pi + \frac{\pi}{4};\ k \in \mathbb{Z}$

D) $(4k-1)\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}$

E) $(2k-1)\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}$

**13.** Resolver:

$$\text{sen}\,x.\cos^5 x - \cos x.\text{sen}^5 x = 0{,}25.\text{sen}\frac{2\pi}{3}$$

A) $\frac{k\pi}{3};\ k \in \mathbb{Z}$

B) $\frac{k\pi}{4};\ k \in \mathbb{Z}$

C) $\frac{k\pi}{2} + (-1)^k \frac{\pi}{4};\ k \in \mathbb{Z}$

D) $\frac{k\pi}{2} + (-1)^k \frac{\pi}{3};\ k \in \mathbb{Z}$

E) $\frac{k\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{12};\ k \in \mathbb{Z}$

**14.** Resolver:

$$\tan x + \cot x = 4$$

A) $\{360°k + (-1)^k 60°\};\ k \in \mathbb{Z}$

B) $\{360°k + 60°\};\ k \in \mathbb{Z}$

C) $\{180°k + (-1)^k 30°\};\ k \in \mathbb{Z}$

D) $\{180°k + 30°\};\ k \in \mathbb{Z}$

E) $\{90°k + (-1)^k 15°\};\ k \in \mathbb{Z}$

**15.** Hallar el menor valor positivo de "x" en:

$$\text{sen}\,5x\,.\,\text{sen}\,3x = \text{sen}\,6x\,.\,\text{sen}\,2x$$

A) 10° B) 20° C) 30°
D) 60° E) 45°

**16.** Hallar el valor del ángulo menor de 90°, tal que el triple de su tangente, es igual al doble de su coseno.

A) 45° B) 60° C) 75°
D) 15° E) 30°

**17.** Resolver:

$$\tan x + \frac{\cos 3x}{\cos x} = \cot x - \frac{\text{sen}\,3x}{\text{sen}\,x}$$

Para "x" en $\langle -\pi; \pi \rangle$

A) $\left\{\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{6}\right\}$

B) $\left\{-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right\}$

C) $\left\{-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right\}$

D) $\left\{-\frac{11\pi}{12}; -\frac{7\pi}{12}; \frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}\right\}$

E) $\left\{-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right\}$

**18.** Resolver:

$$\sqrt{3}\,\text{sen}\,x - \cos x = \sqrt{3}$$

Indicar la suma de soluciones comprendidas entre 0° y 360°.

A) 180° B) 240° C) 270°
D) 300° E) 360°

team CALAPENSHKO


**19.** Resolver:

$$1 - \cos x = (2 - \cot x)\operatorname{sen} x$$

A) $\{180°k + 30°\}; k \in \mathbb{Z}$

B) $\{360°k + 30°\}; k \in \mathbb{Z}$

C) $\{360°k + (-1)^k 30°\}\ k \in \mathbb{Z}$

D) $\{360°k \pm 30°\}; k \in \mathbb{Z}$

E) $\{180°k + (-1)^k 30°\}; k \in \mathbb{Z}$

**20.** Sea la función:

$$f(x) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$$

Determinar la suma de valores de "x", para los cuales la gráfica de la función interseca al eje de abscisas en el intervalo de $[0; \pi]$

A) $\frac{2\pi}{3}$ B) $\pi$ C) $\frac{4\pi}{3}$

D) $\frac{3\pi}{2}$ E) $\frac{5\pi}{3}$

**21.** Hallar los valores de "x" e "y" que cumplen:

$$x + y = 90° \quad \text{..... (i)}$$
$$\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2y = 1 \quad \text{..... (ii)}$$

A) $x = 60°; y = 30°$
B) $x = 75°; y = 15°$
C) $x = 53°; y = 37°$
D) $x = 72°; y = 18°$
E) $x = 45°; y = 45°$

**22.** Con las condiciones; hallar el valor de "x":

$$\cos x \cos y = \frac{1}{4} \quad \text{..... (i)}$$

$$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = -\frac{1}{4} \quad \text{..... (ii)}$$

A) 15° B) 30° C) 45°
D) 60° E) 75°

**23.** De las condiciones:

$$x + y = \frac{2\pi}{3} \quad \text{..... (i)}$$
$$\cos x + \cos y = 1 \quad \text{..... (ii)}$$

Hallar el valor de: "x - y"

A) $\{k\pi\}; k \in \mathbb{Z}$

B) $\{2k\pi\}; k \in \mathbb{Z}$

C) $\{4k\pi\}; k \in \mathbb{Z}$

D) $\left\{\frac{k\pi}{2}\right\}; k \in \mathbb{Z}$

E) $\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}; k \in \mathbb{Z}$

**24.** Resolver el sistema: $(k \in \mathbb{Z})$

$$\begin{cases} \dfrac{1-\tan x}{1+\tan x} = \tan y \\ x - y = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

A) $\begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{24} \\ y = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{24} \end{cases}$ B) $\begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ y = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \end{cases}$

C) $\begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{12} \\ y = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$

D) $\begin{cases} x = k\pi + \frac{5\pi}{24} \\ y = k\pi + \frac{\pi}{12} \end{cases}$ E) $\begin{cases} x = k\pi + \frac{5\pi}{12} \\ y = k\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}$

**25** Resolver:

$$\sec x \sec 2x \operatorname{sen} 2x + \tan x \tan 2x \tan 3x = \sqrt{3}$$

A) $k\pi + \frac{\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}$ B) $k\pi + \frac{\pi}{6}; k \in \mathbb{Z}$

C) $\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{9}; k \in \mathbb{Z}$

D) $\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}; k \in \mathbb{Z}$ E) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}$

team CALAPENSHKO


**26.** Si "$x_0$" es la solución principal de la ecuación:

$\tan^2 2x + \tan^2 3x.\cot^2 2x.\tan^2 x = 2\tan x.\tan 3x$

Calcule el valor de:

$$E = \operatorname{sen} 2x_0 + \cos 6x_0$$

A) 0 B) 1 C) $\sqrt{2}$
D) $\sqrt{3}$ E) 2

**27.** Halle una solución de:
$\cos(x-a)\cos(x-b) = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b + \cos x \cos c$

A) a – b – c B) a + b – c
C) a + b + c
D) a + 2b + c E) 2(a + b + c)

**28.** Calcular la suma de los menores valores positivos de x y θ.

$$\sqrt{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + \operatorname{sen}^4 x - 1} = \cos 2\theta$$

A) π B) $\frac{3\pi}{2}$ C) $\frac{3\pi}{4}$
D) 2π E) $\frac{5\pi}{4}$

**29.** Cual de los siguientes valores de "x" que se indican a continuación, es una solución de la ecuación:

$$\cos x + \sec x = -2$$

A) 0° B) 90° C) 180°
D) 270° E) 360°

**30.** Resolver en el intervalo de $[0; 2\pi]$, la siguiente inecuación $|\cos x| < \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$

A) $\left\langle 0; \frac{\pi}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle$

B) $\left\langle \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle \pi; \frac{4\pi}{3} \right\rangle$

C) $\left\langle \frac{2\pi}{3}; \pi \right\rangle \cup \left\langle \pi; \frac{4\pi}{3} \right\rangle$

D) $\left\langle \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right\rangle$

E) $\left\langle 0; \frac{2\pi}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{4\pi}{3}; 2\pi \right\rangle$

**31.** Resolver:

$$\frac{\cos^4 x + \cos^2 x + 1}{\operatorname{sen}^4 x + \operatorname{sen}^2 x + 1} = 1$$

A) $\frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$

B) $2k\pi + \frac{\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}$

C) $k\pi + \frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}$

D) $(2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$

E) $(2k+1)\frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}$

**32.** Resolver la ecuación:

$$1 - \frac{2(\operatorname{sen} 2x - \cos 2x \,.\, \tan x)}{\sqrt{3}\sec^2 x} = \cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x$$

A) $\left\{k\pi + \frac{\pi}{3}\right\}; k \in \mathbb{Z}$ B) $\left\{\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right\}; k \in \mathbb{Z}$

C) $\left\{k\pi + \frac{\pi}{6}\right\}; k \in \mathbb{Z}$

D) $\left\{k\pi + \frac{\pi}{4}\right\}; k \in \mathbb{Z}$ E) $\left\{\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right\}; k \in \mathbb{Z}$

**33.** Hallar el conjunto solución para x en $[0; \pi]$; al resolver la siguiente ecuación:

$$\operatorname{sen} 3x - \cos 3x = \cos x - \operatorname{sen} x$$

A) $\left\{\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{8}\right\}$ B) $\left\{\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{8}\right\}$

C) $\left\{\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{8}\right\}$

D) $\left\{\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right\}$ E) $\left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right\}$

**34.** Resolver:

$$(\sqrt{3}+1)\operatorname{sen} x + (\sqrt{3}-1)\cos x = \sqrt{2}$$

A) 15° B) 135° C) 375°
D) 495° E) Todas son soluciones

team CALAPENSHKO


**35.** Un conjunto solución de la ecuación:

$$\text{sen}x \cdot \text{sen}3x = \text{sen}2x \cdot \text{sen}4x$$

es:

A) $\left\{\frac{k\pi}{8}\right\};\ k\in\mathbb{Z}$ B) $\left\{\frac{k\pi}{6}\right\};\ k\in\mathbb{Z}$

C) $\left\{\frac{k\pi}{5}\right\};\ k\in\mathbb{Z}$

D) $\left\{\frac{k\pi}{4}\right\};\ k\in\mathbb{Z}$ E) $\left\{\frac{k\pi}{3}\right\};\ k\in\mathbb{Z}$

**36.** Encontrar el menor valor del ángulo positivo que verifica la ecuación:

$$\frac{\cos^3 x+\cos^3 3x+\cos^3 9x}{\cos x+\cos 3x+\cos 9x}=1$$

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{7}$ C) $\frac{\pi}{8}$

D) $\frac{\pi}{12}$ E) $\frac{\pi}{14}$

**37.** Resolver la ecuación:

$$\text{sen}4x + 3\text{sen}2x = \tan x$$

A) $\frac{k\pi}{6};\ k\in\mathbb{Z}$ B) $\frac{k\pi}{3};\ k\in\mathbb{Z}$

C) $\frac{k\pi}{4};\ k\in\mathbb{Z}$

D) $\frac{k\pi}{8};\ k\in\mathbb{Z}$ E) $\frac{k\pi}{12};\ k\in\mathbb{Z}$

**38.** Si: $f(k)=\text{sen}^k x$

Resolver:

$$\sum_{i=0}^{n} f(2i)=\sum_{i=0}^{n} f(2i+1)$$

A) $\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\};\ k\in\mathbb{Z}$

B) $\left\{(2n-1)\frac{\pi}{2}\right\};\ k\in\mathbb{Z}$

C) $\left\{(4n+1)\frac{\pi}{2}\right\};\ k\in\mathbb{Z}$

D) $\left\{(4n-1)\frac{\pi}{2}\right\};\ k\in\mathbb{Z}$

E) $\left\{(n+1)\frac{\pi}{2}\right\};\ k\in\mathbb{Z}$

**39.** Hallar las soluciones principales de "x" e "y" en:

$$\tan x+\tan y=2 \quad \text{.....(i)}$$
$$2\cos x\cos y=1 \quad \text{.....(ii)}$$

A) 30°; 30° B) 45°; 45° C) 30°; 60°

D) 70°; 20° E) 53°; 37°

**40.** Resolver el sistema:

$$x+y=\frac{5\pi}{12} \quad \text{.....(i)}$$
$$\text{sen}^2 x+\text{sen}^2 y=\frac{3}{4} \quad \text{.....(ii)}$$

hallar las soluciones del primer cuadrante.

A) $\begin{cases} x=\frac{\pi}{4} \\ y=\frac{\pi}{6} \end{cases}$ B) $\begin{cases} x=\frac{\pi}{6} \\ y=\frac{\pi}{4} \end{cases}$

C) $\begin{cases} x=\frac{\pi}{3} \\ y=\frac{\pi}{12} \end{cases}$

D) $\begin{cases} x=\frac{\pi}{12} \\ y=\frac{\pi}{3} \end{cases}$ E) $\begin{cases} x=\frac{5\pi}{24} \\ y=\frac{5\pi}{24} \end{cases}$

**41.** Hallar la solución principal de la ecuación:

$$\sqrt{2+\tan x}+\sqrt{2-\tan x}=\sqrt{2}\tan x$$

A) $\frac{\pi}{12}$ B) $\frac{\pi}{10}$ C) $\frac{\pi}{8}$

D) $\frac{\pi}{6}$ E) $\frac{\pi}{3}$

**42.** Resolver la inecuación:

$$\frac{\text{sen}\,2x-2}{\cos 2x+3\cos x-1}>0$$

para x en $\langle 0;2\pi\rangle$

A) $\left\langle\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right\rangle$ B) $\left\langle\frac{\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right\rangle$ C) $\left\langle\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right\rangle$

D) $\left\langle\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right\rangle$ E) $\left\langle\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right\rangle$

team CALAPENSHKO


**43.** Resolver:

$$\text{sen}2x + \text{sen}x < \cos 2x + \cos x$$

para x en $\langle 0; \pi \rangle$

A) $\left\langle 0; \frac{\pi}{6} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{6}; \pi \right\rangle$

B) $\left\langle 0; \frac{\pi}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{2\pi}{3}; \pi \right\rangle$

C) $\left\langle 0; \frac{\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{4}; \pi \right\rangle$

D) $\left\langle 0; \frac{\pi}{6} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{6}; \pi \right\rangle$

E) $\left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\rangle$

**44.** Resolver:

$$\text{sen}x\,\text{sen}2x < \text{sen}3x\,\text{sen}4x$$

para $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$

A) $\left\langle 0; \frac{\pi}{5} \right\rangle$

B) $\left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$

C) $\left\langle 0; \frac{\pi}{4} \right\rangle$

D) $\left\langle 0; \frac{\pi}{5} \right\rangle \cup \left\langle \frac{2\pi}{5}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$

E) $\left\langle \frac{\pi}{5}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$

**45.** En el intervalo $[0; 2\pi\rangle$, ¿para que valores de "$\phi$" se cumple la siguiente inecuación?

$$\sec\phi > \tan\phi$$

A) $\left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle$

B) $\left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right\rangle$

C) $\left\langle 0; \frac{\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle$

D) $\left[ 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right\rangle$

E) $\left[ 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle \pi; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$

**46.** ¿Qué valor de x verifica la ecuación:

$\tan x = \tan 50° + \tan 60° + \tan 70°$

A) 80° B) 90° C) 100°
D) 110° E) 120°

**47.** Resolver la inecuación: $\text{sen}\,x > \cos 2x$
En el intervalo de $[0; 2\pi]$

A) $\left[ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right]$ B) $\left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\rangle$ C) $\left[ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\rangle$

D) $\left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right]$ E) $\left[ \frac{\pi}{6}; \frac{4\pi}{6} \right]$

**48.** Considerando las funciones:

$$f(x) = \text{sen}\,x$$

$$g(x) = \cos^2 x$$

Que relación hay entre f(x) y g(x) en el siguiente conjunto.

$$\left\langle 2k\pi + \arcsen\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right); (2k+1)\pi - \arcsen\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \right\rangle$$

$(k \in \mathbb{Z})$

A) $f(x) < g(x)$ B) $f(x) = g(x)$
C) $f(x) > g(x)$
D) $f(x) \leq g(x)$ E) $f(x) \geq g(x)$

**49.** Hallar el número de soluciones de la ecuación:

$$\left|\cos\frac{x}{2} + \text{sen}\frac{x}{2}\right| \left|\cos\frac{x}{2} - \text{sen}\frac{x}{2}\right| = \left|x + \sqrt{2}\right| \left|x - \sqrt{2}\right|$$

A) $-4$ B) $-2$ C) 0
D) 2 E) 4

**50.** ¿Cual es el conjunto solución de:

$x^3 - 3x - 1 = 0$?

Sugerencia: Usar la identidad:

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

A) $\cos 20°; \cos 100°; \cos 140°$
B) $\cos 40°; \cos 120°; \cos 160°$
C) $3\cos 20°;\ 3\cos 100°;\ 3\cos 140°$
D) $2\cos 40°; 2\cos 120°;\ 2\cos 160°$
E) $2\cos 20°; 2\cos 100°; 2\cos 140°$

twitter.com/calapenshko

**A todo el público en general:**

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

**Este libro no debe ser prostituito monetariamente**, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

**28 de agosto del 2020**

team CALAPENSHKO

Capítulo 15

# Resolución de Figuras Geométricas

**OBJETIVOS**

- Enunciar y aplicar la TEOREMA de senos, cosenos y tangente en la resolución de triángulo oblicuángulos.
- Conocer las relaciones más importantes que permitan hallar el área de regiones triangulares.
- Determinar las medidas de los elementos de un triángulo oblicuángulo.

## ABU´L WAFA Y LAS TABLAS ÁRABES TRIGONOMÉTRICAS

Su contribución a las matemáticas esta enfocado principalmente en el campo de la trigonometría.

Abul'-Wafa introdujo la función tangente y mejoró métodos de calcular las tablas de la trigonometría, ideó un método nuevo de calcular las tablas del seno. Sus tablas trigonométricas son exactas a 8 lugares decimales. y desarrolló maneras de solucionar algunos problemas de triángulos esféricos.

ABU'L WAFA
MATEMÁTICO ÁRABE

Entre 961 y 976 escribió al-kuttab del ilayh del yahtaj de Kitab fi mA el 'al-hisab mínimo wa'l-ummal del ilm (Libro el cuál es necesario para la ciencia de la aritmética para los escribanos y los hombres de negocios). En la introducción a este libro Abu'l-Wafa escribe que el Libro:

Abarca todo lo que un experimentado o un principiante, el subordinado o el jefe necesita saber en aritmética, el arte de funcionarios, el empleo de impuestos de tierra y todas las clases de negocio necesitadas en la administración, las proporciones, la multiplicación, la división, las medidas, los impuestos de tierra, la distribución, el intercambio y el resto de las prácticas usados por varias categorías de los hombres para hacer negocio y que sean útiles en su vida cotidiana.

Este trabajo trata sobre aritmética de conteo con los dedos, un sistema de numeración usado en el Imperio islámico en paralelo por mucho tiempo con el sistema de numeración Hindú, y en donde los números se escriben con palabras y los cálculos se hacen mentalmente.

El trabajo está en siete porciones, cada parte que contiene siete capítulos
Parte I: En cociente ( fracciones "capitales" del 1/2, de 1/3, de 1/4,..., 1/10).
Parte II: En la multiplicación y la división (operaciones aritméticas con números enteros y fracciones).
Parte III: Mensuración (área de figuras, del volumen de sólidos y de distancias el encontrar).
Parte IV: En los impuestos (diversas clases de impuestos y problemas de los cálculos del impuesto).
Parte V: En intercambio y partes (tipos de cosechas, y problemas referentes su valor e intercambio).
Parte VI: Asuntos misceláneos (unidades del dinero, pago de soldados, el conceder y retención de los permisos para las naves en el río, comerciantes en los caminos).
Parte VII: Asuntos más futuros del negocio.

## INTRODUCCIÓN

Se aprendió en el capitulo 3 como se resuelve un triángulo rectángulo. ¿Pero se puede resolver un triángulo oblicuángulo, es decir, uno sin ángulo que mide 90°?. Una ayuda valiosa es la TEOREMA de senos y cosenos; es válida para cualquier triángulo, pero inicialmente se establecerá para el caso donde todos los ángulos son agudos.

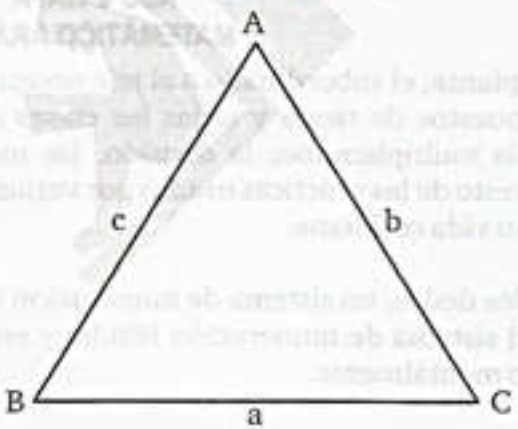
Recordemos, que un triángulo oblicuángulo, es cualquier triángulo que no contiene un ángulo recto. Todos los problemas y ejemplos de este capítulo están basados en la nomenclatura del modelo de triángulo oblicuángulo, necesitaremos por lo menos tres datos del triángulo oblicuángulo para poder resolverlo. Las posibilidades son las siguientes:

CASO 1: Dados un lado y dos ángulos.
CASO 2: Dados un ángulo, el lado opuesto y cualquiera de los otros dos lados.
CASO 3: Dados dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.
CASO 4: Conocidos los tres lados.

# RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

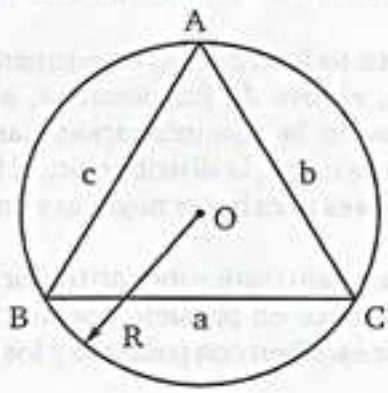
## 1. TEOREMA DE SENOS

En todo triángulo la longitud de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.




$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

**Con el Circunradio**



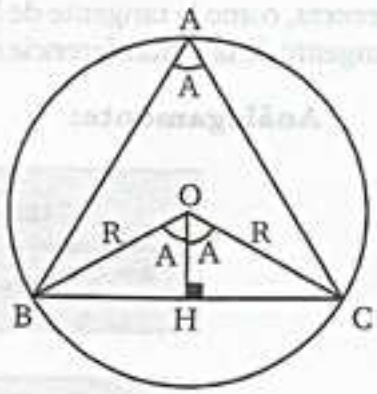

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R$$

También:

$$a = 2R \operatorname{sen} A$$
$$b = 2R \operatorname{sen} B$$
$$c = 2R \operatorname{sen} C$$

team CALAPENSHKO


**Demostración:**




En el $\triangle BOC$:

$$BH = HC = R\,sen A$$

$$\Rightarrow a = BC = 2R\,sen A$$

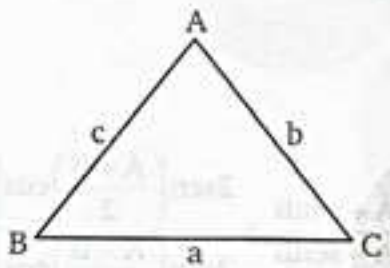
$$\Rightarrow \frac{a}{sen A} = 2R$$

Análogamente con el lado b y c, se concluye:

$$\frac{a}{sen A} = \frac{b}{sen B} = \frac{c}{sen C}$$

## 2. TEOREMA DE COSENOS

El cuadrado de cualquier lado de un triángulo, es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble de su producto por el valor del coseno del ángulo comprendido entre ellos.



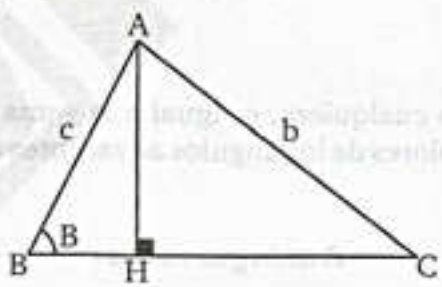

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

**Análogamente:**

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

**Demostración:**




Trazamos $AH \perp BC$

$$\rightarrow AH = c\,sen B$$

$$BH = c\cos B$$

$$\rightarrow HC = a - c\cos B$$

En el $\triangle AHC$: Teorema de Pitágoras:

$$b^2 = AH^2 + HC^2$$

$$\rightarrow b^2 = (c\,sen B)^2 + (a - c\cos B)^2$$

$$\rightarrow b^2 = c^2 sen^2 B + a^2 - 2ac\cos B + c^2\cos^2 B$$

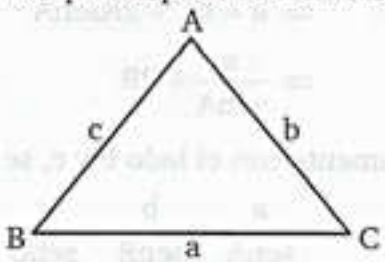
$$\rightarrow b^2 = c^2(sen^2 B + \cos^2 B) + a^2 - 2ac\cos B$$

$$\rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos b$$

La demostración es análoga con los demás lados.

## 3. TEOREMA DE TANGENTES

Se cumple que la suma de dos lados es a su diferencia, como la tangente de la semisuma de los valores de los ángulos que se oponen a dichos lados, es a la tangente de la semidiferencia de los mismos.




$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

**Análogamente:**

$$\frac{a+c}{a-c}=\frac{\tan\frac{A+C}{2}}{\tan\frac{A-C}{2}}$$

$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}}$$

**Demostración:** Sabemos que:

$$a = 2RsenA$$

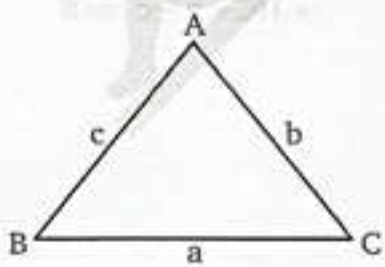
$$b = 2RsenB$$

$$\rightarrow \frac{a+b}{a-b}=\frac{2RsenA+2RsenB}{2RsenA-2RsenB}=\frac{senA+senB}{senA-senB}=\frac{2sen\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}{2sen\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

$$\rightarrow \frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

## 4. TEOREMA DE PROYECCIONES

En todo triángulo se cumple, que un lado cualquiera, es igual a la suma de sus otros dos lados, multiplicados cada uno por los cosenos de los valores de los ángulos adyacentes a dicho lado.




$$a = b\cos C + c\cos B$$

**Análogamente:**

$$b = a\cos C + c\cos A$$

$$c = a\cos B + b\cos A$$

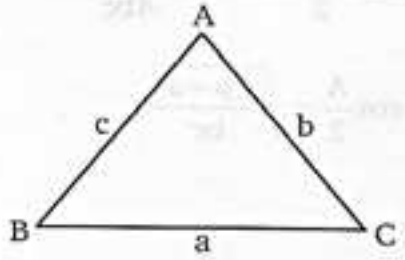
## R T DE LOS SEMIÁNGULOS DE UN TRIÁNGULO

En el caso que se conozca los tres lados de un triángulo y se desee hallar las R T de los valores de los semiángulos internos de dicho triángulo, usaremos la siguiente fórmula.

team CALAPENSHKO



## 1. SENO




$$\operatorname{sen}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

**Análogamente:**

$$\operatorname{sen}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$$

$$\operatorname{sen}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

p : Semiperímetro $\rightarrow p=\dfrac{a+b+c}{2}$

**Demostración:** A partir del teorema de cosenos

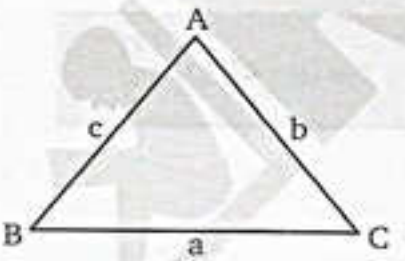
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\left(1-2\operatorname{sen}^2\frac{A}{2}\right) \rightarrow a^2=b^2+c^2-2bc+4bc\operatorname{sen}^2\frac{A}{2}$$

$$\rightarrow a^2-(b-c)^2=4bc\operatorname{sen}^2\frac{A}{2} \rightarrow \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}=\operatorname{sen}^2\frac{A}{2}$$

$$\rightarrow \frac{(2p-2c)(2p-2b)}{4bc}=\operatorname{sen}^2\frac{A}{2} \quad \therefore \quad \operatorname{sen}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

## 2. COSENO




$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

**Análogamente:**

$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$$

$$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

p : Semiperímetro $\rightarrow p=\dfrac{a+b+c}{2}$

**Demostración:** A partir del teorema de cosenos

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\left(2\cos^2\frac{A}{2}-1\right) \rightarrow a^2=b^2+c^2+2bc-4bc\cos^2\frac{A}{2}$$

$$\rightarrow 4bc\cos^2\frac{A}{2} = (b+c)^2 - a^2 \qquad \rightarrow \cos^2\frac{A}{2} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}$$

$$\rightarrow \cos^2\frac{A}{2} = \frac{(2p)(2p-2a)}{4bc} \qquad \therefore \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

### 3. TANGENTE

Como:

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$\boxed{\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}}$$

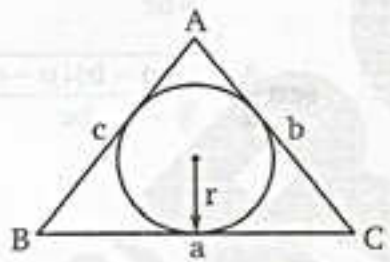
**Análogamente:**

$$\boxed{\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}}$$

$$\boxed{\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}}$$

## HALLANDO LAS MEDIDAS DE ELEMENTOS INTERIORES DE UN TRIÁNGULO

### 1. INRADIO




$$\boxed{r = (p-a)\tan\frac{A}{2}}$$

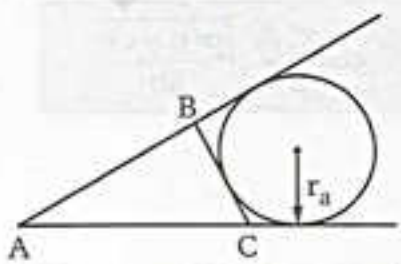
**Análogamente:**

$$\boxed{r = (p-b)\tan\frac{B}{2}}$$

$$\boxed{r = (p-c) = \tan\frac{C}{2}}$$

p : Semiperímetro $\rightarrow p = \dfrac{a+b+c}{2}$

### 2. EXRADIO




$$\boxed{r_a = p \,.\, \tan\frac{A}{2}}$$

**Análogamente:**

$$\boxed{r_b = p \,.\, \tan\frac{B}{2}}$$

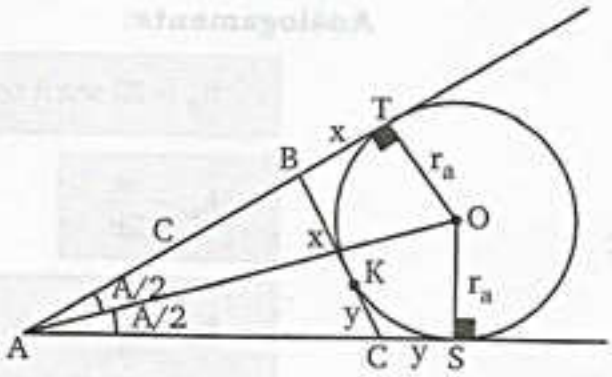
$$\boxed{r_c = p \,.\, \tan\frac{C}{2}}$$

p : Semiperímetro $\rightarrow p = \dfrac{a+b+c}{2}$

team CALAPENSHKO



**Demostración:**




Sean K, T y S puntos de tangencia.

Del gráfico: x+y=a y c+x=b+y

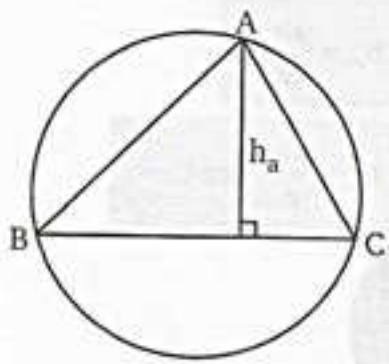
$$\rightarrow x = \frac{a+b-c}{2} = \frac{2p-2c}{2} = p-c$$

En el $\triangle$OTA:

$$r_a = (c+x)\tan\frac{A}{2}$$

$$\rightarrow r_a = p \times \tan\frac{A}{2}$$

## 3. ALTURA



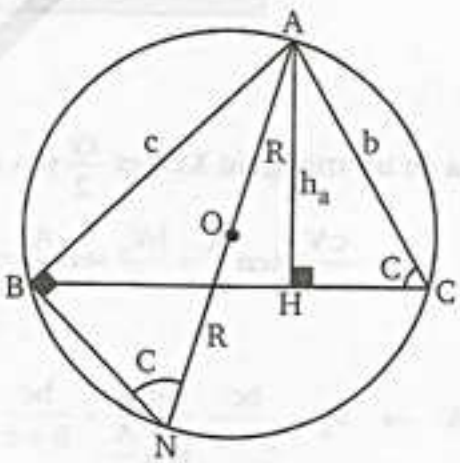

**Análogamente:**

$$h_b = \frac{b \,.\, senA \,.\, senC}{senB}$$

$$h_a = \frac{a \,.\, senB \,.\, senC}{senA}$$

$$h_c = \frac{c \,.\, senA \,.\, senB}{senC}$$

**Demostración:**




$\triangle$ABN – $\triangle$AHC

$$\rightarrow senC = \frac{c}{2R} = \frac{h_a}{b}$$

$$\rightarrow \boxed{h_a = \frac{bc}{2R}}$$

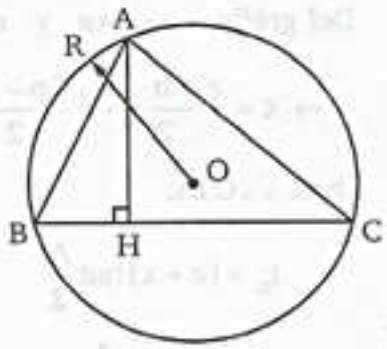
$$\rightarrow h_a = \frac{(2RsenB)(2RsenC)}{2R}$$

$$\rightarrow \boxed{h_a = 2RsenBsenC}$$

$$\rightarrow h_a = \frac{(2RsenA)senBsenC}{senA}$$

$$\rightarrow \boxed{h_a = \frac{asenBsenC}{senA}}$$

- **OTRAS FÓRMULAS**




$AH = h_a$

**Análogamente:**

$$h_b = 2R\,\text{sen}\,A\,\text{sen}\,C$$

$$h_b = \frac{ac}{2R}$$

$$h_b = \frac{ac}{b}\,.\,\text{sen}\,B$$

$$h_a = 2R\,\text{sen}\,B\,\text{sen}\,C$$

$$h_a = \frac{bc}{2R}$$

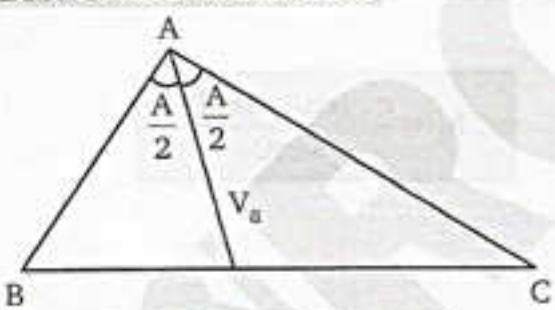
$$h_a = \frac{bc}{a}\,.\,\text{sen}\,A$$

$$h_c = 2R\,\text{sen}\,A\,\text{sen}\,B$$

$$h_c = \frac{ab}{2R}$$

$$h_c = \frac{ab}{c}\,.\,\text{sen}\,C$$

## 4. BISECTRIZ INTERIOR




**Análogamente:**

$$V_b = \frac{2ac}{a+c}\,.\,\cos\frac{B}{2}$$

$$V_a = \frac{2bc}{b+c}\,.\,\cos\frac{A}{2}$$

$$V_c = \frac{2ab}{a+b}\,.\,\cos\frac{C}{2}$$

**Demostración:**

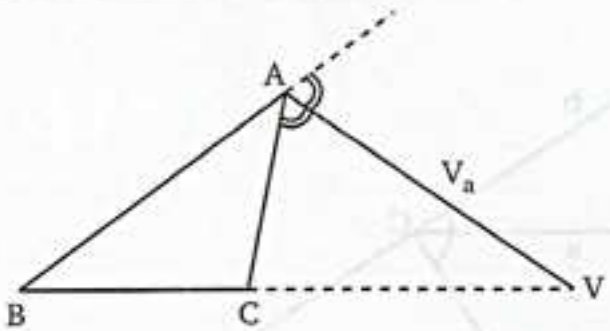
Posteriormente se demostrará que el área de un triángulo XYZ es $\frac{xy}{2}\text{sen}\,Z$

Además: $A_{BAV} + A_{CAV} = A_{ABC} \rightarrow \frac{c\,V_a}{2}\text{sen}\frac{A}{2} + \frac{b\,V_a}{2}\text{sen}\frac{A}{2} = \frac{bc}{2}\text{sen}A$

$$\frac{V_a}{2}(b+c)\text{sen}\frac{A}{2} = \frac{bc}{2}\text{sen}A \rightarrow V_a = \frac{bc}{b+c}\,\frac{\text{sen}A}{\text{sen}\frac{A}{2}} = \frac{bc}{b+c}\,\frac{2\text{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\text{sen}\frac{A}{2}}$$

$$\therefore\ V_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$$

## 5. BISECTRIZ EXTERIOR




$$V_a = \frac{2bc}{|b-c|} \cdot \operatorname{sen}\frac{A}{2}$$

**Análogamente:**

$$V_b \frac{2ac}{|a-c|} \cdot \operatorname{sen}\frac{B}{2}$$

$$V_c = \frac{2ab}{|a-b|} \cdot \operatorname{sen}\frac{C}{2}$$

**Demostración:** $(c > b)$

$$A_{ABC} = A_{BAV} - A_{ACV}$$

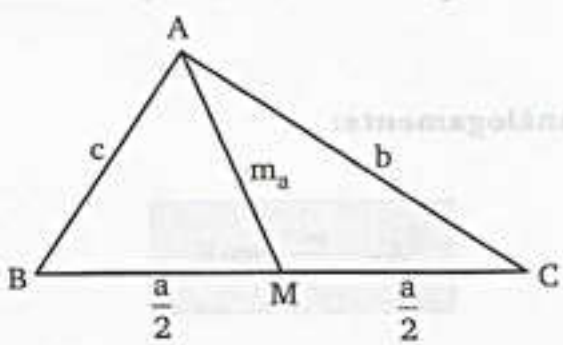
$$\frac{bc}{2}\operatorname{sen}A = \frac{c\,V_a}{2}\operatorname{sen}\left(90° + \frac{A}{2}\right) - \frac{bV_a}{2}\operatorname{sen}\left(90° - \frac{A}{2}\right)$$

$$\frac{bc}{2}\operatorname{sen}A = \frac{c\,V_a}{2}\cos\left(\frac{A}{2}\right) - \frac{b\,V_a}{2}\cos\left(\frac{A}{2}\right)$$

$$\rightarrow V_a = \frac{bc}{c-b}\,\frac{\operatorname{sen}A}{\cos\left(\frac{A}{2}\right)} = \frac{bc}{c-b}\,\frac{2\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cancel{\cos\frac{A}{2}}}{\cancel{\cos\frac{A}{2}}}$$

$$\therefore\ V_a = \frac{2bc}{c-b}\operatorname{sen}\frac{A}{2}$$

## 6. MEDIANA




$$4m_a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos A$$

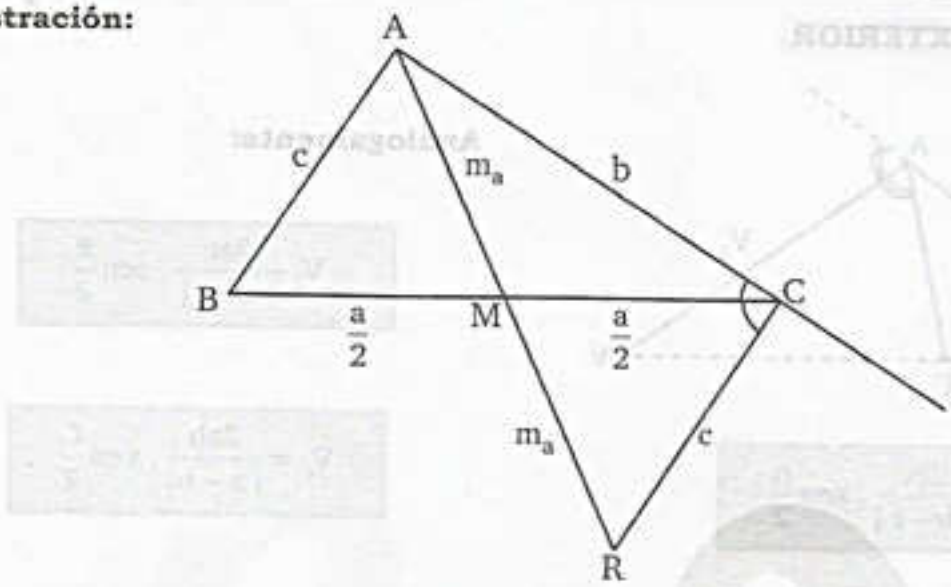
**Análogamente:**

$$4m_b^2 = a^2 + c^2 + 2ac \cdot \cos B$$

$$4m_c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos C$$

team CALAPENSHKO


**Demostración:**




Prolongamos AM y lo intersectamos con la paralela a AB trazada por c.

$$\angle RCA = 180° - A$$

Debido a que BM=MC y AB//RC se forma el paralelogramo BACR

En el Δ ACR: Aplicamos el Teorema de cosenos

$$(2ma)^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(180° - A)$$

$$\therefore \quad 4m_a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$$

## ÁREA DE LA REGIÓN TRIANGULAR ($A_T$)

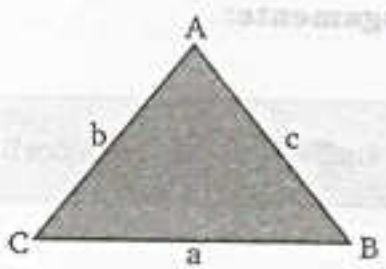
La reunión de un triángulo y su interior recibe el nombre de región triangular.

## POSTULADO

A cada región poligonal hay asociado un número real positivo, este número lo denotamos con $A_T$ y lo llamamos área de la región

## 1. $A_T$ EN FUNCIÓN DE DOS LADOS Y DEL VALOR DEL ÁNGULO COMPRENDIDO

El área de la región triangular es igual al semiproducto de dos lados multiplicados a su vez por el seno del ángulo comprendido.




$$A_T = \frac{bc}{2} \cdot \operatorname{sen} A$$

**Análogamente:**

$$A_T = \frac{ac}{2} \cdot \operatorname{sen} B$$

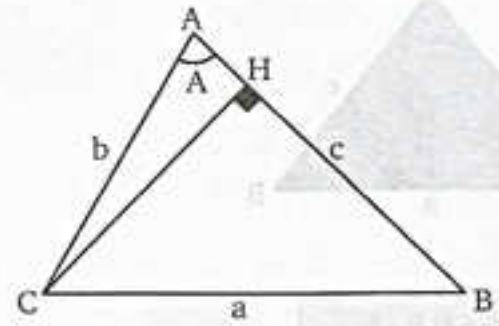
$$A_T = \frac{ab}{2} \cdot \operatorname{sen} C$$

team CALAPENSHKO



**Demostración:**

Trazamos la altura CH



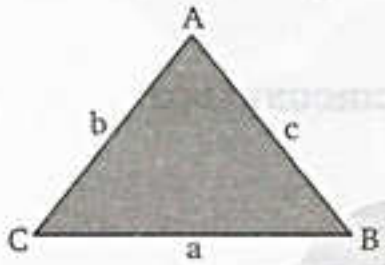

En el $\triangle$ AHC:

$\rightarrow CH = b\,sen A$

$\rightarrow A_T = \frac{CH.C}{2} = \frac{b\,sen A.C}{2}$

$\rightarrow A_T = \frac{bc}{2}.sen A$

## 2. $A_T$ EN FUNCIÓN DE LOS TRES LADOS




(Fórmula de Herón)

$$A_T = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

P : Semiperímetro $\rightarrow P = \frac{a+b+c}{2}$

$$A_T = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

**DEMOSTRACIÓN:** $2P = a + b + c$

De los anteriores teoremas tenemos:

$$sen\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(P-b)(P-c)}{bc}} \quad y \quad cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{F(p-a)}{bc}}$$

Multiplicando:

$$sen\frac{A}{2}cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{P(P-a)(P-b)(P-c)}{b^2c^2}}$$

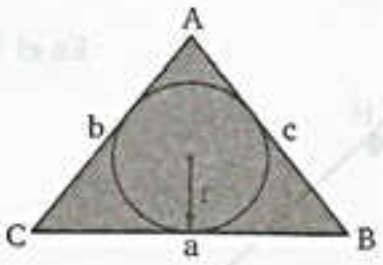
$$\rightarrow \frac{2}{2}bc\,sen\frac{A}{2}cos\frac{A}{2} = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

$$\rightarrow \frac{bc}{2}senA = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

$$\therefore A_T = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

team CALAPENSHKO

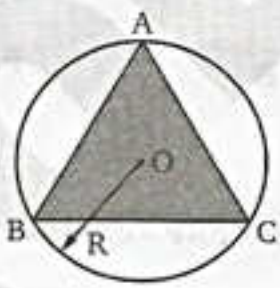

## 3. $A_T$ EN FUNCIÓN DEL SEMIPERÍMETRO Y EL INRADIO




$$A_T = p \cdot r$$

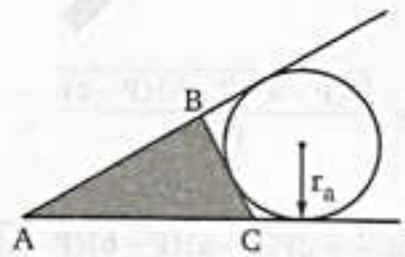
p : Semiperímetro $\rightarrow p = \dfrac{a+b+c}{2}$

## 4. $A_T$ EN FUNCIÓN DE LOS TRES LADOS Y EL CIRCUNRADIO




$$A_T = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

## 5. $A_T$ EN FUNCIÓN DEL SEMIPERÍMETRO Y EL EXRADIO RELATIVO A UN LADO




**Análogamente:**

$$A_T = (p-a)r_a$$

$$A_T = (p-b)r_b$$

$$A_T = (p-c)r_c$$

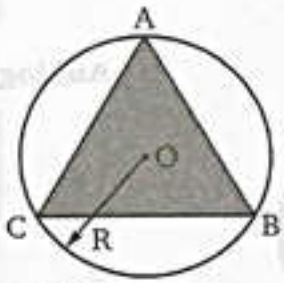
p : Semiperímetro $\rightarrow p = \dfrac{a+b+c}{2}$

team CALAPENSHKO


## 6. $A_T$ EN FUNCIÓN DEL INRADIO Y LOS EXRADIOS

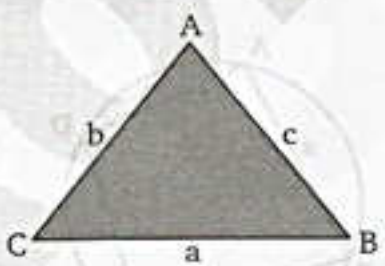
$$A_T = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$$

## 7. $A_T$ EN FUNCIÓN DEL VALOR DE LOS ÁNGULOS Y EL CIRCUNRADIO




$$A_T = 2R^2 \cdot \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B \cdot \operatorname{sen} C$$

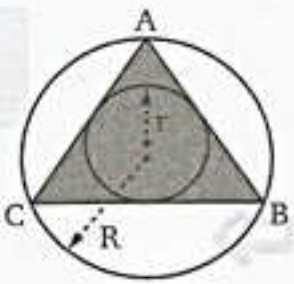
## 8. $A_T$ EN FUNCIÓN DEL VALOR DE LOS ÁNGULOS Y EL SEMIPERÍMETRO




$$A_T = P^2 \cdot \tan\frac{A}{2} \cdot \tan\frac{B}{2} \cdot \tan\frac{C}{2}$$

$$P: \text{Semiperímetro} \rightarrow P = \frac{a+b+c}{2}$$

## 9. $A_T$ EN FUNCIÓN DEL VALOR DE LOS ÁNGULOS, EL CIRCUNRADIO Y EL INRADIO

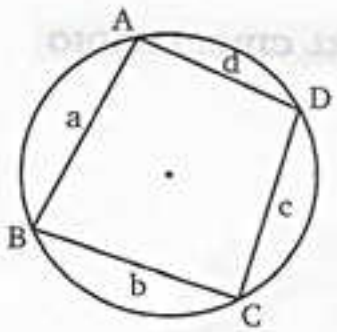



$$A_T = 4Rr \cdot \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2}$$

team CALAPENSHKO


# RESOLUCIÓN DE CUADRILÁTEROS

## TEOREMA DE COSENOS PARA UN CUADRILÁTERO INSCRIPTIBLE




Como: $A+C=180^\circ \rightarrow \cos C=-\cos A$

$$\therefore \quad \cos C=\frac{b^2+c^2-a^2-d^2}{2(ad+bc)}$$

**Análogamente:**

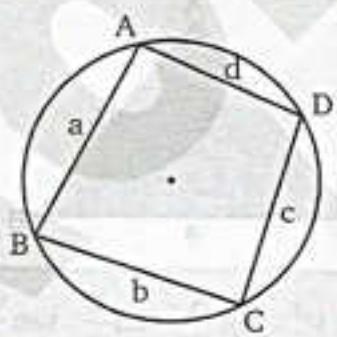
$$\cos B=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$

Como: $B+D=180^\circ \rightarrow \cos D=-\cos B$

$$\cos A=\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)} \qquad \therefore \quad \cos D=\frac{c^2+d^2-a^2-b^2}{2(ab+cd)}$$

## R T DEL VALOR DE LOS SEMIÁNGULOS INTERNOS DE UN CUADRILÁTERO INSCRIPTIBLE

### I. SENO Y COSENO




P: Semiperímetro $\rightarrow P=\dfrac{a+b+c+d}{2}$

**1.** $$\operatorname{sen}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(P-a)(P-d)}{ad+bc}}$$

Como: $\dfrac{A}{2}+\dfrac{C}{2}=90^\circ \rightarrow \operatorname{sen}\dfrac{A}{2}=\cos\dfrac{C}{2}$

$$\therefore \quad \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(P-a)(P-d)}{ad+bc}}$$

**2.** $$\operatorname{sen}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(P-a)(P-d)}{ab+cd}}$$

Como: $\dfrac{B}{2}+\dfrac{D}{2}=90^\circ \rightarrow \operatorname{sen}\dfrac{B}{2}=\cos\dfrac{D}{2}$

$$\therefore \quad \cos\frac{D}{2}=\sqrt{\frac{(P-a)(P-d)}{ab+cd}}$$

team CALAPENSHKO


**3.** $\operatorname{sen}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(P-b)(P-c)}{ad+bc}}$ ⇨ Como: $\frac{C}{2}+\frac{A}{2}=90° \rightarrow \operatorname{sen}\frac{C}{2}=\cos\frac{A}{2}$

$$\therefore \quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(P-b)(P-c)}{ad+bc}}$$

**4.** $\operatorname{sen}\frac{D}{2}=\sqrt{\frac{(P-c)(P-d)}{ab+cd}}$ ⇨ Como: $\frac{D}{2}+\frac{B}{2}=90° \rightarrow \operatorname{sen}\frac{D}{2}=\cos\frac{B}{2}$

$$\therefore \quad \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(P-c)(P-d)}{ab+cd}}$$

## II. TANGENTE

**1.** Como: $\tan\frac{A}{2}=\frac{\operatorname{sen}\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$ ⇨ $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(P-a)(P-d)}{(P-b)(P-c)}}$

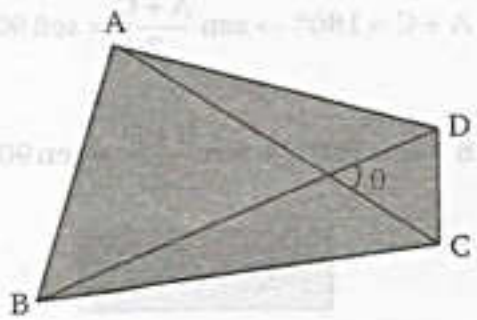
**2.** Como: $\tan\frac{B}{2}=\frac{\operatorname{sen}\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$ ⇨ $\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(P-a)(P-b)}{(P-c)(P-d)}}$

**3.** Como: $\tan\frac{C}{2}=\frac{\operatorname{sen}\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$ ⇨ $\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(P-b)(P-c)}{(P-a)(P-d)}}$

**4.** Como: $\tan\frac{D}{2}=\frac{\operatorname{sen}\frac{D}{2}}{\cos\frac{D}{2}}$ ⇨ $\tan\frac{D}{2}=\sqrt{\frac{(P-c)(P-d)}{(P-a)(P-b)}}$

## ÁREA DE LA REGIÓN CUADRANGULAR ($A_C$)

### 1. EN FUNCIÓN DE SUS DIAGONALES Y DEL VALOR DEL ÁNGULO COMPRENDIDO



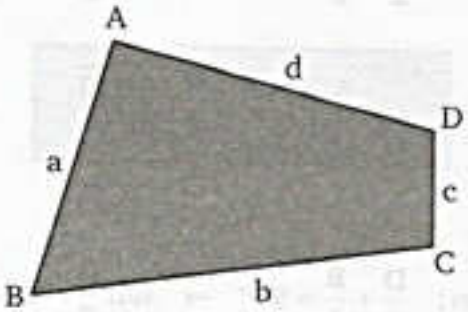

$AC = d_1$

$BD = d_2$

$$A_C=\frac{d_1 \cdot d_2}{2}\cdot \operatorname{sen}\theta$$

team CALAPENSHKO


## 2. EN FUNCIÓN DE SUS CUATRO LADOS Y DEL VALOR DE DOS ÁNGULOS OPUESTOS



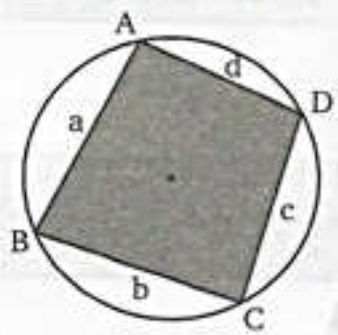

$$A_C = \sqrt{(P-a)(P-b)(P-c)(P-d) - abcd\cos^2\frac{A+C}{2}}$$

ó

$$A_C = \sqrt{(P-a)(P-b)(P-c)(P-d) - abcd\cos^2\frac{B+D}{2}}$$

$$P: \text{Semiperímetro} \rightarrow P = \frac{a+b+c+d}{2}$$

## 3. INSCRIPTIBLE



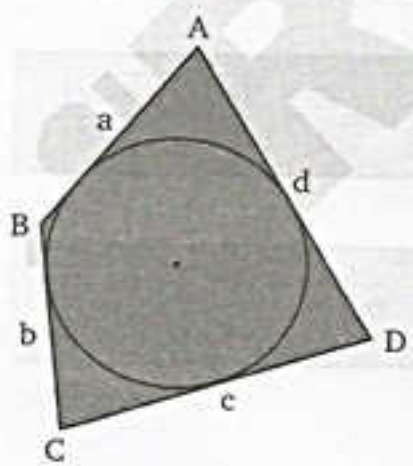

$$A + C = 180° \rightarrow \cos\frac{A+C}{2} = \cos 90° = 0$$

$$B + D = 180° \rightarrow \cos\frac{B+D}{2} = \cos 90° = 0$$

$$A_C = \sqrt{(P-a)(P-b)(P-c)(P-d)}$$

**FÓRMULA DE BRAMAGUPTHA**

## 4. CIRCUNSCRIPTIBLE

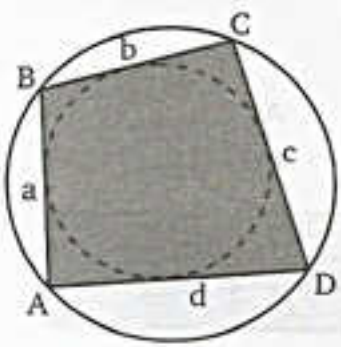



$$A_C = \sqrt{abcd}\ .\ \text{sen}\frac{A+C}{2}$$

ó

$$A_C = \sqrt{abcd}\ .\ \text{sen}\frac{B+D}{2}$$

## 5. INSCRIPTIBLE Y CIRCUNSCRIPTIBLE A LA VEZ (BICÉNTRICO)




$$A + C = 180° \rightarrow \text{sen}\frac{A+C}{2} = \text{sen}\,90° = 1$$

$$B + D = 180° \rightarrow \text{sen}\frac{B+D}{2} = \text{sen}\,90° = 1$$

$$A_C = \sqrt{abcd}$$

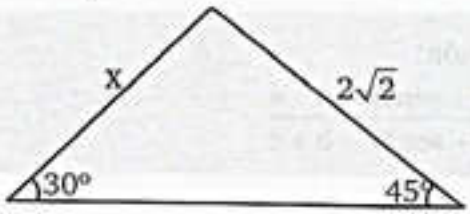
team CALAPENSHKO



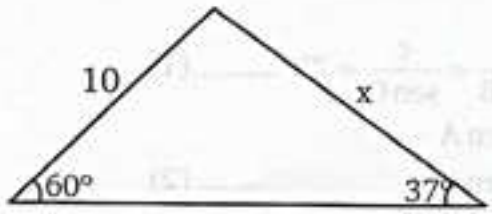
## EJERCICIOS DE APLICACIÓN

**1.** Hallar la longitud de "x".

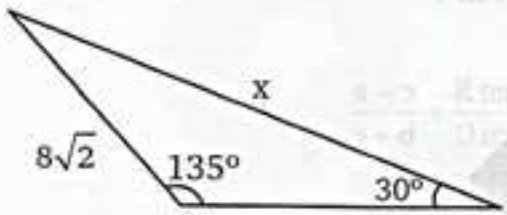
a)




b)



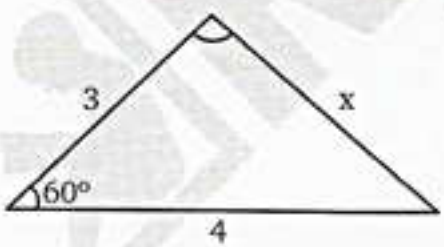

c)



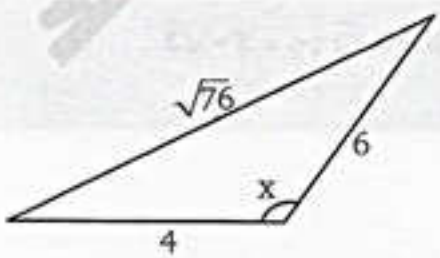

d)

**2.** Hallar la longitud "x".

a)




b)



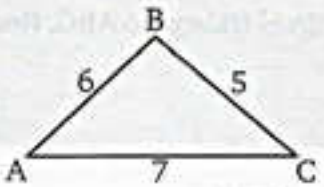

**3.** Completar: En un triángulo ABC

a = b cos C + c .....

b = a ..... + c .....

c = a ..... + b .....

**4.** En el triángulo calcular:

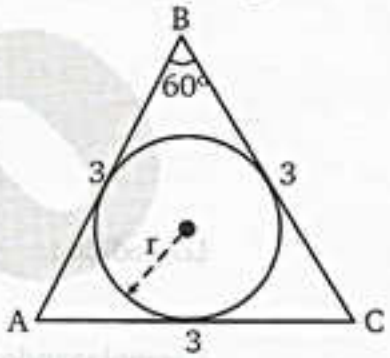


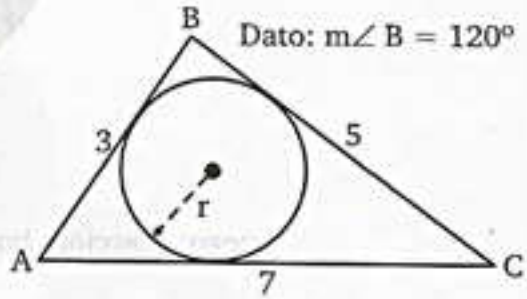

$*\text{sen}\frac{A}{2}$ = .....

$*\cos\frac{A}{2}$ = .....

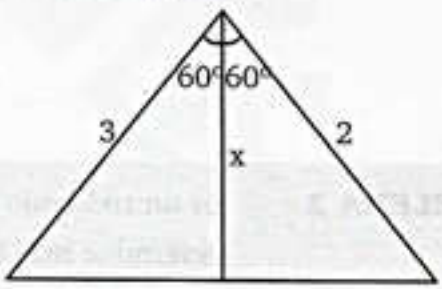
$*\tan\frac{A}{2}$ = .....

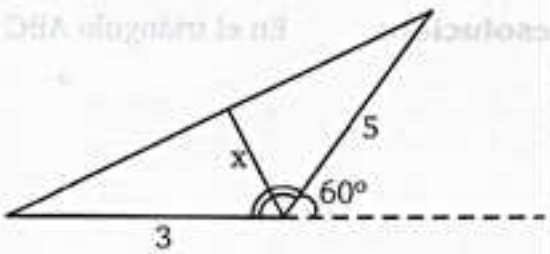
**5.** En cada caso hallar la longitud "r".




**6.** Hallar la longitud "x" en cada caso.



## PROBLEMAS RESUELTOS

**PROBLEMA 1** En el triángulo ABC. Reducir la expresión:

$$J=\frac{\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}B+\operatorname{sen}C}+\frac{c-a}{b+c}$$

**Resolución:** Sabemos:

$$\begin{cases}\dfrac{a}{\operatorname{sen}A}=\dfrac{b}{\operatorname{sen}B}=\dfrac{c}{\operatorname{sen}C}=2R \quad \text{.....(1)}\\ \begin{cases}a=2R\operatorname{sen}A\\ b=2R\operatorname{sen}B\\ c=2R\operatorname{sen}C\end{cases} \quad \text{.....(2)}\end{cases}$$

Lo pedido : $J=\dfrac{\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}B+\operatorname{sen}C}+\dfrac{c-a}{b+c}$

Reemplazando (2) en lo pedido:

$$J=\frac{\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}B+\operatorname{sen}C}+\frac{2R\operatorname{sen}C-2R\operatorname{sen}A}{2R\operatorname{sen}B+2R\operatorname{sen}C}$$

$$J=\frac{\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}B+\operatorname{sen}C}+\frac{2R(\operatorname{sen}C-\operatorname{sen}A)}{2R(\operatorname{sen}B+\operatorname{sen}C)} \quad \text{(factorizo "2R")}$$

Luego: Fracción homogénea

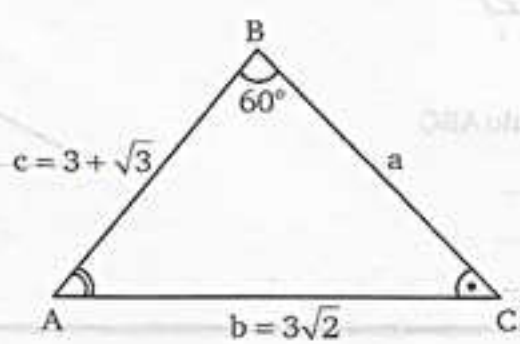
$$J=\frac{\operatorname{sen}B+\operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}B+\operatorname{sen}C}$$

Simplificando se obtiene:

$$\therefore \ \mathbf{J=1}$$

**PROBLEMA 2** En un triángulo ABC: $m\angle B=60°$ ; $b=3\sqrt{2}$ ; $c=3+\sqrt{3}$.
Determine $m\angle A$

**Resolución:** En el triángulo ABC



team CALAPENSHKO


Por el teorema de senos:

$$\boxed{\frac{b}{\operatorname{sen}B}=\frac{c}{\operatorname{sen}C}} \Rightarrow b\operatorname{sen}C = c\operatorname{sen}B$$

Reemplazando: $3\sqrt{2}\operatorname{sen}C = (3+\sqrt{3})\operatorname{sen}60°$

$$3\sqrt{2}\operatorname{sen}C = (3+\sqrt{3})\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3\sqrt{2}\operatorname{sen}C = \frac{3(\sqrt{3}+1)}{2}$$

Luego despejando sen C y racionalizando; se obtiene:

$$\operatorname{sen}C = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$m\angle C = 75°$$

Y como: $m\angle B = 60°$

$\therefore$ **$m\angle A = 45°$**

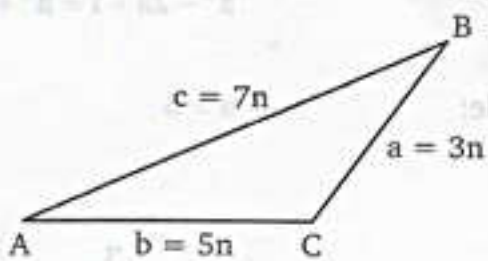
**PROBLEMA 3** En un triángulo ABC, se tiene que:

$$\frac{a}{3}=\frac{b}{5}=\frac{c}{7}$$

Calcular: $m\angle C$

**Resolución:** En el triángulo ABC:

Como: $\frac{a}{3}=\frac{b}{5}=\frac{c}{7}=n \Rightarrow \begin{cases} a=3n \\ b=5n \\ c=7n \end{cases}$




Por el teorema de cosenos: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

Reemplazando: $(7n)^2 = (3n)^2 + (5n)^2 - 2(3n)(5n)\cos C$

$$49n^2 = 34n^2 - 30n^2 \cdot \cos C$$

$$30\cos C = -15$$

Se obtiene: $\cos C = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ **$m\angle C = 120°$**

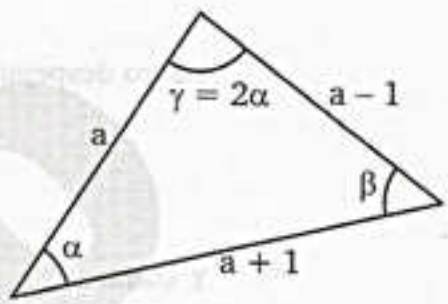
**PROBLEMA 4** Sean $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ las medidas de los ángulos interiores de un triángulo, tales que: $\alpha < \beta < \gamma$, y $\gamma = 2\alpha$. Si las medidas de los lados son numéricamente iguales a tres números consecutivos, entonces sen $\beta$ es igual a

**ADMISIÓN UNMSM 2018 - I**

**Resolución:**

En el triángulo: $3\alpha + \beta = 180°$

$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen} 3\alpha$




Por teorema de senos:

$$\frac{a+1}{\operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{a-1}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\frac{a+1}{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} = \frac{a-1}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\frac{(a+1)}{2(a-1)} = \cos\alpha \qquad \text{(I)}$$

Por teorema de cosenos:

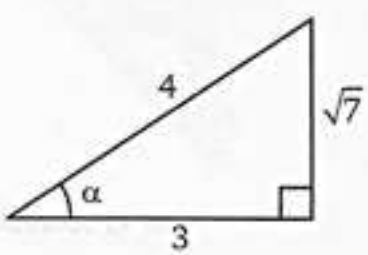
$$(a-1)^2 = a^2 + (a+1)^2 - 2(a)(a+1)\cos\alpha \qquad \text{(II)}$$

Reemplazando (I) en (II):

$$a^2 - 2a + 1 = a^2 + a^2 + 2a + 1 - 2(a)(a+1)\left(\frac{a+1}{2(a-1)}\right)$$

De donde: $a = 5$

En (I): $\cos\alpha = \frac{3}{4}$




De donde: $\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen} 3\alpha = 3\operatorname{sen}\alpha - 4\operatorname{sen}^3\alpha = 3\frac{\sqrt{7}}{4} - 4\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^3$

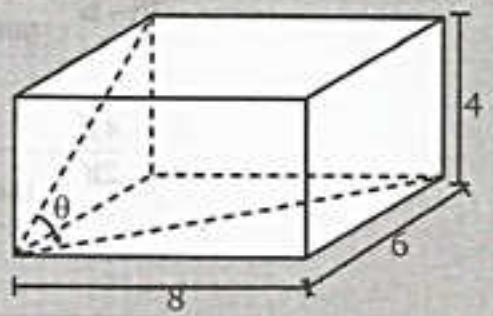
$$\therefore \quad \operatorname{sen}\beta = \frac{5\sqrt{7}}{16}$$

team CALAPENSHKO

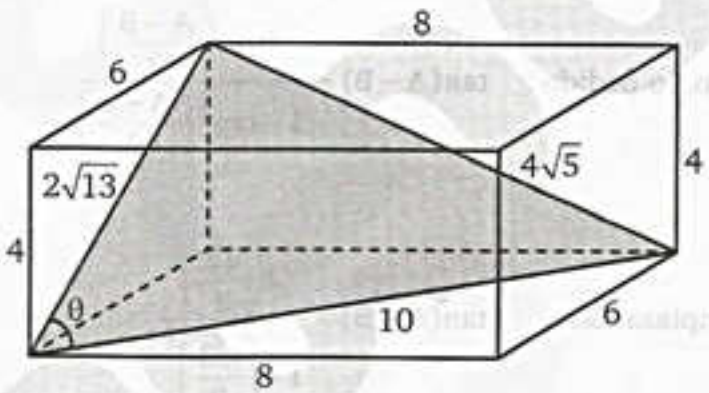


**PROBLEMA 5** En el paralelepípedo rectangular de la figura, determine aproximadamente la medida del ángulo θ.

**ADMISIÓN UNI 2016-I**




**Resolución:** Aplicando el teorema de cosenos




$$(4\sqrt{5})^2 = (2\sqrt{13})^2 + (10)^2 - 2(2\sqrt{13})(10)\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{9\sqrt{13}}{65} \rightarrow \cos\theta \approx 0,49$$

$\therefore$ θ es aprobación a 60°

**PROBLEMA 6** En un triángulo ABC, $C = 60°$ y $a = 3b$. Determinar el valor de:

$$\tan(A-B)$$

**Resolución:** En el triángulo ABC:

$$A + B + C = 180°$$

Dato: $\begin{cases} C = 60° \Rightarrow A + B = 120° \\ a = 3b \end{cases}$

Lo pedido: "$\tan(A-B)$"

Por el teorema de tangentes:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

Reemplazando a = 3b :

$$\frac{3b+b}{3b-b}=\frac{\tan 60°}{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

$$\frac{4\cancel{b}}{2\cancel{b}}=\frac{\sqrt{3}}{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

Despejando : $\boxed{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}}$

Luego, lo pedido : $\tan(A-B)=\dfrac{2\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{A-B}{2}\right)}$

Reemplazando : $\tan(A-B)=\dfrac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

$\therefore$ **tan(A − B) = 4 ∖ 3**

**PROBLEMA 7** En un triángulo ABC, reducir:

$$E = bc\,\text{sen}\,A(\cot B + \cot C)$$

**Resolución:** La expresión a reducir es:

$$E = bc\,\text{sen}\,A(\cot B + \cot C)$$

$$E = bc\,\text{sen}\,A\left(\frac{\cos B}{\text{sen}\,B}+\frac{\cos C}{\text{sen}\,C}\right)$$

Pasando a senos y cosenos y reemplazando:

$$\begin{cases} a = 2R\,\text{sen}\,A \\ b = 2R\,\text{sen}\,B \\ c = 2R\,\text{sen}\,C \end{cases}$$

$$E = bc\,\text{sen}\,A\left(\frac{\text{sen}\,C\,.\,\cos B + \text{sen}\,B\,.\,\cos C}{\text{sen}\,B\,.\text{sen}\,C}\right)$$

Simplificando : $E = 2R\,\text{sen}\,B\,.\,2R\,\text{sen}C\,.\,\text{sen}A.\ \dfrac{\text{sen}(B+C)}{\text{sen}\,B\,.\,\text{sen}C}$

(como : $A + B + C = 180°$)

Luego : $E = 4R^2\,\text{sen}\,A\,.\,\text{sen}(180° - A)$

$E = 4R^2\,\text{sen}\,A\,.\,\text{sen}\,A$

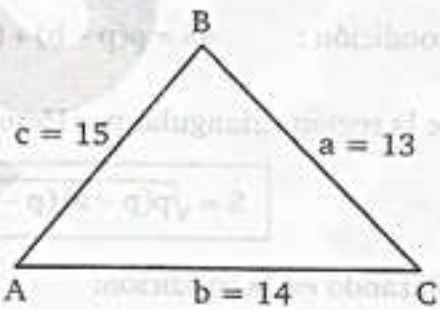
$E = \underbrace{(2R\,\text{sen}\,A)^2}$

$\therefore\ \mathbf{E = a^2}$

**PROBLEMA 8** En un triángulo ABC, se tiene: $a = 13\,u\ ;\ b = 14\,u\ ;\ c = 15\,u$

Calcular: $E = \cot\left(\dfrac{A}{4}\right) - \sqrt{5}$

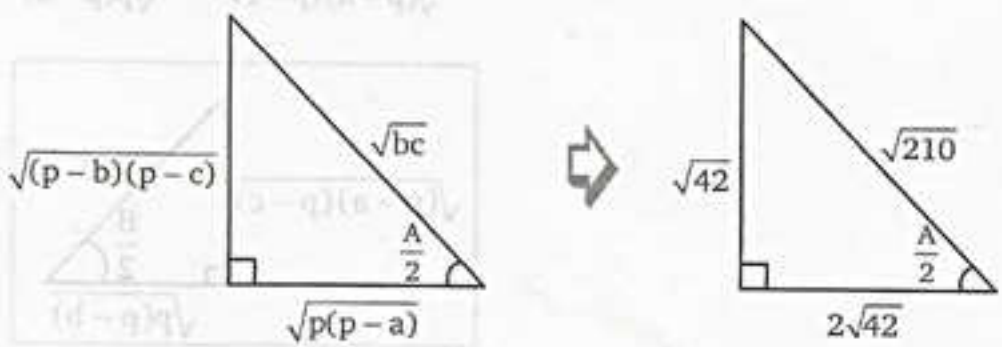
**Resolución:** En el triángulo ABC:




Luego : $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

$p = \dfrac{13+14+15}{2} \Rightarrow p = 21$

Por razones trigonométricas de los semiángulos de un triángulo.



Lo pedido : $E = \cot\frac{A}{4} - \sqrt{5}$

Por idendidad del ángulo mitad

$$E = \csc\frac{A}{2} + \cot\frac{A}{2} - \sqrt{5}$$

Reemplazando del triángulo rectángulo:

$$E = \sqrt{\frac{210}{42}} + 2\sqrt{\frac{42}{42}} - \sqrt{5}$$

$$E = \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5}$$

$\therefore$ **E = 2**

**PROBLEMA 9** El área de la región triangular ABC es "S", el semiperímetro es "p" y sus lados son: a, b y c respectivamente. Si se cumple que:

$$4S = p(p-b) + (p-a)(p-c)$$

Determine la medida del ángulo agudo B.

**Resolución:** De la condición : $4S = p(p-b) + (p-a)(p-c)$

Área de la región triangular por Heron es:

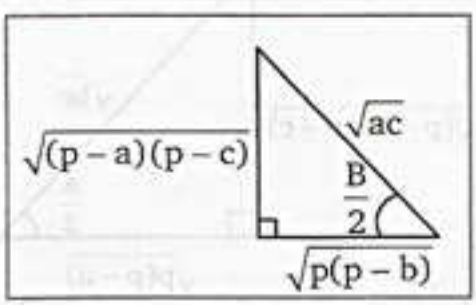
$$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

Reemplazando en la condición:

$$4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = p(p-b) + (p-a)(p-c)$$

$$4 = \frac{p(p-b)}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} + \frac{(p-a)(p-c)}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

Simplificando : $4 = \frac{\sqrt{p(p-b)}}{\sqrt{(p-a)(p-c)}} + \frac{\sqrt{(p-a)(p-c)}}{\sqrt{p(p-b)}}$



Luego : $4 = \cot\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}$

$$4 = 2\csc B$$

$$\csc B = 2$$

$$\therefore \ m\angle B = 30°$$

**PROBLEMA 10** En un triángulo ABC se trazan las medianas $m_a$, $m_b$ y $m_c$, simplifique la expresión:

$$E = \frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

**Resolución:** Si $m_a$ es la mediana relativa al lado a entonces :

$$\boxed{4m_a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A} \quad .....(1)$$

También por el teorema de cosenos:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A} \quad .....(2)$$

Sumando m.a.m. (1) ∧ (2), e obtiene :

$$4m_a^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2$$

$$\boxed{4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2} \quad .....(3)$$

En forma análoga : $4m_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2$ .....(4)

$$4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2 \quad .....(5)$$

Luego sumando (3), (4) ∧ (5) m.a.m.

$$4\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right) = 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

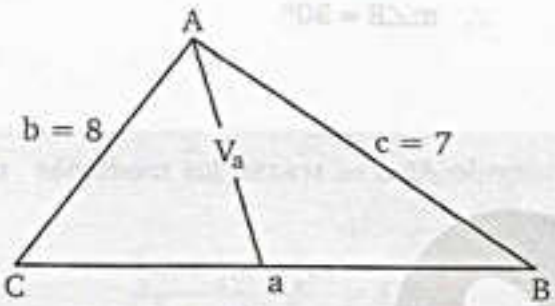
Despejando:

$$\therefore \ \frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{3}{4}$$

**PROBLEMA 11** En un triángulo ABC, la bisectriz interior relativa al ángulo "A" mide 14/3 m. Si los lados b y c miden 8 m y 7 m, respectivamente.

Determine la longitud del lado a.

**Resolución:** Bisectriz interior $(V_a)$




$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$p = \frac{15+a}{2}$$

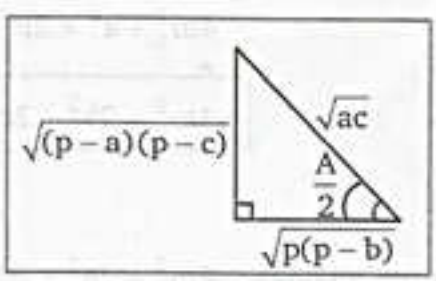
$V_a$ : bisectriz interior relativa al lado "a"

$$\boxed{V_a = \left(\frac{2bc}{b+c}\right)\cos\frac{A}{2}}$$

Reemplazando : $\frac{14}{3} = \frac{2(8)(7)}{8+7} \cdot \cos\frac{A}{2}$

$$\cos\frac{A}{2} = \frac{5}{8}$$

$$\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} = \frac{5}{8}$$




Remplazando: $\sqrt{\frac{\left(\frac{15+a}{2}\right)\left(\frac{15-a}{2}\right)}{8\times 7}} = \frac{5}{8}$

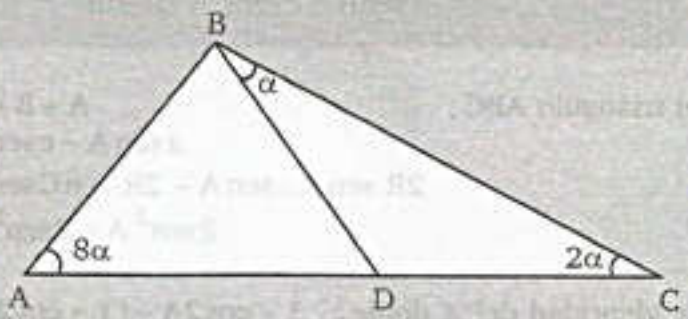
Elevando al cuadrado m.a.m: $\frac{15^2 - a^2}{32\times 7} = \frac{25}{64}$

$$\therefore \quad a = \frac{5\sqrt{22}}{2}$$

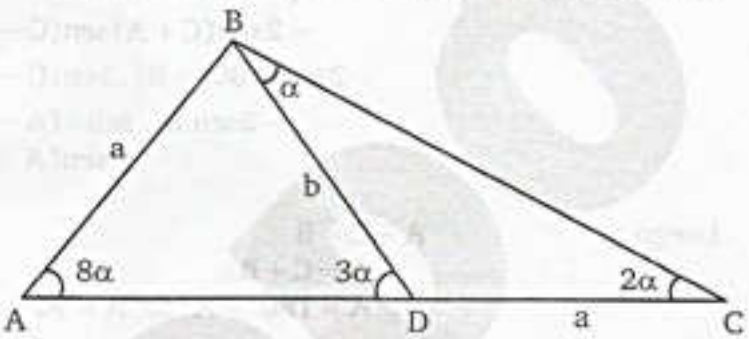
team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 12** En el gráfico mostrado, si: AB = CD. Calcule el valor de "α"




**Resolución:** AB = CD = a




Sea : BD = b

Teorema de senos:

* $\Delta_{ABD}$ : $\dfrac{a}{\operatorname{sen}3\alpha}=\dfrac{b}{\operatorname{sen}8\alpha} \Rightarrow \dfrac{a}{b}=\dfrac{\operatorname{sen}3\alpha}{\operatorname{sen}8\alpha}$ .....(1)

* $\Delta_{BDC}$ : $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\dfrac{b}{\operatorname{sen}2\alpha} \Rightarrow \dfrac{a}{b}=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}2\alpha}$ .....(2)

Igualando (1) ∧ (2) :

$$\frac{\operatorname{sen}3\alpha}{\operatorname{sen}8\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}2\alpha}$$

$$\frac{\operatorname{sen}3\alpha}{\operatorname{sen}8\alpha}=\frac{\cancel{\operatorname{sen}\alpha}}{2\cancel{\operatorname{sen}\alpha}\cos\alpha}$$

$$2\operatorname{sen}3\alpha\cos\alpha=\operatorname{sen}8\alpha$$

Transformando a suma el 1.er miembro:

$$\operatorname{sen}4\alpha+\operatorname{sen}2\alpha=\operatorname{sen}8\alpha$$

$$\operatorname{sen}2\alpha=\operatorname{sen}8\alpha-\operatorname{sen}4\alpha$$

Transformando a producto el 2.° miembro y simplificando:

$$\operatorname{sen}2\alpha=2\operatorname{sen}2\alpha\cos6\alpha$$

$$\cos6\alpha=\frac{1}{2}$$

Luego : $6\alpha = 60°$

$\therefore \quad \alpha = 10°$

team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 13** ¿En qué tipo de triángulo ABC se cumple:

$$a\,\text{sen}A - c\,\text{sen}C = b\,\text{sen}B?$$

**Resolución:** Del triángulo ABC:

$$A + B + C = 180°$$
$$a\,\text{sen}\,A - c\,\text{sen}\,C = b\,\text{sen}\,B$$
$$2R\,\text{sen}\,A\,.\,\text{sen}\,A - 2R\,\text{sen}\,C\,\text{sen}\,C = 2R\,\text{sen}\,B.\,\text{sen}\,B$$
$$2\text{sen}^2 A - 2\text{sen}^2 C = 2\text{sen}^2 B$$

Por Identidad del $\angle$ doble: $1 - \cos 2A - (1 - \cos 2C) = 2\text{sen}^2 B$

$$\cos 2C - \cos 2A = 2\text{sen}^2 B$$

Transformando a producto el primer miembro:

$$-2\text{sen}(C + A)\text{sen}(C - A) = 2\text{sen}^2 B$$
$$-2\text{sen}(180° - B)\,.\,\text{sen}(C - A) = 2\text{sen}^2 B$$
$$-2\text{sen}\,B\,.\,\text{sen}-(A - C) = 2\text{sen}^2 B$$
$$\text{sen}(A - C) = \text{sen}\,B$$

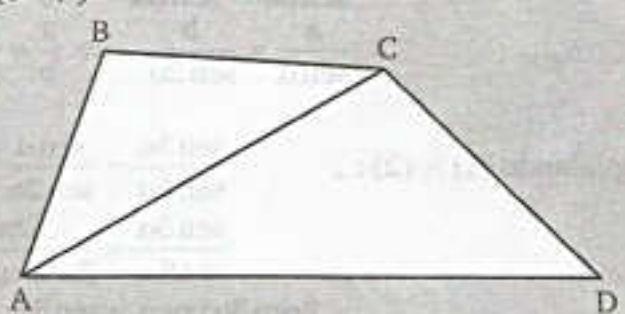
Luego: $A - C = B$

$$A = C + B$$
$$A = 180° - A \Rightarrow A = 90°$$

$\therefore$ **Dicha condición se cumple en un triángulo rectángulo.**

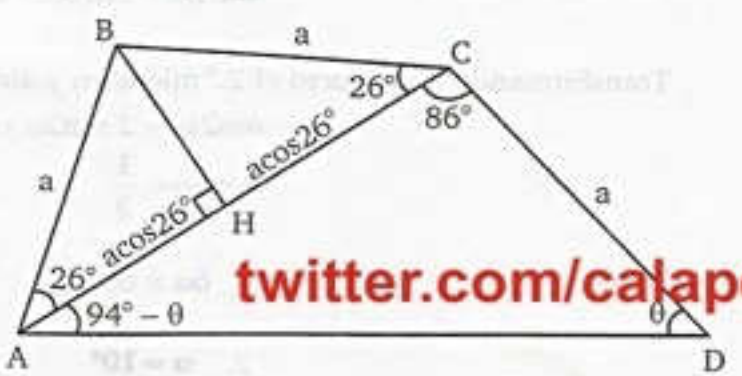
**PROBLEMA 14** Si: $AB = BC = CD$, $m\angle BAC = 26°$, $m\angle ACD = 86°$ y $m\angle CDA = \theta$.

Calcular: $\text{sen}(\theta - 4°)$




**Resolución:** Sea: $AB = BC = CD = a$

Trazamos la altura BH




twitter.com/calapenshko

team CALAPENSHKO


En el $\Delta_{ACD}$ aplicamos el teorema de senos :

$$\frac{2a\cos 26°}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{a}{\operatorname{sen}(94° - \theta)}$$

$$2\operatorname{sen}(94° - \theta)\cos 26° = \operatorname{sen}\theta$$

Transformamos a suma el 1.er miembro:

$$\operatorname{sen}(120° - \theta) + \operatorname{sen}(68° - \theta) = \operatorname{sen}\theta$$

$$\operatorname{sen}(68° - \theta) = \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}(120° - \theta)$$

Transformamos a producto el 2.do miembro:

$$\operatorname{sen}(68° - \theta) = 2\operatorname{sen}(\theta - 60°)\cos 60°$$

$$\operatorname{sen}(68° - \theta) = \operatorname{sen}(\theta - 60°)$$

Luego : $68° - \theta = \theta - 60°$

$$\theta = 64°$$

Lo pedido : $\operatorname{sen}(\theta - 4) = \operatorname{sen} 60°$

$$\therefore \quad \operatorname{sen}(\theta - 4) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**PROBLEMA 15** Se tiene un triángulo ABC de semiperímetro P y exradios $r_a$, $r_b$, $r_c$ relativos a los lados a, b y c respectivamente, calcular la medida del ángulo C, si se cumple:

$$\frac{P}{r_a} + \frac{P}{r_b} + \frac{P}{r_c} = \cot\frac{A}{2} \cdot \cot\frac{B}{2} \cdot \tan\frac{C}{2}$$

**Resolución:** Sabemos : Exradios : $r_a = P \cdot \tan\frac{A}{2}$

$$r_b = P \cdot \tan\frac{B}{2}$$

$$r_c = P \cdot \tan\frac{C}{2}$$

Reemplazando en la condición:

$$\frac{\cancel{P}}{\cancel{P} \cdot \tan\frac{A}{2}} + \frac{\cancel{P}}{\cancel{P} \cdot \tan\frac{B}{2}} + \frac{\cancel{P}}{\cancel{P} \cdot \tan\frac{C}{2}} = \cot\frac{A}{2} \cdot \cot\frac{B}{2} \cdot \tan\frac{C}{2}$$

Simplificando : $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2} \cdot \cot\frac{B}{2} \cdot \tan\frac{C}{2}$

Recordar : $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90° \Rightarrow$ Suma de cotangente es igual al producto

$$\cot\frac{A}{2} \cdot \cot\frac{B}{2} \cdot \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2} \cdot \cot\frac{B}{2} \cdot \tan\frac{C}{2}$$

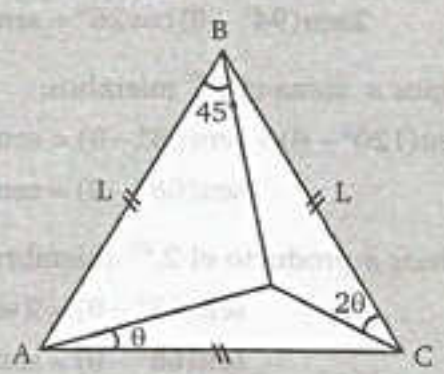
Luego : $\cot\frac{C}{2} = \tan\frac{C}{2} \Rightarrow \frac{C}{2} + \frac{C}{2} = 90°$

$$\therefore \quad C = 90°$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 16** En el triángulo equilátero mostrado, determine:

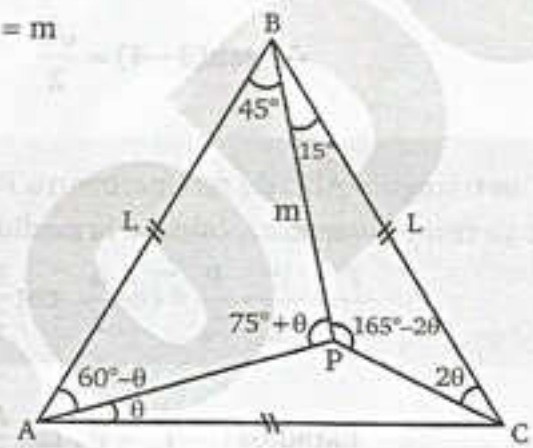
$$J = \cos(15° + 3\theta)\sec\theta$$




**Resolución:** Del gráfico: completando los ángulos

Sea : $AB = BC = AC = L$

Además : $BP = m$




Aplicando el teorema de senos:

En el $\Delta_{ABP}$ : $\dfrac{m}{L} = \dfrac{\operatorname{sen}(60° - \theta)}{\operatorname{sen}(75° + \theta)}$ .....(1)

En el $\Delta_{BCP}$ : $\dfrac{m}{L} = \dfrac{\operatorname{sen} 2\theta}{\operatorname{sen}(165° - 2\theta)}$ .....(2)

Igualando (1) = (2) : $\dfrac{\operatorname{sen}(60° - \theta)}{\operatorname{sen}(75° + \theta)} = \dfrac{\operatorname{sen} 2\theta}{\operatorname{sen}(165° - 2\theta)}$

**Recordar:**

$\operatorname{sen}(165° - 2\theta) = \operatorname{sen}(15° + 2\theta)$

$$\operatorname{sen}(60° - \theta)\operatorname{sen}(15° + 2\theta) = \operatorname{sen}(75° + \theta)\operatorname{sen} 2\theta$$

Multiplicando por 2:

$$2\operatorname{sen}(60° - \theta)\operatorname{sen}(15° + 2\theta) = 2\operatorname{sen}(75° + \theta)\operatorname{sen} 2\theta$$

$$\cos(45° - 3\theta) - \cos(75° + \theta) = \cos(75° - \theta) - \cos(75° + 3\theta)$$

$$\cos(45° - 3\theta) + \cos(75° + 3\theta) = \cos(75° - \theta) + \cos(75° + \theta)$$

Transformando a producto:

$$2\cos 60^\circ \cdot \cos(15^\circ + 3\theta) = 2\cos 75^\circ \cos\theta$$

$$\frac{1}{2} \cdot \cos(15^\circ + 3\theta) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\cos\theta$$

$$\cos(15^\circ + 3\theta)\sec\theta = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

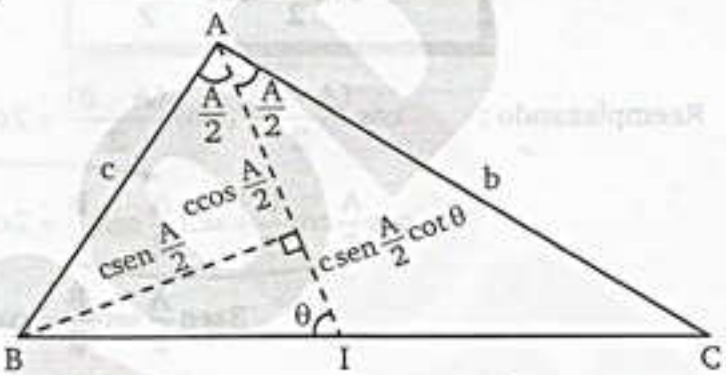
$$\therefore \quad \mathbf{J = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}$$

**PROBLEMA 17** En el triángulo ABC, la bisectriz interior relativo al lado "a" forma con dicho lado, un ángulo agudo que mide "θ", si además:

$$3\cot\theta = \cot\frac{A}{2}$$

Determine "b" en términos de "c".

**Resolución:** Graficando; trazando la bisectriz interior de A y luego trazando una altura de "B" a AI.




Se observa del gráfico : $AI = c\cos\frac{A}{2} + c\,\text{sen}\frac{A}{2}\cot\theta$ .....(1)

Además sabemos que la bisectriz interior:

$$AI = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2} \qquad \text{.....(2)}$$

Igualando las ecuaciones (1) = (2) : $c \cdot \cos\frac{A}{2} + c \cdot \text{sen}\frac{A}{2} \cdot \cot\theta = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$

Cancelando "c" y reemplazando del dato: $\cot\theta = \frac{1}{3}\cot\frac{A}{2}$

$$\cos\frac{A}{2} + \text{sen}\frac{A}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\cos\frac{A}{2}}{\text{sen}\frac{A}{2}}\right) = \frac{2b}{b+c}\cos\frac{A}{2}$$

Simplificando : $1 + \frac{1}{3} = \frac{2b}{b+c} \rightarrow \frac{4}{3} = \frac{2b}{b+c}$

$$2b + 2c = 3b$$

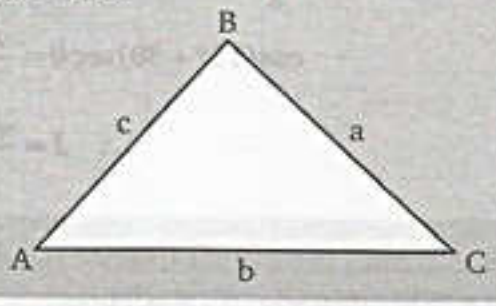
$$\therefore \quad \mathbf{b = 2c}$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 18** En la figura, se muestra un triángulo en el que se cumple:

$$\cos A + \cos B = 4\,\text{sen}^2\frac{C}{2}$$

luego el valor de a + b es:




**Resolución:** Del dato; transformando a producto el primer miembro:

$$A + B + C = 180°$$

$$2\cos\frac{(A+B)}{2}\cos\frac{(A-B)}{2} = 4\,\text{sen}^2\frac{C}{2}$$

**Recordar:**

$$\text{sen}\frac{C}{2} = \cos\frac{(A+B)}{2}$$

Reemplazando :

$$\cos\frac{(A+B)}{2}\cdot\cos\frac{(A-B)}{2} = 2\cos^2\frac{(A+B)}{2}$$

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \text{sen}\frac{A}{2}\text{sen}\frac{B}{2} = 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - 2\,\text{sen}\frac{A}{2}\text{sen}\frac{B}{2}$$

$$3\,\text{sen}\frac{A}{2}\text{sen}\frac{B}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

Luego :

$$\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2} = \frac{1}{3} \quad \text{.....(1)}$$

**Sabemos:**

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \quad \wedge \quad \tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

Reemplazando en (1):

$$\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} = \frac{1}{3}$$

Simplificando:

$$\sqrt{\frac{(p-c)^2}{p^2}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{p-c}{p} = \frac{1}{3}$$

$$3p - 3c = p$$

$$\underbrace{2p} = 3c$$

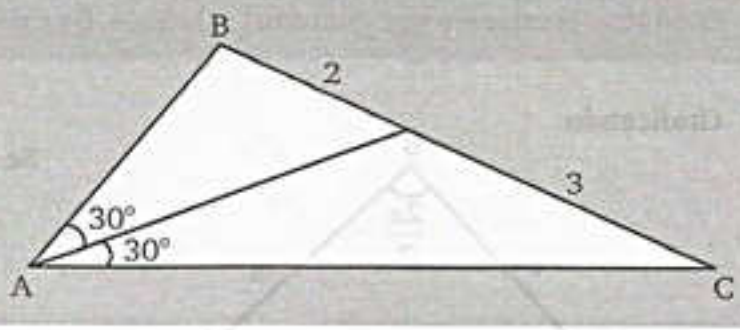
Se obtiene :

$$a + b + c = 3c$$

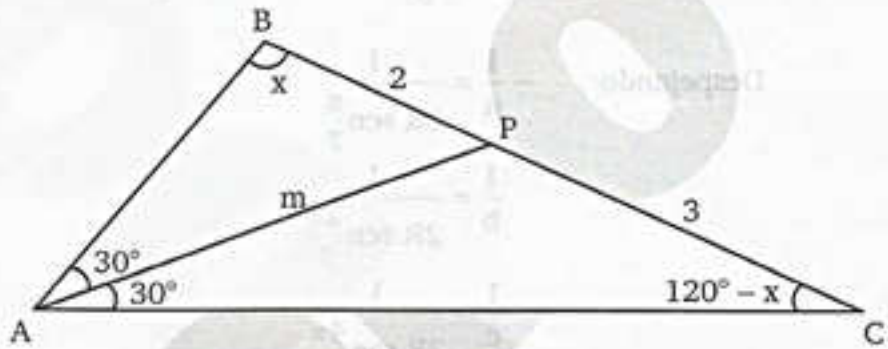
$$\therefore \quad \mathbf{a + b = 2c}$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 19** Dado el triángulo ABC, calcular la medida del ángulo B.




**Resolución:** Del gráfico; sea: AP = m




Aplicando el teorema de senos para los triángulos:

i) $\Delta_{APB}$: $\dfrac{m}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{2}{\operatorname{sen} 30°}$

$$m = 4\operatorname{sen} x \qquad \text{.....(1)}$$

ii) $\Delta_{APC}$: $\dfrac{m}{\operatorname{sen}(120° - x)} = \dfrac{3}{\operatorname{sen} 30°}$

$$m = 6\operatorname{sen}(120° - x)$$

$$m = 6\operatorname{sen}(60° + x) \quad \text{.....(2)}$$

De (1) = (2): $4\operatorname{sen} x = 6\operatorname{sen}(60° + x)$

$$2\operatorname{sen} x = 3\operatorname{sen} 60°\cos x + 3\cos 60°\operatorname{sen} x$$

$$2\operatorname{sen} x = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{3}{2}\operatorname{sen} x$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cos x$$

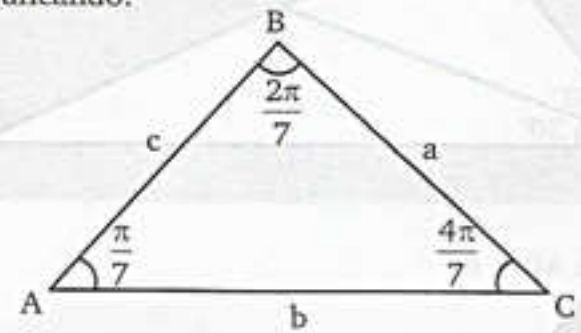
$$\tan x = 3\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = \arctan(3\sqrt{3})}$$

**PROBLEMA 20** Sean los valores de los ángulos: $A=\frac{\pi}{7}$, $B=\frac{2\pi}{7}$, $C=\frac{4\pi}{7}$

Encontrar la relación que guardan los lados a, b y c de un triángulo ABC.

**Resolución:** Graficando:




Se observa:

- $a = 2R\,\text{sen}\frac{\pi}{7}$
- $b = 2R\,\text{sen}\frac{2\pi}{7}$
- $c = 2R\,\text{sen}\frac{4\pi}{7}$

Despejando: $-\frac{1}{a}=\frac{-1}{2R\,\text{sen}\frac{\pi}{7}}$

$$\frac{1}{b}=\frac{1}{2R\,\text{sen}\frac{2\pi}{7}}$$

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{2R\,\text{sen}\frac{4\pi}{7}}$$

Sumando m.a.m:

$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2R}\left(\frac{-1}{\text{sen}\frac{\pi}{7}}+\frac{1}{\text{sen}\frac{2\pi}{7}}+\frac{1}{\text{sen}\frac{4\pi}{7}}\right)$$

$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2R}\left[\frac{-\text{sen}\frac{4\pi}{7}\text{sen}\frac{2\pi}{7}+\text{sen}\frac{4\pi}{7}\text{sen}\frac{\pi}{7}+\text{sen}\frac{2\pi}{7}\text{sen}\frac{\pi}{7}}{\text{sen}\frac{\pi}{7}\text{sen}\frac{2\pi}{7}\text{sen}\frac{4\pi}{7}}\right]$$

Multiplicando al Numerador y denominador × 2

$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2R}\left[\frac{-2\text{sen}\frac{4\pi}{7}\text{sen}\frac{2\pi}{7}+2\text{sen}\frac{4\pi}{7}\text{sen}\frac{\pi}{7}+2\text{sen}\frac{2\pi}{7}\text{sen}\frac{\pi}{7}}{2\text{sen}\frac{\pi}{7}\text{sen}\frac{2\pi}{7}\text{sen}\frac{4\pi}{7}}\right]$$

$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2R}\left[\frac{-\cos\frac{2\pi}{7}+\overbrace{\cos\frac{6\pi}{7}}^{-\cos\frac{\pi}{7}}+\cos\frac{3\pi}{7}-\overbrace{\cos\frac{5\pi}{7}}^{-\cos\frac{2\pi}{7}}+\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}}{2\text{sen}\frac{\pi}{7}\text{sen}\frac{2\pi}{7}\text{sen}\frac{4\pi}{7}}\right]$$

$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$$

$$\therefore\ \frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a}$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 21** En el triángulo ABC, determine la medida del ángulo Â, si se cumple que:

$$\left(2\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) S_{\Delta_{ABC}} = (p-b)(p-c)+p(p-a)$$

donde

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

**Resolución:** Reemplazando el valor de: $S_{\Delta_{ABC}} = \frac{bc}{2}\operatorname{sen}A$

$$(2\sqrt{6}+\sqrt{2}).\frac{b.c}{2}\operatorname{sen}A = (p-b)(p-c)+p(p-a)$$

$$(\sqrt{6}+\sqrt{2})\operatorname{sen}A = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}+\frac{p(p-a)}{bc}$$

Luego: $$(\sqrt{6}+\sqrt{2})\operatorname{sen}A = \underbrace{\left(\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\right)^2}_{\operatorname{sen}\frac{A}{2}} + \underbrace{\left(\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\right)^2}_{\cos\frac{A}{2}}$$

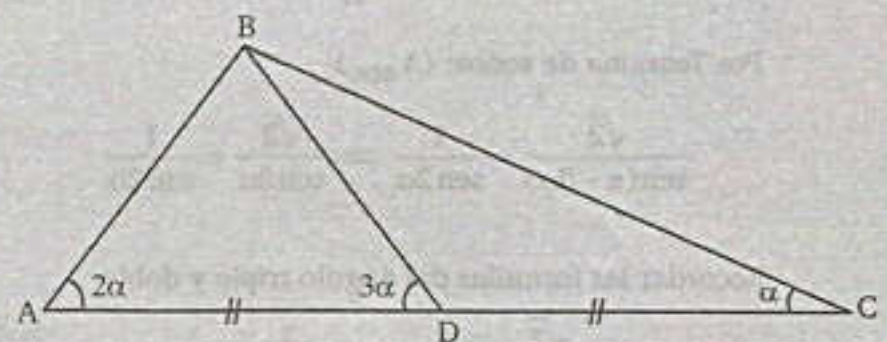
Fórmulas del semiángulo

$$(\sqrt{6}+\sqrt{2})\operatorname{sen}A = \underbrace{\operatorname{sen}^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}}_{1}$$

$$\operatorname{sen}A = \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \Rightarrow \operatorname{sen}A = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \quad A = 15^\circ \quad \text{ó} \quad A = 165^\circ$$

**PROBLEMA 22** A partir de la figura que se muestra, determine la medida del ángulo "α".



**A todo el público en general:**

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

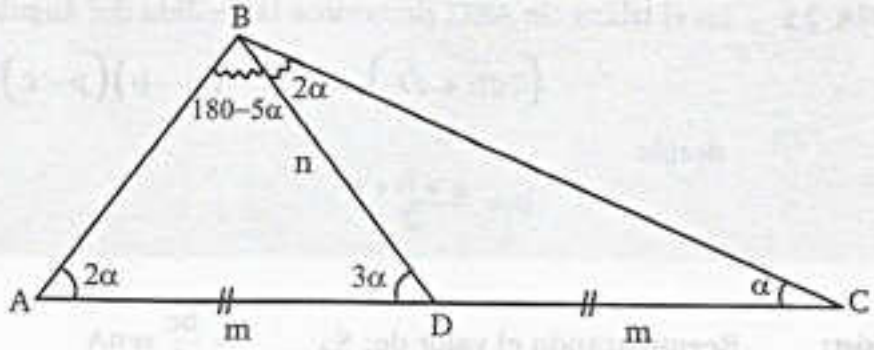
**Este libro no debe ser prostituito monetariamente**, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

**28 de agosto del 2020**

**Resolución:** Aplicando el teorema de senos en los triángulos ABC y BDC




$$\frac{n}{\operatorname{sen}2\alpha}=\frac{m}{\operatorname{sen}(180-5\alpha)} \quad .....(1)$$

$$\frac{n}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{m}{\operatorname{sen}2\alpha} \quad .....(2)$$

De (1) y (2)

$$\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{\operatorname{sen}5\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}2\alpha}$$

$$\frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\operatorname{sen}5\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}2\alpha}$$

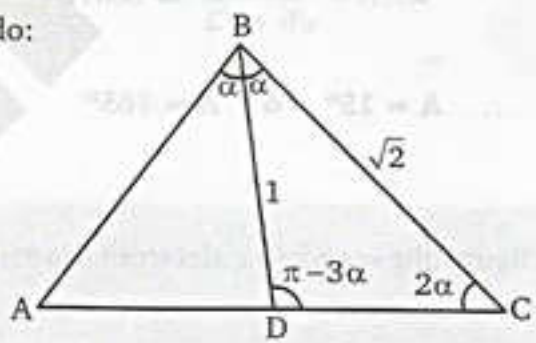
$$2\operatorname{sen}2\alpha\cos\alpha=\operatorname{sen}5\alpha \Rightarrow \operatorname{sen}3\alpha+\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}5\alpha \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}5\alpha-\operatorname{sen}3\alpha$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha=2\operatorname{sen}\alpha\cos4\alpha \Rightarrow \cos4\alpha=\frac{1}{2} \Rightarrow 4\alpha=60^\circ$$

$$\therefore \alpha=15^\circ$$

**PROBLEMA 23** Sea el triángulo ABC de lado AB = AC y BC = $\sqrt{2}$
Si al bisectriz del ángulo B corta el lado opuesto en D y BD = 1, determine las medidas de los ángulos A y B.

**Resolución:** Graficando:




Por Teorema de senos: ($\Delta_{BDC}$)

$$\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sen}(\pi-3\alpha)}=\frac{1}{\operatorname{sen}2\alpha} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sen}3\alpha}=\frac{1}{\operatorname{sen}2\alpha}$$

Recordar las formulas del ángulo triple y doble.

$$\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sen}\alpha\,(3-4\operatorname{sen}^2\alpha)}=\frac{1}{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{3-4(1-\cos^2\alpha)}=\frac{1}{\cos\alpha}$$

team CALAPENSHKO

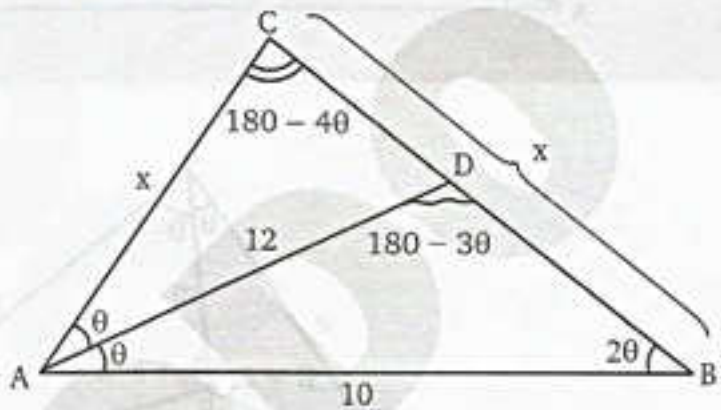


$$\Rightarrow \quad 2\sqrt{2}\cos\alpha = 4\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow \quad 4\cos^2\alpha - 2\sqrt{2}\cos\alpha - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad \therefore \ \alpha = 15^\circ \Rightarrow \hat{B} = 30^\circ \wedge \hat{A} = 120^\circ$$

**PROBLEMA 24** En un triángulo isósceles ABC donde AC=BC la base mide 10m y la bisectriz del ángulo "A" mide 12 m.
Determine la longitud del lado igual del triángulo.

**Resolución:**




En el $\Delta_{ABD}$ (Teorema de senos) :

$$\frac{12}{\operatorname{sen}2\theta} = \frac{10}{\operatorname{sen}(180-3\theta)}$$

$\operatorname{sen}(180-3\theta) \longrightarrow \operatorname{sen}3\theta$

$$\frac{12}{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta} = \frac{10}{\operatorname{sen}\theta(3-4\operatorname{sen}^2\theta)}$$

$$\Rightarrow 3(3-4\operatorname{sen}^2\theta) = 5\cos\theta \Rightarrow 9-12(1-\cos^2\theta) = 5\cos\theta$$

$$\Rightarrow 12\cos^2\theta - 5\cos\theta - 3 = 0 \Rightarrow (4\cos\theta - 3)(3\cos\theta + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta = -\frac{1}{3} \ \text{(no cumple)} \ \wedge \ \cos\theta = \frac{3}{4}$$

En el $\Delta_{ABC}$ (Teorema de senos)

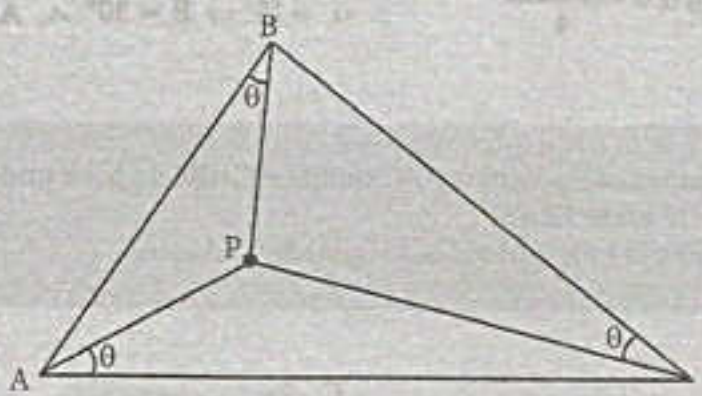
$$\frac{x}{\operatorname{sen}2\theta} = \frac{10}{\operatorname{sen}(180-4\theta)} \Rightarrow \frac{x}{\operatorname{sen}2\theta} = \frac{10}{2\operatorname{sen}2\theta\cos2\theta}$$

$\operatorname{sen}(180-4\theta) \longrightarrow \operatorname{sen}4\theta$

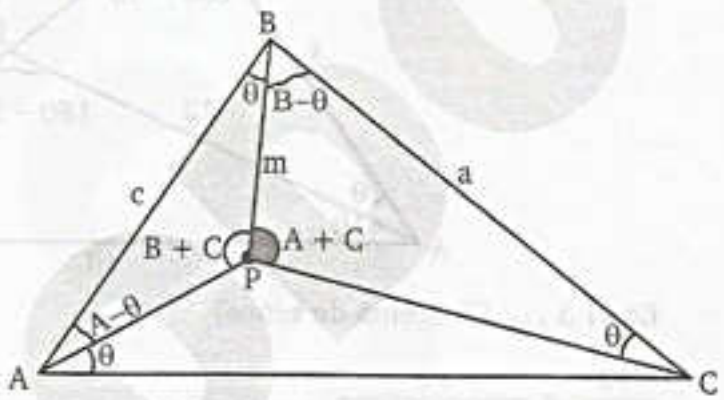
$$\Rightarrow x = \frac{10}{2\cos2\theta} = \frac{5}{\cos2\theta} = \frac{5}{2(\cos^2\theta)-1} = \frac{5}{2\left(\frac{3}{4}\right)^2-1}$$

$$\therefore \ x = 40m$$

**PROBLEMA 25** A partir del gráfico adjunto determine cot θ en función de "A", "B" y "C".




**Resolución:**




Por teorema de senos en los $\Delta_s$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta_{APB} \Rightarrow \dfrac{m}{\operatorname{sen}(A-\theta)} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}(B+C)} \quad .....(1)\\ \Delta_{BPC} \Rightarrow \dfrac{m}{\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{a}{\underbrace{\operatorname{sen}(A+C)}_{\operatorname{sen} B}} \quad .....(2)\end{array}\right\} + \quad \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}(A-\theta)} = \frac{c.\operatorname{sen} B}{a.\operatorname{sen}(B+C)}$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}(A-\theta)} = \frac{2R\operatorname{sen}C.\operatorname{sen}B}{2R\operatorname{sen}A.\operatorname{sen}(B+C)} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\theta.\operatorname{sen}A}{\operatorname{sen}(A-\theta)} = \frac{\operatorname{sen}B.\operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}(B+C)}$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen}(A-\theta)}{\operatorname{sen}\theta.\operatorname{sen}A} = \frac{\operatorname{sen}(B+C)}{\operatorname{sen}B.\operatorname{sen}C}$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen}A.\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta.\operatorname{sen}A} - \frac{\operatorname{sen}\theta.\cos A}{\operatorname{sen}\theta.\operatorname{sen}A} = \frac{\operatorname{sen}B.\cos C}{\operatorname{sen}B.\operatorname{sen}C} + \frac{\operatorname{sen}C.\cos B}{\operatorname{sen}B.\operatorname{sen}C}$$

$$\Rightarrow \cot\theta - \cot A = \cot C + \cot B$$

$$\therefore \cot\theta = \cot A + \cot B + \cot C$$

team CALAPENSHKO



## PROBLEMAS PROPUESTOS

**1.** En un $\Delta_{ABC}$, reducir:

$$E = \frac{a}{b} - \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}$$

A) a B) b C) 0
D) c E) 1

**2.** En un $\Delta_{ABC}$; reducir:

$$K = (a-b)\operatorname{sen}C + (b-c)\operatorname{sen}A + (c-a)\operatorname{sen}B$$

A) 0 B) $\operatorname{sen}A \operatorname{sen}B \operatorname{sen}C$
C) $a+b+c$
D) 1 E) $a+b-c$

**3.** Hallar el mayor valor del ángulo del triángulo cuyos lados son proporcionales a los números 7; 8 y 13.

A) 45° B) 90° C) 120°
D) 60° E) 30°

**4.** Uno de los lados de un triángulo mide el doble del otro y el ángulo comprendido vale 60°. Entonces los otros dos ángulos miden:

A) 75° y 45° B) 30° y 90° C) 80° y 40°
D) 50° y 70° E) 65° y 55°

**5.** En un triángulo ABC se cumple:

$$a^2 - \frac{3}{2}bc = b^2 + c^2$$

Halle: $\tan\frac{A}{2}$

A) $\sqrt{7}$ B) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ C) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
D) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ E) $\sqrt{\frac{5}{7}}$

**6.** En un triángulo ABC, se tiene que:

$$\frac{\operatorname{sen}A}{2} = \frac{\operatorname{sen}B}{3} = \frac{\operatorname{sen}C}{4}$$

Halle el valor de: $J = \frac{b^2+c^2}{b^2-a^2}$

A) $\frac{25}{12}$ B) $\frac{25}{7}$ C) $\frac{13}{7}$
D) 5 E) $\frac{12}{5}$

**7.** Un triángulo tiene por lados tres números impares consecutivos. Si el mayor ángulo mide 120°. Hallar los lados.

A) 3; 5; 7 B) 1; 3; 5 C) 5; 7; 9
D) 11; 13; 15 E) 3; 4; 5

**8.** En un triángulo ABC se tiene que:

$$b = 2\sqrt{5}\ ;\ c = 3+\sqrt{5}\ ;\ A = 60°$$

Hallar la longitud del lado "a"

a) $3\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{6}$
D) $2\sqrt{7}$ E) $3\sqrt{5}$

**9.** Resuelva el triángulo cuando:

$$a = 2\sqrt{6}\ ;\ c = \sqrt{6}-2\sqrt{3}\ ;\ b = 75°$$

A) $A = 75°\ ;\ C = 30°\ ;\ b = 2\sqrt{6}$
B) $A = 30°\ ;\ C = 75°\ ;\ b = 2\sqrt{6}$
C) $A = 60°\ ;\ C = 45°\ ;\ b = \sqrt{2}-\sqrt{3}$
D) $A = 60°\ ;\ C = 45°\ ;\ b = \sqrt{6}-\sqrt{2}$
E) $A = 45°\ ;\ C = 60°\ ;\ b = 4\sqrt{6}$

**10.** En un triángulo ABC, hallar la medida del ángulo "A" si se cumple:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A} = \frac{b}{\cos B} = \frac{c}{\operatorname{sen}(70°-C)}$$

A) 90° B) 100° C) 120°
D) 70° E) 35°

**11.** En un triángulo ABC, se cumple:

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=\sqrt{2}\ ;\ B-C=90°$$

Hallar: $E=2\tan A\,.\cos(B+C)$

A) $\sqrt{3}$ B) $-\sqrt{3}$ C) $\sqrt{6}$
D) $-\sqrt{6}$ E) $-\sqrt{2}$

**12.** En un triángulo ABC se cumple:

$$\frac{b\,sen A}{c-a\cos B}+\frac{a\,sen C}{b-c\cos A}+\frac{c\,sen B}{a-b\cos C}=\tan A.\tan B$$

Halle el valor de: $M=\cot C+sen2C$

A) 0 B) 1 C) 2
D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{4}{7}$

**13.** Simplificar la expresión siguiente:

$$k=a(b\cos C-c\cos B)$$

en un triángulo ABC.

A) b – c B) abc C) ab – bc
D) $b^2+c^2$ E) $b^2-c^2$

**14.** En un triángulo ABC se tiene que: $2a=7b$ $\wedge$ $m\angle C=60°$. Halle el valor de:

$$\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

A) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{5\sqrt{3}}{9}$ C) $\frac{9\sqrt{3}}{5}$
D) $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{2\sqrt{3}}{7}$

**15.** Determine el valor de: $\frac{a}{\cos A}+\frac{b}{\cos B}+\frac{c}{\cos C}$ si: $\tan A\,.\,\tan B\,.\,\tan C=R$, siendo "R" la medida del radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.

A) $2R^2$ B) $R^2$ C) $\frac{R^2}{2}$
D) R E) 2R

**16.** En un triángulo rectángulo ABC, (recto en A) cuya área de su región triangular es "S", escribir en función del área la siguiente expresión:

$$V=\frac{(c^2-b^2)\tan B\,sen^2 C}{\cos^2 B-sen^2 B}$$

A) S B) 2S C) 3S
D) 4S E) 5S

**17.** En un triángulo ABC, se cumple:

$$\cos(A+B)=\frac{a}{b}$$

Hallar: $M=\tan^2 C+\cot A\,.\,\tan C$

A) –1 B) 2 C) –2
D) –3 E) –4

**18.** En cualquier triángulo, la suma:

$$\frac{b^2-c^2}{\cos B+\cos C}+\frac{c^2-a^2}{\cos C+\cos A}+\frac{a^2-b^2}{\cos A+\cos B}$$

es igual:

A) 0 B) 1 C) abc
D) a + b E) a + b + c

**19.** En un triángulo ABC, reducir la expresión:

$$K=\frac{a\cos(67°-B)+b\cos(67°+A)}{c}$$

A) cos23° B) tan23° C) tan67°
D) sen67° E) cos67°

**20.** En un triángulo ABC se cumple:

$$\frac{a\,sen(B-C)}{b\cos B+c\cos C}+\frac{b\,sen(C-A)}{a\cos A+c\cos C}=\frac{2c\,sen(A-B)}{a\cos A+b\cos B}$$

Hallar:

$$M=\tan(B-C)\tan(C-A)$$

Siendo: $A\neq B\neq C$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) $\frac{3}{2}$

team CALAPENSHKO

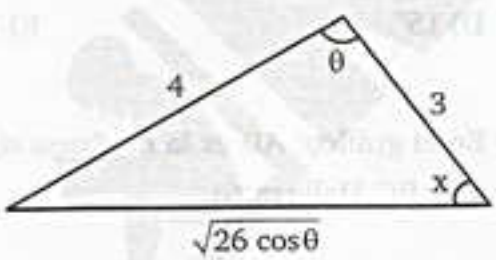

**21.** 2 arc cot 3 y 2 arc cot 5, son ángulos interiores de un triángulo. Hallar el área de la región triangular, sabiendo que su perímetro es $4\sqrt{5}$ u

A) $\frac{7}{4}$ u$^2$ B) $\frac{7}{3}$ u$^2$ C) $\frac{1}{3}$ u$^2$
D) $\frac{14}{3}$ u$^2$ E) $\frac{2}{5}$ u$^2$

**22.** En un triángulo ABC el m∠C mide 60° y los lados: $a=2\sqrt{3}+\sqrt{2}$ ; $b=2\sqrt{3}-\sqrt{2}$
Hallar m∠A

A) $\frac{\pi}{3}-\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
B) $\frac{\pi}{6}+\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
C) $\pi-\arctan(3\sqrt{3}+4\sqrt{2})$
D) $\pi-\arctan(4\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6})$
E) $\arctan(\sqrt{2})$

**23.** De la figura adjunta hallar: $13\,\text{sen}^2x$




A) 12 B) 10 C) 9
D) 8 E) 7

**24.** En un triángulo ABC se tiene los siguientes datos:

$a=3$ ; $b=2$ ; $A=B+30°$

$\cos2A+\cos2B=-0{,}25\sqrt{3}$

Hallar la longitud de la mediana relativa al lado C.

A) 1 B) 2 C) 0,5
D) 3 E) 4

**25.** En un cuadrilátero sus lados son: 4; 5; 6 y 7, la suma de las medida de dos ángulos opuestos es 120°. Hallar el área de la región cuadrangular.

A) $3\sqrt{65}$ cm$^2$ B) $3\sqrt{70}$ C) $3\sqrt{73}$
D) $3\sqrt{71}$ E) $3\sqrt{67}$

**26.** En un triángulo ABC, se cumple que:

$$a\cos^2\frac{C}{2}+c\cos^2\frac{A}{2}=kb$$

Hallar el valor de:

$$\cos\frac{A}{2}\cdot\csc\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$$

A) k B) k/2 C) 2k
D) k − 1 E) k + 1

**27.** Hallar la expresión que determina el valor de $\text{sen}\,\frac{A}{2}$, en un cuadrilátero inscriptible ABCD.

A) $\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{ad-bc}}$ B) $\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ad+bc}}$
C) $\sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{ad+bc}}$
D) $\sqrt{\frac{p(p-b)}{ad+bc}}$ E) $\sqrt{\frac{p(p-a)}{ad-bc}}$

**28.** En un triángulo ABC, se tienen $b+c=7$m, $a=5$ m. Hallar el producto de las distancias de los vértices B y C a la bisectriz exterior de A.

A) 20 B) 24 C) 25
D) 6 E) 7

**29.** Si el circunradio de un triángulo ABC mide 5 cm, además se cumple:

$\text{sen}(A-B)=2\cos A\cos B$ .....(I)
$\text{sen}(C-B)=\cos B\cos C$ .....(II)

Hallar el área de la región triangular ABC.

A) 10 cm$^2$ B) 20 cm$^2$ C) 30 cm$^2$
D) 50 cm$^2$ E) 60 cm$^2$

**30.** Hallar el radio del círculo inscrito entre el incírculo de radio r y los lados que contiene el ángulo A de un triángulo ABC.

A) $r\tan^2\left(\frac{\pi+A}{2}\right)$ B) $r\tan^2\left(\frac{\pi-A}{2}\right)$

C) $r\tan^2\left(\frac{\pi+A}{4}\right)$

D) $r\tan^2\left(\frac{\pi-A}{4}\right)$ E) $r\tan^2\frac{A}{2}$

**31.** Al dividir el circunradio de un triángulo, con el circunradio de su triángulo órtico, se obtiene;

A) 2 B) 1 C) 3
D) 4 E) 1,5

**32.** En un triángulo ABC, se cumple que:

$\cot\frac{C}{2}=7\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)$ ; $a=12$ u ; $c=7$ u

Hallar la medida del ángulo B

A) $\arctan\frac{2}{3}$ B) $\arctan\frac{\sqrt{5}}{2}$

C) $\arctan\frac{3}{2}$

D) $\arctan\sqrt{5}$ E) $\arctan\frac{\sqrt{5}}{5}$

**33.** Si el área de una región triangular ABC es "S" reduzca:

$E = \text{sen}2A + \text{sen}2B + \text{sen}2C$

R: radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.

A) $\frac{2S}{R^2}$ B) $\frac{S}{R^2}$ C) $\frac{S}{2R^2}$

D) $\frac{2S}{3R^2}$ E) $\frac{3S}{R^2}$

**34.** Para hallar el área(s) de una región triangular, tenemos las siguientes relaciones:

I. $S=\left(\frac{1}{2}\right)a^2\,\text{sen}B\,\text{sen}C\csc A$

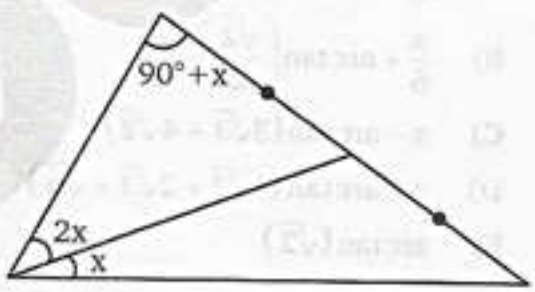
II. $S = Rr(\text{sen}A + \text{sen}B + \text{sen}C)$

III. $S=\frac{2abc}{a+b+c}\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)$

de las cuales son ciertas:

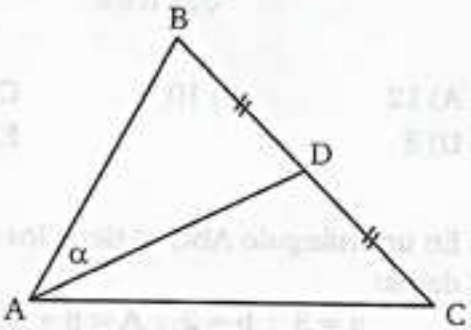
A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III
D) I y II E) Todas

**35.** Del gráfico, hallar la medida de "x".




A) 9° B) 10° C) 12°
D) 15° E) 18°

**36.** En el gráfico; AD es la mediana relativa al lado BC. Halle $m\angle\alpha$




A) $\text{arc cot}(\text{cot}A + 2\text{cot}B)$
B) $\text{arc cot}(2\text{cot}A + \text{cot}B)$
C) $\text{arc cot}(\text{cot}A + \text{cot}B + \text{cot}C)$
D) $\text{atctan}(\text{cot}A + 2\text{cot}B)$
E) $\arctan(2\text{cot}A + \text{cot}B)$

team CALAPENSHKO


**37.** En un triángulo ABC, inscrito en la circunferencia trigonométrica, se cumple:

$$a\cot A = 2\cos x \operatorname{sen} y \quad ....(i)$$
$$b\cot B = 2\cos y \operatorname{sen} z \quad ....(ii)$$
$$c\cot C = 2\cos z \operatorname{sen} x \quad ....(iii)$$

Hallar:

$$M = \tan x \,.\, \tan y \,.\, \tan z$$

A) 1 B) 2 C) $\pm 1$
D) $\pm 2$ E) $\sqrt{2}$

**38.** En un triángulo ABC se cumple $\angle A = 60°$; $V_A = \frac{8\sqrt{3}}{5}$ y el área dela región triangular. $4\sqrt{3}$ .Hallar:

$$\left|\tan\left(\frac{C-B}{2}\right)\right|$$

($V_A$: bisectriz interior relativa al $\angle A$)

A) $\frac{3\sqrt{3}}{5}$ B) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{5}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

**39.** Si: $r_1$, $r_2$ y $r_3$ son las medidas de los ex-radios de un $\Delta$ABC. (P: semiperímetro)

$$\frac{P(r_1 + r_2 + r_3)}{(r_2r_3 + r_3r_1 + r_1r_2)}$$

es igual a:

A) $\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}$
B) $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}$
C) 1
D) $\sqrt{2}$
E) 2

**40.** En un triángulo ABC se cumple $\angle A = 45°$; $V_A = \frac{4}{5}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ y el área de la región triangular ABC es $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ ($V_A$: bisectriz interior relativo al ángulo A)

Hallar:

$$\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

A) $\frac{3}{5}(\sqrt{2}+1)$ B) $\frac{3}{5}(\sqrt{2}-1)$
C) $\frac{\sqrt{2}+1}{5}$
D) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ E) $\frac{4}{5}(\sqrt{2}+1)$

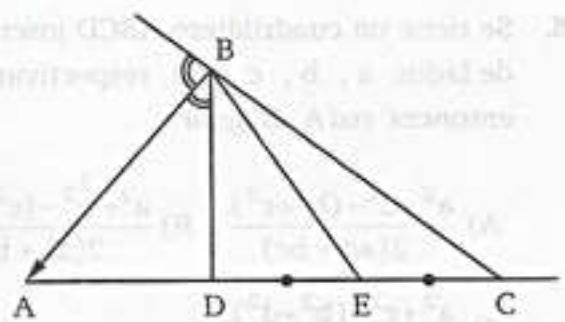
**41.** En un triángulo ABC, simplifique:

$$E = p(r\cot A + r_a\cot B) - a\,.\,r_a\cot B$$

siendo:
r : medida del radio del triángulo ABC
$r_a$: medida del ex - radio relativo al lado "a"

A) $\frac{a^2}{2}$ B) $\frac{b^2}{2}$ C) c
D) $\frac{c^2}{2}$ E) $a^2$

**42.** En la figura mostrada, hallar la medida de $\overline{AB}$ si BD = 3 ; BE = $\frac{\sqrt{19}}{2}$ y BC = 5




A) 15 u B) $7{,}5\sqrt{3}$ u C) $2\sqrt{3}$ u
D) $1{,}87\sqrt{3}$ u E) $9\sqrt{3}$ u

**43.** En un triángulo ABC la bisectriz exterior relativa al lado "a" mide 14 m. Halle la longitud de la bisectriz interior relativa al mismo lado, si además: $m\angle B - m\angle C = 16°$.

A) 7 m B) 4 C) 6
D) 5 E) 2

**44.** Se tiene un prisma triangular regular ABC – A'B'C', cuya arista de la base mide "a". Se ubican los puntos medios M y N de AB y BC respectivamente. Si los segmentos C'M y A'N forman un ángulo agudo que mide "θ". Hallar el volumen del prisma.

A) $\frac{3a^3}{16}\sqrt{3\cot^2\frac{\theta}{2}-1}$ B) $\frac{2a^3}{9}\sqrt{3\cot^2\frac{\theta}{2}+1}$
C) $\frac{4a^3}{15}\sqrt{1+\cot^2\theta}$
D) $\frac{5a^3}{12}\sqrt{2\cot^2\theta+1}$ E) $\frac{a^3}{8}\sqrt{\cot^2\theta+1}$

**45.** En un triángulo ABC, se tiene la relación:

$$0{,}5a\,\text{sen}\left(\frac{B-C}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{b-c}{2}\right)\text{sen}\frac{A}{2}$$

Hallar la medida del ex – radio relativo al lado a, si el perímetro de triángulo ABC es 12.

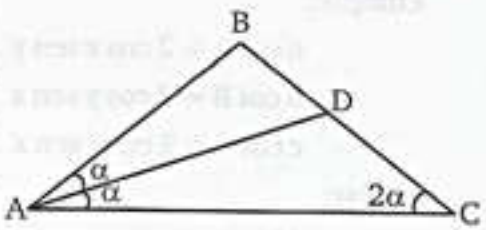
A) $2\sqrt{2}$ B) 3 C) 2
D) $3\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2}$

**46.** Se tiene un cuadrilátero ABCD inscriptible de lados a, b, c y d respectivamente, entonces cos A es igual a:

A) $\frac{a^2+d^2-(b^2+c^2)}{2(ad+bc)}$ B) $\frac{a^2+b^2-(c^2+d^2)}{2(ad+bc)}$
C) $\frac{a^2+c^2-(b^2+d^2)}{2(ad+bc)}$
D) $\frac{a^2+d^2-(b^2+c^2)}{2(ab+cd)}$ E) $\frac{a^2+d^2-(b^2+c^2)}{2(ac+bd)}$

**47.** Del gráfico mostrado, hallar "AB" siendo: AD = 6; AC = 5.

A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 40°
E) 50°




**48.** Las longitudes de los lados de un triángulo ABC están en progresión aritmética (a < b < c) las bisectrices interiores y exteriores son: $V_a$ ; $V_b$ ; $V_c$ ; $V'_a$ ; $V'_b$ ; $V'_c$

Reducir: $k=\dfrac{\frac{V'_a}{V_a}\cot\frac{A}{2}+\frac{V'_c}{V_c}\cot\frac{C}{2}}{\frac{V'_b}{V_b}\cot\frac{B}{2}}$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

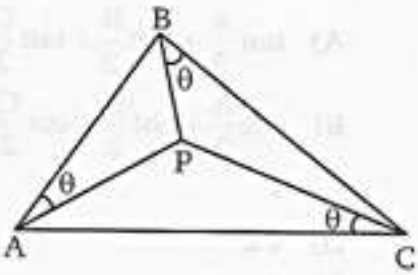
**49.** En un triángulo ABC se tiene que: $m_a$, mediana relativa al lado a, además: $b + c = 2k - 2m_a$ Hallar: $\cos\frac{A}{2}$

A) $\sqrt{\frac{(k-a)(k-c)}{ac}}$ B) $\sqrt{\frac{(k-a)(k-b)}{ab}}$
C) $\sqrt{\frac{(k-b)(k-c)}{bc}}$
D) $\sqrt{\frac{(k+b)(k-c)}{bc}}$ E) $\sqrt{\frac{(k-b)(k+c)}{bc}}$

**50.** Del gráfico: El punto "P" es el punto de "Brocart" (es un punto cualquiera). Hallar:

$$\csc^2 A + \csc^2 B + \csc^2 C$$

A) $\tan\theta+1$
B) $\tan 2\theta+1$
C) $\cot\theta+1$
D) $\cot 2\theta+1$
E) $\cot^2\theta+1$



team CALAPENSHKO

Capítulo 16

# Geometría Analítica

**CAPACIDADES**

- Reconocer el sistema de ejes coordenados y ubicar en los pares ordenados.
- Determinar la longitud entre dos puntos, dividir un segmento y calcular el área de una región poligonal.

## PRECURSORES DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

El profesor parisino Nicole Oresmes (1328-1382) llegó a utilizar en una de sus obras coordenadas rectangulares, aunque de forma rudimentaria, para la representación gráfica de ciertos fenómenos físicos.

En el siglo XV, época de las grandes navegaciones, la trigonometría fue separada de la astronomía, alzándose como ciencia independiente de la mano de Regiomontano (1436-1474), que trató de una manera sistemática todos los problemas sobre la determinación de triángulos planos y esféricos. Asimismo en esta obra se establece un notable cambio desde el álgebra literal al álgebra simbólica.

Las puertas a la Geometría Analítica fueron abiertas, ya en el siglo XVII por Descartes y Fermat, pero sólo incluían problemas planos.

PIERRE DE FERMAT
ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA

En el siglo XVI, un avance importante en el álgebra fue la introducción, de símbolos para las incógnitas y para las operaciones y potencias algebraicas. Debido a este avance, el Libro III de la Geometría (1637), escrito por el matemático y filósofo francés René Descartes se parece bastante a un texto moderno de álgebra.

En el siglo XIX, en los tiempos de Gauss, el álgebra había entrado en su etapa moderna. Las ecuaciones polinómicas entraron al estudio de la estructura de sistemas matemáticos abstractos, cuyos axiomas estaban basados en el comportamiento de objetos matemáticos, como los números complejos, que los matemáticos habían encontrado al estudiar las ecuaciones polinómicas. Los grupos comenzaron como sistemas de permutaciones y combinaciones de las raíces de polinomios, pero evolucionaron para llegar a ser uno de los más importantes conceptos unificadores de las matemáticas. Fue Euler quien, en 1748, sistematizó la geometría analítica de una manera formal. En primer lugar expuso el sistema de la geometría analítica en el plano, introduciendo además de las coordenadas rectangulares en el espacio, las oblicuas y polares.

En segundo lugar, estudió las transformaciones de los sistemas de coordenadas. También clasificó las curvas según el grado de sus ecuaciones, estudiando sus propiedades generales. En el siglo XVIII se completó el conjunto de las disciplinas geométricas y, excluyendo sólo las geometrías no euclideanas y la apenas iniciada geometría analítica, prácticamente todas las ramas clásicas de la geometría, se formaron en este siglo.

team CALAPENSHKO

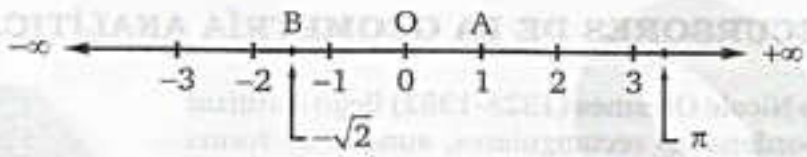

## INTRODUCCIÓN

El hombre en su afán de encontrar soluciones para los problemas que se planteaban a lo largo de su existencia, a creado diversos métodos, uno de ellos es el de la geometría analítica, en la cuál se hace un enfoque de los conceptos de punto, recta, circunferencia etc, dicho enfoque combina a la geometría con los métodos del álgebra.

# GEOMETRÍA ANALÍTICA

## RECTA NUMÉRICA

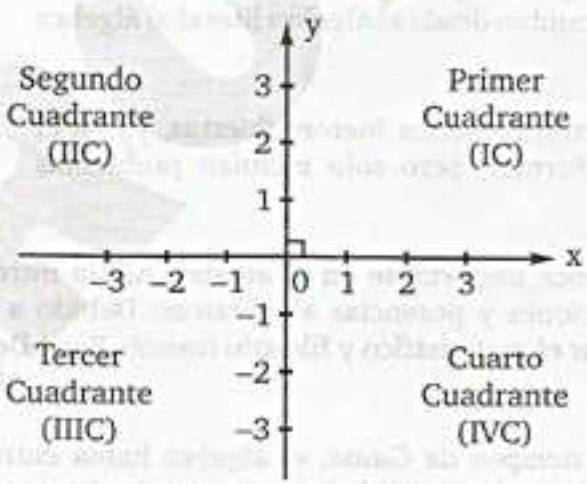
Es la representación geométrica de los números reales, donde a cada punto le corresponde un número real y viceversa




Donde:
- 0 : origen
- 1 : es la coordenada del punto A
- $-\sqrt{2}$ : es la coordenada del punto B

## PLANO CARTESIANO

Es aquel plano formado por dos rectas numéricas perpendiculares entre si en su origen.




Donde:
- 0 : origen de coordenadas
- x : eje abscisas
- y : eje de ordenadas

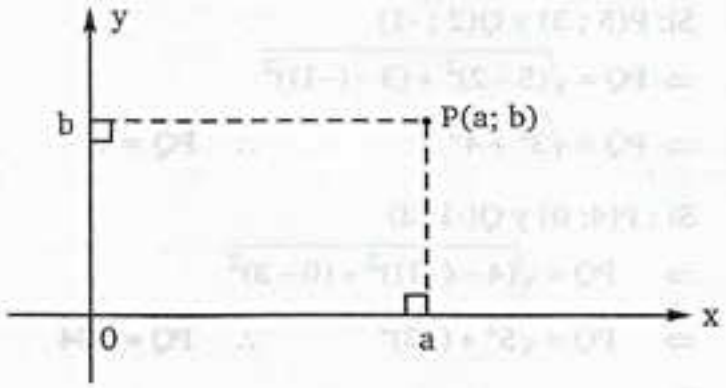
Los semiplanos determinados por los ejes de coordenadas se llaman cuadrantes.

## UBICACIÓN DE UN PUNTO EN EL PLANO CARTESIANO

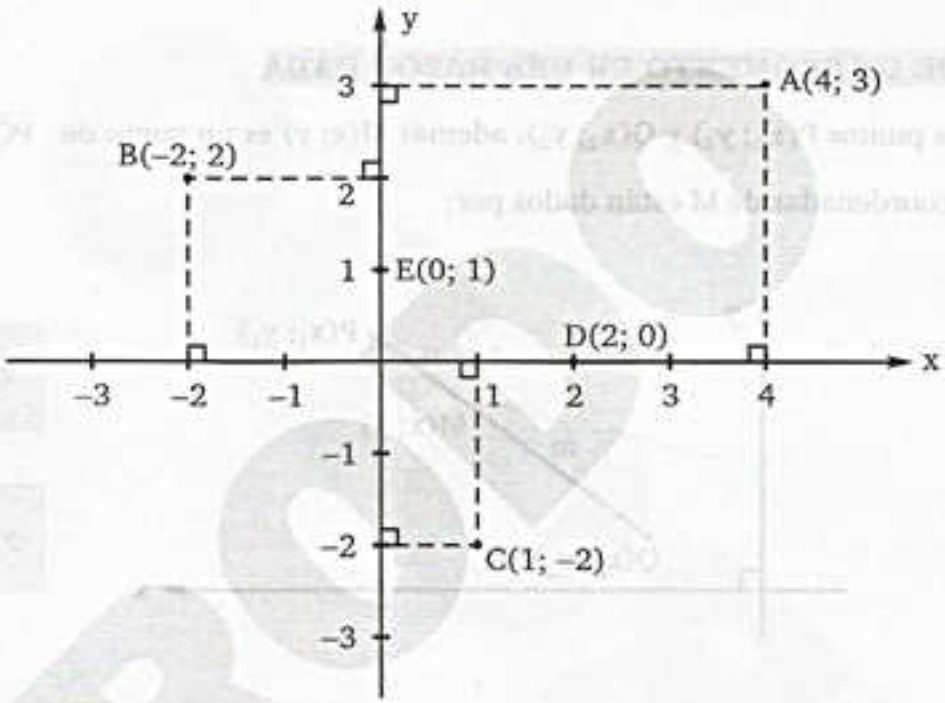
A todo punto en el plano se le asocia un par ordenado y viceversa, dicho par se representa por P(a; b)

Donde:
- a : abscisa de P
- b : ordenada de P

team CALAPENSHKO


**Ejemplo:**

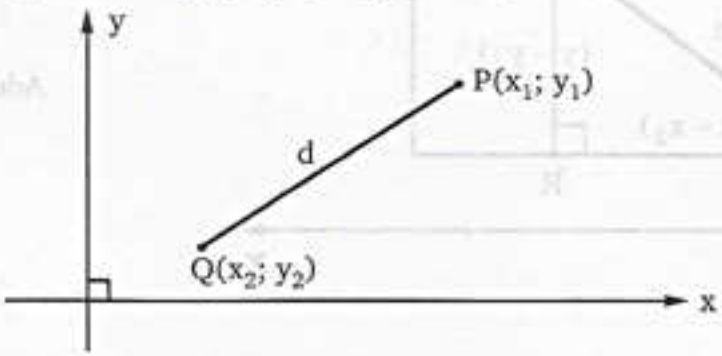



**NOTA**

- Todo punto sobre el eje x tiene por ordenada cero.
- Todo punto sobre el eje y tiene por abscisa cero.

## DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

La distancia entre los puntos $P(x_1 ; y_1)$ y $Q(x_2; y_2)$ es: PQ




$$d = PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

team CALAPENSHKO


**Ejemplos:**

- Si: P(5 ; 3) y Q(2 ; -1)

$\Rightarrow PQ = \sqrt{(5-2)^2 + (3-(-1))^2}$

$\Rightarrow PQ = \sqrt{3^2 + 4^2}$ $\quad \therefore \quad \mathbf{PQ = 5}$

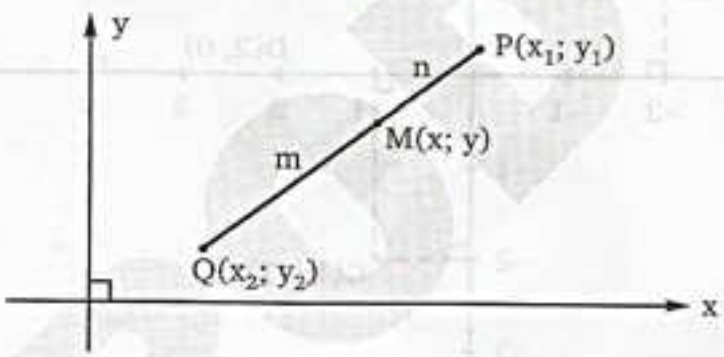
- Si : P(4; 0) y Q(-1; 3)

$\Rightarrow \quad PQ = \sqrt{(4-(-1))^2 + (0-3)^2}$

$\Rightarrow \quad PQ = \sqrt{5^2 + (-3)^2}$ $\quad \therefore \quad \mathbf{PQ = \sqrt{34}}$

## DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA

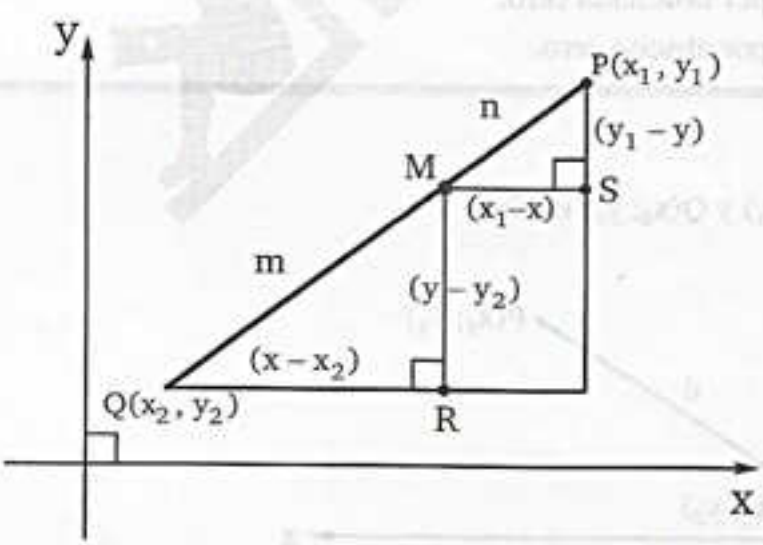
Sean los puntos $P(x_1; y_1)$ y $Q(x_2; y_2)$, además $M(x; y)$ es un punto de $\overline{PQ}$ tal que $\frac{PM}{MQ} = \frac{n}{m}$, entonces las coordenadas de M están dados por:




$$x = \frac{mx_1 + nx_2}{m+n}$$

$$y = \frac{my_1 + ny_2}{m+n}$$

**Demostración:**




Los $\triangle MRQ$ y $\triangle PSM$ son semejantes:

$$\rightarrow \frac{y_1 - y}{n} = \frac{y - y_2}{m}$$

$$y_1 m - ym = yn - y_2 n$$

$$\therefore \quad y = \frac{my_1 + ny_2}{m+n}$$

Además:

$$\frac{x_1 - x}{n} = \frac{x - x_2}{m}$$

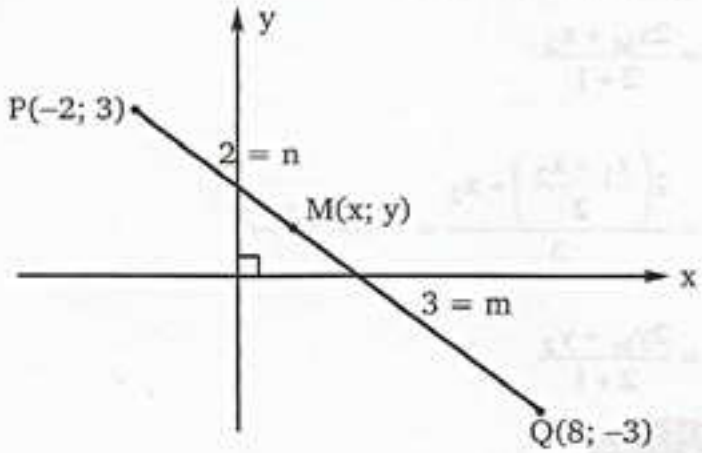
$$mx_1 - mx = nx - nx_2$$

$$\therefore \quad x = \frac{mx_1 + nx_2}{m+n}$$

**Ejemplo:** Hallar las coordenadas del punto M que se encuentra sobre el segmento $\overline{PQ}$, tal que 3(PM) = 2MQ Dato: P(-2; 3), Q(8; -3)

team CALAPENSHKO


**Resolución:**




$$\frac{PM}{MQ} = \frac{2}{3}$$

Entonces:

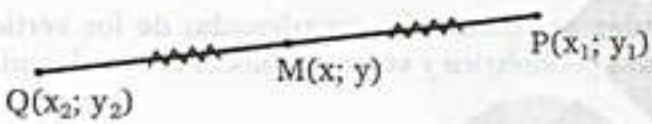
$$x = \frac{3(-2)+2(8)}{3+2} = 2$$

$$y = \frac{3(3)+2(-3)}{3+2} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \ M\left(2; \frac{3}{5}\right)$$

## COORDENADAS DEL PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

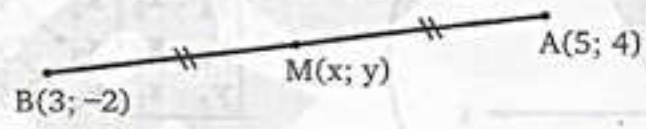
En el caso particular m = n tenemos que "M" es el punto medio de $P(x_1; y_1)$ y $Q(x_2; y_2)$




$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

**Ejemplo:** Hallar las coordenadas del punto medio del segmento AB; si A(5; 4) y B(3; -2)

**Resolución:** Sea M(x; y) el punto medio de AB entonces:

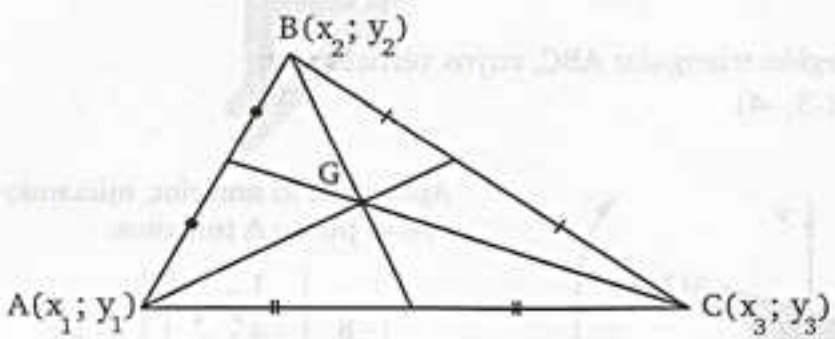



$$x = \frac{5+3}{2} = 4$$

$$y = \frac{4+(-2)}{2} = 1$$

$$\therefore \ M(4; 1)$$

## COORDENADAS DEL BARICENTRO DE UN TRIÁNGULO




Sea: G (x; y)

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$Y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

**Demostración:**

Sea $M(x_M, y_M)$ punto medio de AC:

$$\rightarrow x_M = \frac{x_1 + x_3}{2} \wedge y_M = \frac{y_1 + y_3}{2}$$

Debido a que G es baricentro: $BG = 2\,GM$

Por división de un segmento en una razón dada

$$* \quad x = \frac{2x_M + x_2}{2+1}$$

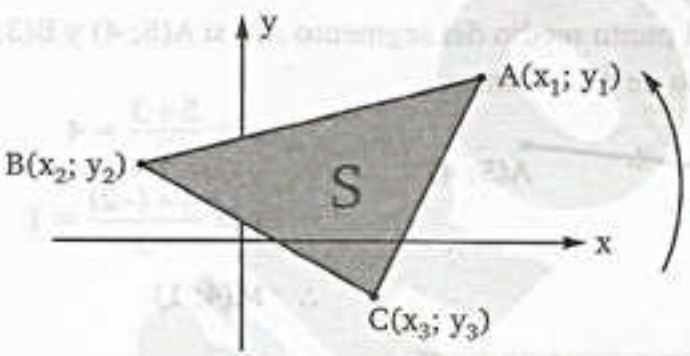
$$x = \frac{2\left(\frac{x_1 + x_3}{2}\right) + x_2}{3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$* \quad y = \frac{2y_M + y_2}{2+1}$$

$$y = \frac{2\left(\frac{y_1 + y_3}{2}\right) + y_2}{3} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

## ÁREA DE UNA REGIÓN TRIANGULAR

Para hallar el área (S) de una región triangular, se colocan las coordenadas de los vértices y seguimos un sentido antihorario hasta cerrar la figura geométrica y volver a colocar la coordenada del primer vértice escogido.



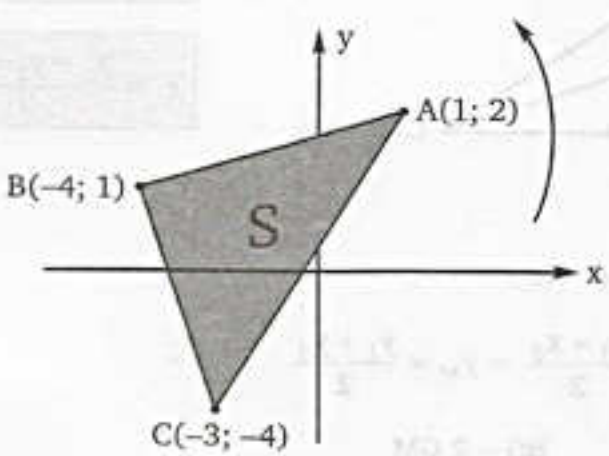

Procedemos como a continuación:

$$\begin{array}{c|c|c} & \begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{matrix} & \\ (+)\begin{matrix} y_1 \cdot x_2 \\ y_2 \cdot x_3 \\ y_3 \cdot x_1 \end{matrix} & & \begin{matrix} x_1 \cdot y_2 \\ x_2 \cdot y_3 \\ x_3 \cdot y_1 \end{matrix}(+) \\ \hline \text{I} & & \text{D} \end{array}$$

Luego: $\boxed{S = \frac{D - I}{2}}$

**Ejemplo:** Hallar el área de la región triangular ABC, cuyos vértices son:
A(1; 2) ; B(-4; 1) ; C(-3; -4)

**Resolución:**




Aplicando lo anterior, iniciando con el punto A tenemos:

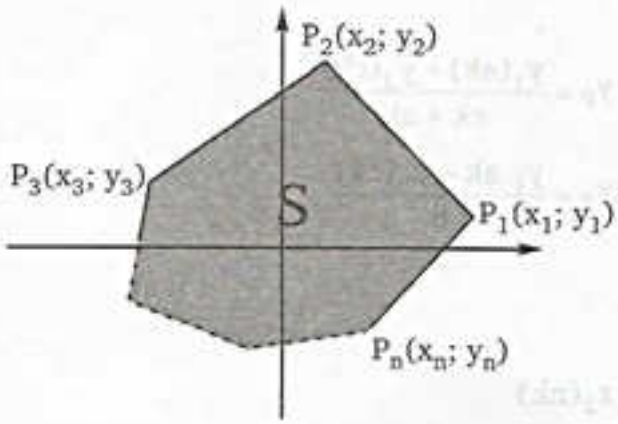
$$\begin{array}{c|c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \\ -3 & -4 \\ 1 & 2 \end{matrix} & \\ (+)\begin{matrix} -8 \\ -3 \\ -4 \end{matrix} & & \begin{matrix} 1 \\ 16 \\ -6 \end{matrix}(+) \\ \hline -15 & & 11 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{11 - (-15)}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{S = 13\ u^2}$$

team CALAPENSHKO

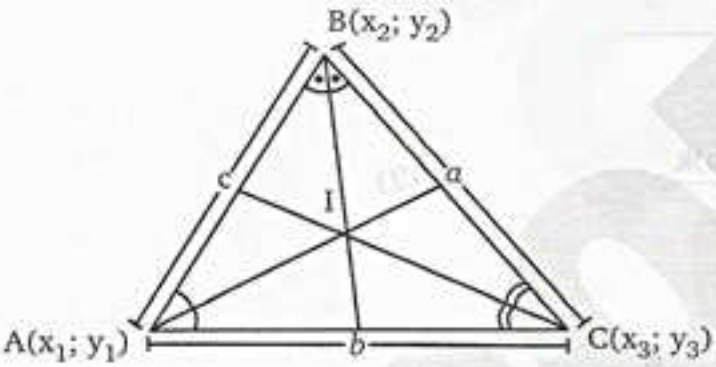

## ÁREA DE UNA REGIÓN PLANA




$$+\left\{\begin{array}{l|l|l} y_1 \cdot x_2 & \begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{matrix} & x_1 \cdot y_2 \\ y_2 \cdot x_3 & & x_2 \cdot y_3 \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ y_n \cdot x_n & & x_n \cdot y_1 \end{array}\right\}+$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{|D - I|}{2}$$

## COORDENADAS DEL INCENTRO DE UN TRIÁNGULO




Sea: I (x ; y)

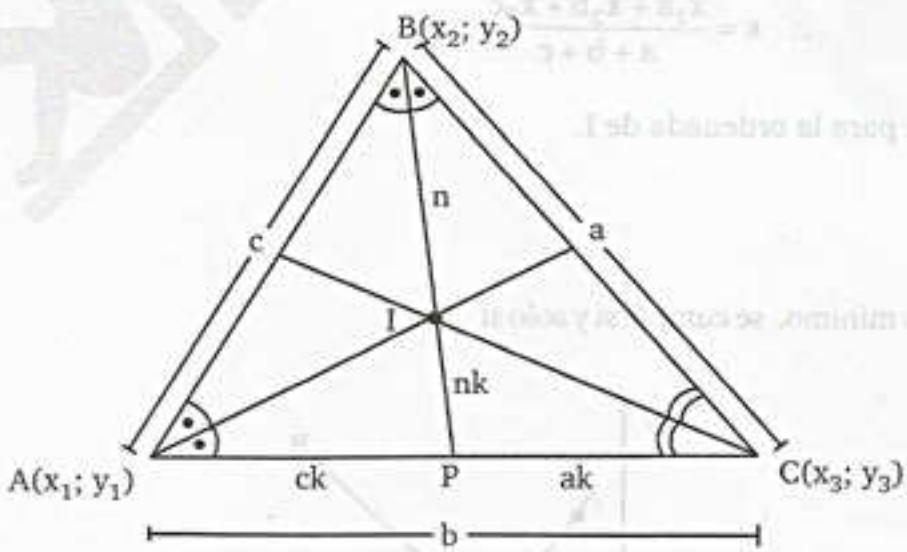
$$x = \frac{a(x_1) + b(x_2) + c(x_3)}{a + b + c}$$

$$y = \frac{a(y_1) + b(y_2) + c(y_3)}{a + b + c}$$

**Demostración:**

Sea I(x, y) el incentro.

* Por la propiedad de la bisectriz (BP)




$$\Rightarrow ck + ak = b \Rightarrow \boxed{k = \frac{b}{a+c}} \qquad ...(1)$$

* En el ΔABP también aplicamos la propiedad de la bisectriz.
* Hallamos las coordenadas de "P" en AC:

$$x_P = \frac{x_1(ak) + x_3(ck)}{ck + ak} \qquad y_P = \frac{y_1(ak) + y_3(ck)}{ck + ak}$$

$$x_P = \frac{x_1(ak) + x_3(ck)}{b} \qquad y_P = \frac{y_1\ ak + y_3(ck)}{b}$$

Hallamos las coordenadas de I en BP

$$x = \frac{\left(\frac{x_1(ak) + x_3(ck)}{b}\right)n + x_2(nk)}{nk + n}$$

Cancelando "n": $$x = \frac{\frac{x_1(ak) + x_3(ck)}{b} + x_2k}{k + 1}$$

Efectuando: $$x = \frac{(x_1a + x_3c + x_2b)k}{b(k + 1)} \qquad ...(2)$$

Reemplazando (1) en (2):

$$x = \frac{(x_1a + x_3c + x_2b)\frac{b}{a + c}}{b\left(\frac{b}{a + c} + 1\right)}$$

Se obtiene:

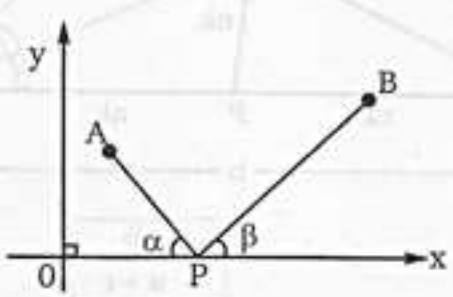
$$\therefore\ x = \frac{x_1a + x_2b + x_3c}{a + b + c}$$

Análogamente para la ordenada de I.

**PROPIEDAD:**

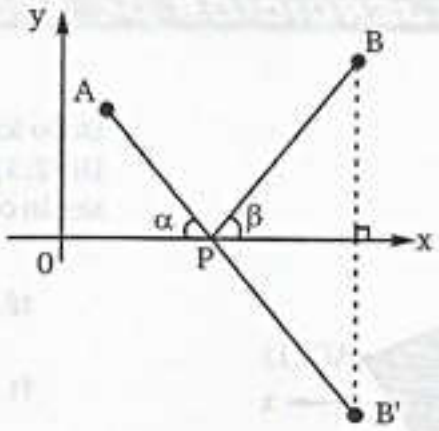
i) Si (AP + PB) es mínimo, se cumple si y solo si

$\alpha = \beta$



team CALAPENSHKO


**Demostración:**




Trazamos el simétrico de B respecto de x, entonces PB = PB'

Como se quiere AP + PB mínimo → AP + PB' es mínimo también.

Entonces la mínima distancia entre A y B' es la línea recta:

$$\Rightarrow \angle APO = \angle B'PX$$

pero $\angle B'PX = \angle BPX$

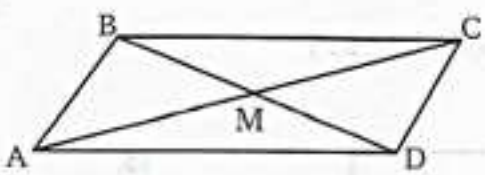
ya que B' es simétrico de B respecto de x.

$$\Rightarrow \alpha = \beta$$

ii) Paralelogramo

$$x_1 + x_3 = x_2 + x_4 \qquad y_1 + y_3 = y_2 + y_4$$

**Demostración:**




Trazamos las diagonales y estas se cortan en el punto medio $M(x_M, y_M)$.

Es decir M es punto medio de BD y AC

$$\rightarrow x_M = \frac{x_1 + x_3}{2} = \frac{x_2 + x_4}{2}$$

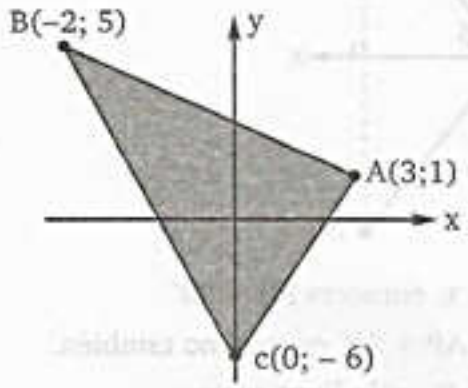
$$\therefore x_1 + x_3 = x_2 + x_4$$

$$\rightarrow y_M = \frac{y_1 + y_3}{2} = \frac{y_2 + y_4}{2}$$

$$\therefore y_1 + y_3 = y_2 + y_4$$

## EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Del gráfico determinar:




1. d $\overline{AB}$ =
2. d $\overline{BC}$ =
3. d $\overline{AC}$ =
4. Perimetro del Δ =
5. Área del Δ =
6. Baricentro del Δ =

Dados los puntos A(1;3), B(5;2), C(7;2) y D(–5;–3); determinar

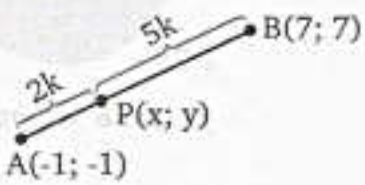
7. Punto medio de $\overline{AB}$ =
8. Punto medio de $\overline{BC}$ =
9. Punto medio de $\overline{AC}$ =

Dado los puntos A (8; 2); B (–1; 3); C (6; 3) y D(–2;3); indicar: Verdadero (V) ó Falso (F) según corresponda.

10. d $\overline{AB}$ > d $\overline{AC}$ ..... ( )
11. d $\overline{AD}$ > d $\overline{DC}$ ..... ( )
12. d $\overline{BD}$ = d $\overline{BC}$ ..... ( )

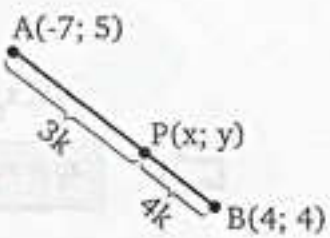
Determine las coordenadas de P.

13.



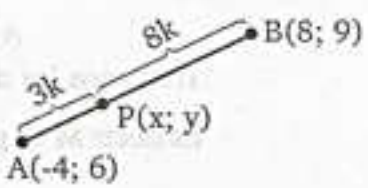

⇒ P(x; y) =

14.




⇒ P(x; y) =

15.




⇒ P(x; y) =

team CALAPENSHKO


## PROBLEMAS RESUELTOS

**PROBLEMA 1** Determine el perímetro y el área de la región triangular equilátera ABC; si A(1; 1); B(7; 9)

**Resolución:** El área (S) y el perímetro (2p) de un triángulo equilátero se calculan así:

$$S = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \quad \ldots\ldots (i)$$

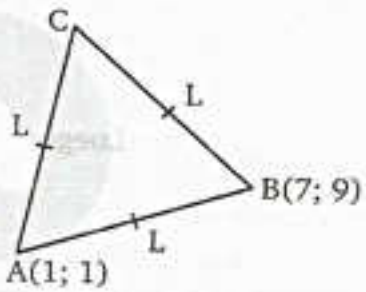
$$2p = 3L \quad \ldots\ldots (ii)$$

Donde "L" es el lado del triángulo.

Calculo de L:

$$L = AB = \sqrt{(7-1)^2 + (9-1)^2}$$

$$\Rightarrow \quad L = 10$$

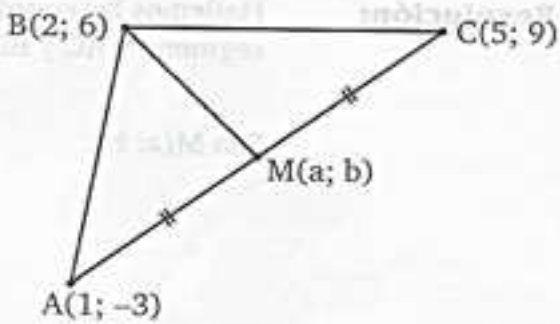



En (i): $\therefore \quad S = 25\sqrt{3}\ u^2$

En (ii) $\therefore \quad \mathbf{2p = 30\ u}$

**PROBLEMA 2** Siendo A(1; -3), B(2; 6) y C(5; 9) las coordenadas de los vértices de un triángulo. Determine la longitud de la mediana relativa al lado AC.

**Resolución:** Hallamos las coordenadas de M (punto medio de $\overline{AC}$)




$$a = \frac{1+5}{2} = 3\ ;\ b = \frac{-3+9}{2} = 3$$

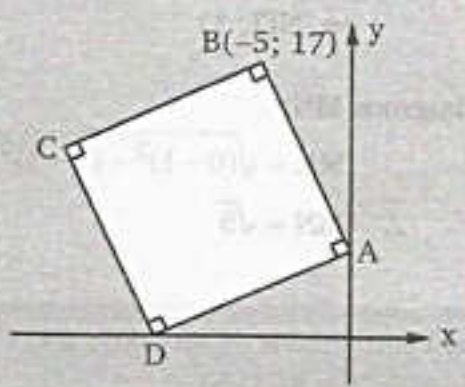
$\Rightarrow M(3; 3)$

Luego:

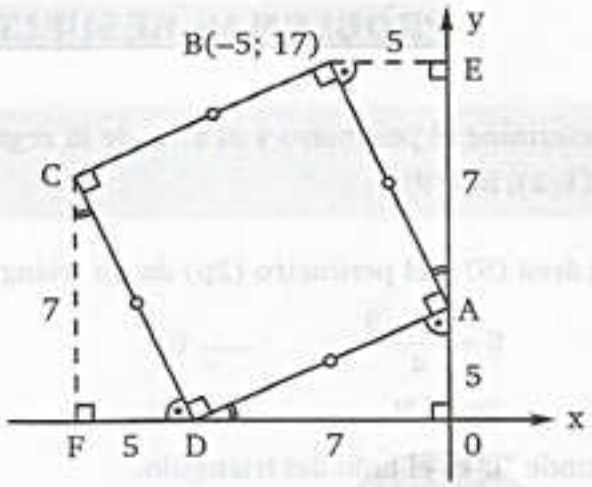
$$BM = \sqrt{(2-3)^2 + (6-3)^2}$$

$\therefore \mathbf{BM = \sqrt{10}}$

**PROBLEMA 3** Si ABCD es un cuadrado, determine las coordenadas de los vértices A, C y D.



**Resolución:**




$\triangle AEB \cong \triangle DOA \cong \triangle CFD$

Luego:

**A(0; 5) ; D(-7; 0) ; C(-12; 7)**

**PROBLEMA 4** Determine la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales de un cuadrilátero ABCD, sabiendo que: A(–4; 3), B(–3; 4), C(4; 3) y D(5; –2)

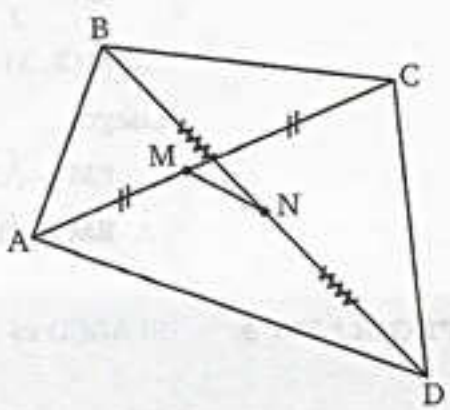
**Resolución:** Hallemos las coordenadas de M y N las cuales son los puntos medios de los segmentos AC y BD

Sea M(a; b):

$$a = \frac{-4+4}{2} = 0$$

$$b = \frac{3+3}{2} = 3$$

$$\Rightarrow M(0; 3)$$




Sea N(c; d):

$$c = \frac{-3+5}{2} = 1$$

$$d = \frac{4+(-2)}{2} = 1$$

$$\Rightarrow N(1; 1)$$

Luego calcularemos MN:

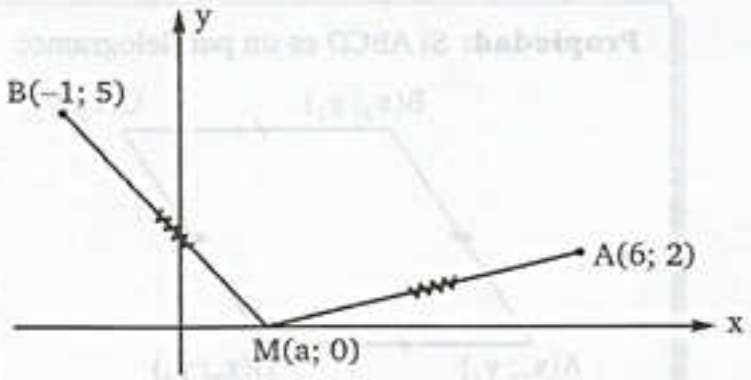
$$MN = \sqrt{(0-1)^2 + (3-1)^2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{MN = \sqrt{5}}$$

**PROBLEMA 5** Determine las coordenadas de un punto sobre el eje de abscisas, tal que equidiste de los puntos A(6; 2) y B(-1; 5)

team CALAPENSHKO


**Resolución:**




Sea M(a; 0) un punto sobre el eje x tal que:

$$AM = MB$$

Luego: $$\sqrt{(6-a)^2+(2-0)^2} = \sqrt{(a-(-1))^2+(0-5)^2}$$

Elevando al cuadrado:

$$(6-a)^2 + 2^2 = (a+1)^2 + (-5)^2$$

Desarrollando y reduciendo tenemos:

$$a = 1$$

$$\therefore \ \mathbf{M(1; 0)}$$

**PROBLEMA 6** Si los vértices de un paralelogramo ABCD están dados por: A(-3; -2); B(-1; 5) y C(7; 6)
Determine las coordenadas del vértice D

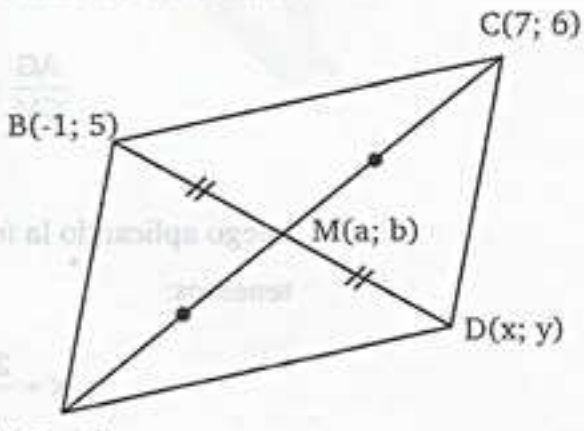
**Resolución:** En un paralelogramo las diagonales se intersecan en su punto medio, así:

M(a, b) es punto medio de $\overline{AC}$

$$a = \frac{-3+7}{2} = 2$$

$$b = \frac{-2+6}{2} = 2$$

$$\Rightarrow M(2; 2)$$




M(2; 2) es punto medio de $\overline{BD}$

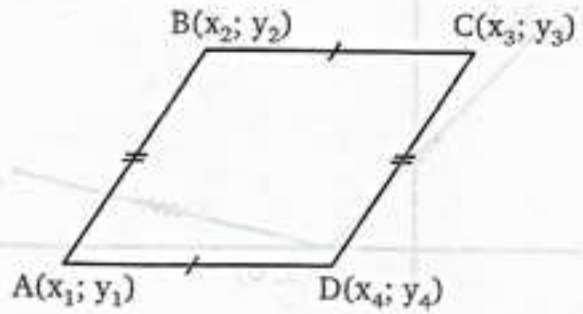
$$2 = \frac{-1+x}{2} \Rightarrow x = 5$$

$$2 = \frac{5+y}{2} \Rightarrow y = -1$$

$$\therefore \ \mathbf{D(5; -1)}$$

team CALAPENSHKO


**Propiedad:** Si ABCD es un paralelogramo:



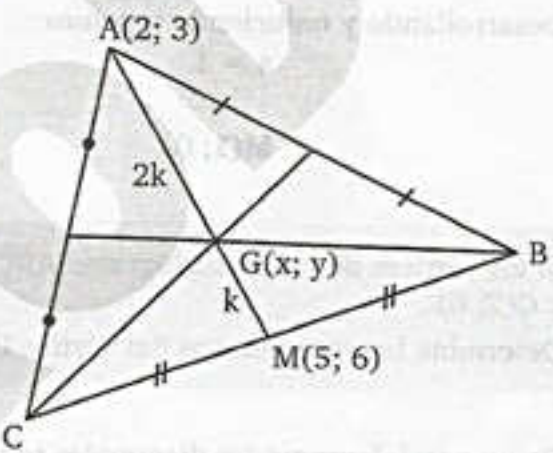

Se cumple:

$$x_1 + x_3 = x_2 + x_4$$

$$y_1 + y_3 = y_2 + y_4$$

**PROBLEMA 7** En un triángulo ABC se tiene que A(2; 3) y las coordenadas del punto medio del lado $\overline{BC}$ es (5; 6). Determine las coordenadas del baricentro del triángulo.

**Resolución:**




Sea M(5; 6) el punto medio de $\overline{BC}$ por geometría elemental, siendo G(x; y) el baricentro del ΔABC (intersección de las medianas), se cumple:

$$\frac{AG}{GM} = \frac{2}{1} \Rightarrow \text{si } GM = k \Rightarrow AG = 2k$$

Luego aplicando la formula de división de un segmento en una razón dada tenemos:

$$x = \frac{2k(5) + k(2)}{2k + k} \Rightarrow x = 4 \quad \wedge \quad y = \frac{2k(6) + k(3)}{2k + k}$$

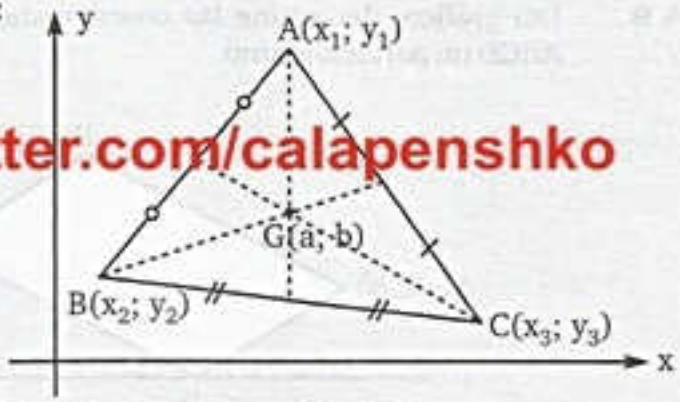
$$\Rightarrow y = 5$$

$\therefore$ G(4; 5)

team CALAPENSHKO



**En general:**

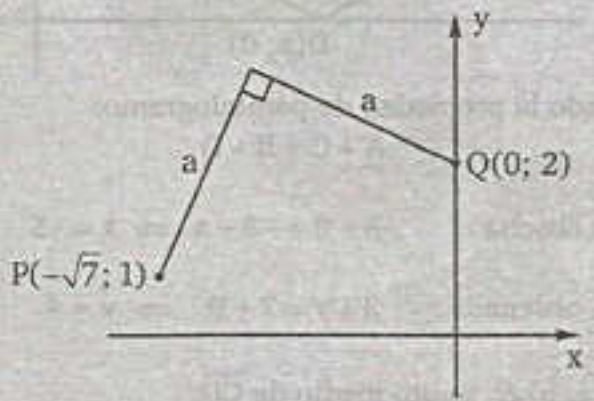



twitter.com/calapenshko

G(a; b) es baricentro del ΔABC; se cumple:

$$a = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \qquad b = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

**PROBLEMA 8** Del gráfico, calcular el valor de "a".




**Resolución:**

$PQ = a\sqrt{2}$

Aplicamos fórmula de distancia:

$$\sqrt{(-\sqrt{7}-0)^2 + (1-2)^2} = a\sqrt{2}$$

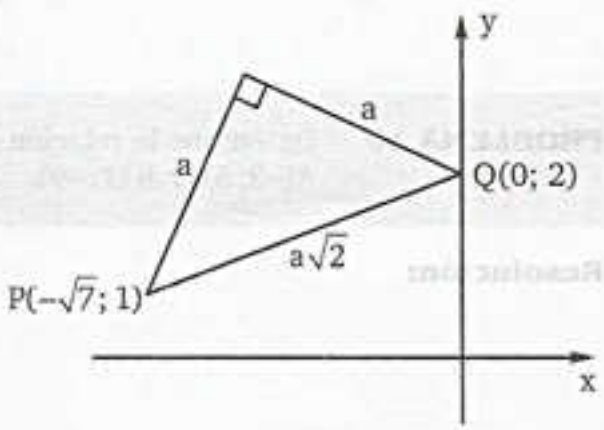
$$(-\sqrt{7})^2 + (-1)^2 = 2a^2$$

$$7 + 1 = 2a^2$$

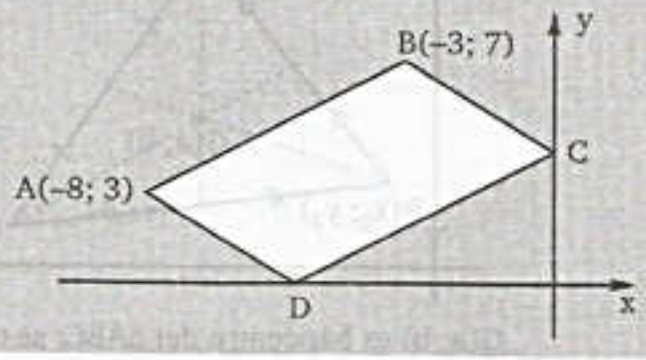
$$a^2 = 4$$

$$a = \pm 2$$

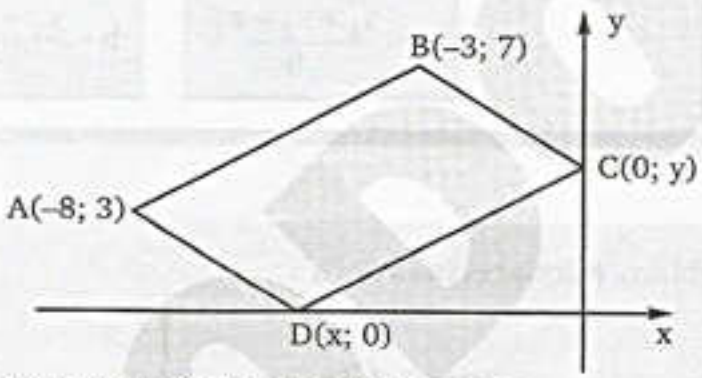
$\therefore$ **a = 2**



**PROBLEMA 9** Del gráfico, determine las coordenadas del punto medio del lado $\overline{CD}$, siendo ABCD un paralelogramo.




**Resolución:**




Aplicando la propiedad de paralelogramo:

$$A + C = B + D$$

Para la abscisa : $-8 + 0 = -3 + x \Rightarrow x = -5$

Para la ordenada : $3 + y = 7 + 0 \Rightarrow y = 4$

Sea M(a; b) el punto medio de $\overline{CD}$:

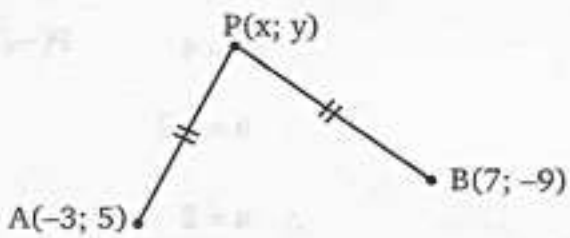
$$a = \frac{-5+0}{2} \Rightarrow a = -\frac{5}{2}$$

$$b = \frac{0+4}{2} \Rightarrow b = 2$$

$$\therefore \quad \mathbf{M = \left(-\frac{5}{2}; 2\right)}$$

**PROBLEMA 10** Determine la relación que expresa que el punto P(x; y) equidista de los puntos A(–3; 5) y B(7; –9).

**Resolución:**



team CALAPENSHKO


Condición : $PA = PB$

Aplicando fórmula de distancia:

$$\sqrt{(x+3)^2+(y-5)^2} = \sqrt{(x-7)^2+(y+9)^2}$$

Elevando al cuadrado y desarrollando:

$$(x+3)^2+(y-5)^2 = (x-7)^2+(y+9)^2$$
$$x^2+6x+9+y^2-10y+25 = x^2-14x+49+y^2+18y+81$$
$$20x-28y-96=0$$

$$\therefore \quad \mathbf{5x-7y-24=0}$$

**PROBLEMA 11** La ordenada del punto A es –1 y su abscisa es mayor que 3; si la distancia de A al punto B(4; 3) es 5, entonces la suma de las coordenadas de A es:

**Resolución:**

Datos : $A(x; -1); B(4; 3); x > 3$

Además : $AB = 5$

Aplicando la fórmula de distancia:

$$\sqrt{(x-4)^2-(-1-3)^2} = 5$$

Elevando al cuadrado : $(x-4)^2+(-4)^2 = 5^2$

$$x^2-8x+16+16=25$$
$$x^2-8x+7=0$$

Factorizando : $(x-7)(x-1)=0$

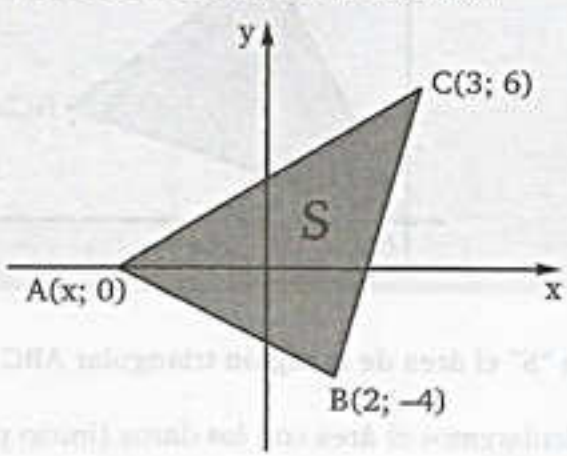
$$x=7 \quad \vee \quad x=1$$

Por lo cual : $x=7 \Rightarrow A=(7; -1)$

$$\therefore \textbf{ Suma de coordenadas = 6}$$

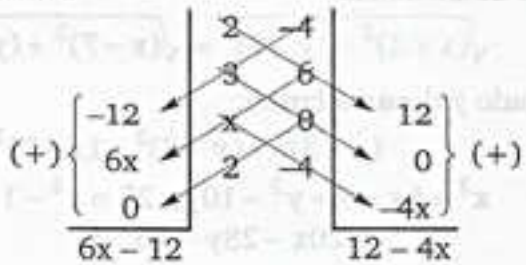
**PROBLEMA 12** Se tiene un terreno de forma triangular determinado por los puntos A(x; 0), B(2; –4) y C(3; 6), si el área del terreno es 37 $u^2$, hallar el valor de x. (Considerar: $x < 0$)

**Resolución:** El punto A se halla sobre el semieje de las abscisas.



team CALAPENSHKO


Tomando como inicio el punto B y seguimos la secuencia en sentido antihorario → BCAB




$$\underbrace{S}_{37} = \frac{12-4x-(6x-12)}{2}$$

$$37 = \frac{24-10x}{2}$$

$\therefore$ **x = −5**

**PROBLEMA 13** Determine las coordenadas del punto que equidista de los puntos fijos A(4; 3), B(2; 7) y C(-3; -8)

**Resolución:** Sea P(x; y) el punto buscado, entonces se cumple:

$$AP = BP = CP$$

Luego:

$$AP = BP \Rightarrow \sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2} = \sqrt{(x-2)^2+(y-7)^2}$$

$$\Rightarrow x - 2y + 7 = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$BP = CP \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-7)^2} = \sqrt{(x+3)^2+(y+8)^2}$$

$$\Rightarrow x + 3y + 2 = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

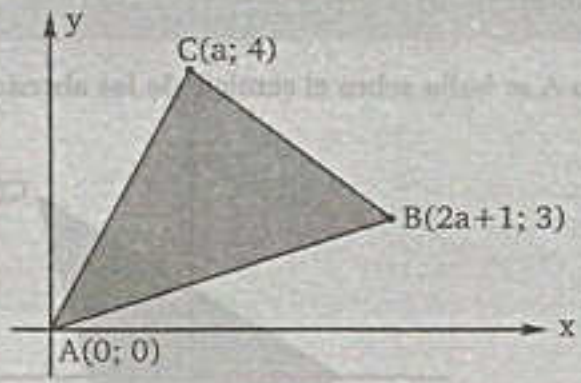
Al resolver (1) y (2) obtenemos:

**x = −5 ; y = 1**

$\therefore$ **El punto requerido es P(-5; 1)**

**OBSERVACIÓN:** El punto "P" es el circuncentro del ΔABC

**PROBLEMA 14** Del gráfico mostrado, calcular "csc C", si el área de la región triangular sombreada del Δ ABC es 7 u²




**Resolución:** Sea "S" el área de la región triangular ABC ⇒ S = 7 .....(1).

Calcularemos el área con los datos (inicio punto A)

team CALAPENSHKO


$$(+)\begin{vmatrix} 0 \\ 3a \\ 0 \end{vmatrix}\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 2a+1 & 3 \\ a & 4 \\ 0 & 0 \end{matrix}\ \begin{vmatrix} 0 \\ 4(2a+1) \\ 0 \end{vmatrix}(+) \Rightarrow S = \frac{8a+4-3a}{2}$$

$3a$ $\qquad$ $8a+4$

Usando (1): $\quad 7 = \dfrac{5a+4}{2}$

Resolviendo: $\quad a = 2$

Luego los vértices del $\Delta ABC$ son:

$A(0; 0)$, $B(5; 3)$, $C(2; 4)$

Calcularemos: AC y BC

$$AC = \sqrt{(2-0)^2 + (4-0)^2} \Rightarrow AC = 2\sqrt{5} \quad \text{..... (2)}$$

$$BC = \sqrt{(5-2)^2 + (3-4)^2} \Rightarrow BC = \sqrt{10} \quad \text{..... (3)}$$

Por ángulos agudos se cumple:

$$S = \frac{AC \times BC}{2} \times \operatorname{sen} C \text{ .....(*)}$$

Usando (1), (2) y (3) en (*)

$$7 = \frac{2\sqrt{5} \times \sqrt{10}}{2} \times \operatorname{sen} C \Rightarrow \operatorname{sen} C = \frac{7}{5\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad \csc C = \frac{5\sqrt{2}}{7}$$

**PROBLEMA 15** Considerando a los puntos A(- 4, 2) y C(8; 6); determine las coordenadas del punto B sobre el eje de abscisas de tal manera que la longitud ABC sea la menor posible.

**Resolución:** La menor distancia entre dos puntos es una recta, luego ubicamos el punto A' simétrico al punto A según el eje de abscisa

Luego:

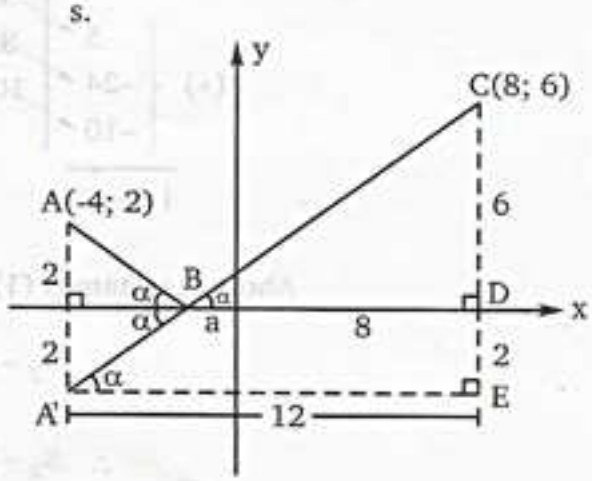
$\triangle_{A'EC}$: $\quad \tan\alpha = \dfrac{8}{12}$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{2}{3} \quad \text{..... (1)}$$

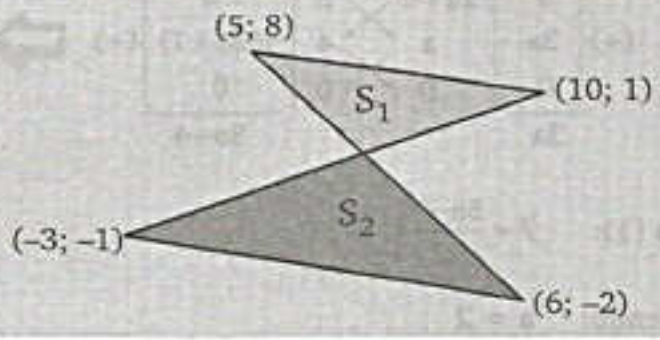
$\triangle_{BDC}$: $\quad \tan\alpha = \dfrac{6}{a+8}$ ..... (2)

De (1) y (2) obtenemos: $a = 1$

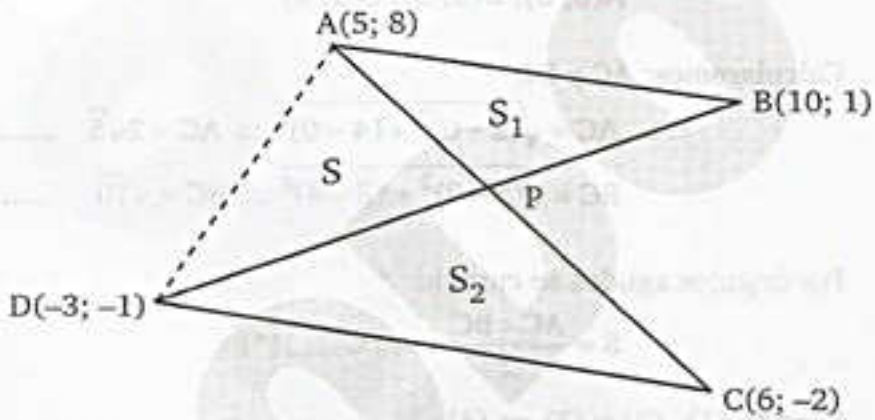
$$\therefore \quad B(-1; 0)$$



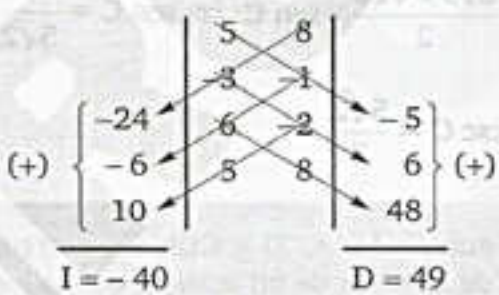
**PROBLEMA 16** Del gráfico, calcule el valor de $S_2 - S_1$




**Resolución:** Del gráfico; asumiendo que el área de la región triangular APD sea "S"



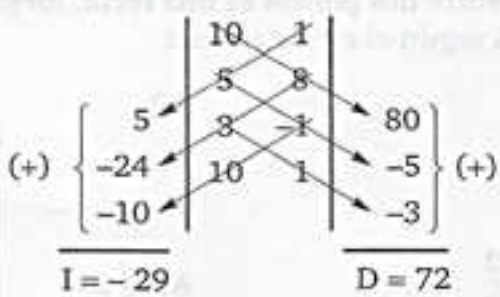

Calculemos; el área de la región triangular ACD = $S_2 + S$




$$S_2 + S = \frac{49 - (-40)}{2}$$

$$S_2 + S = \frac{89}{2} \quad .....(1)$$

Calculemos; el área de la región triangular ABD = $S + S_1$




$$S + S_1 = \frac{72 - (-29)}{2}$$

$$S + S_1 = \frac{101}{2} \quad .....(2)$$

Ahora si restamos (1) – (2):

$$S_2 - S_1 = \frac{89}{2} - \frac{101}{2}$$

$$\therefore \quad S_2 - S_1 = -6\,u^2$$

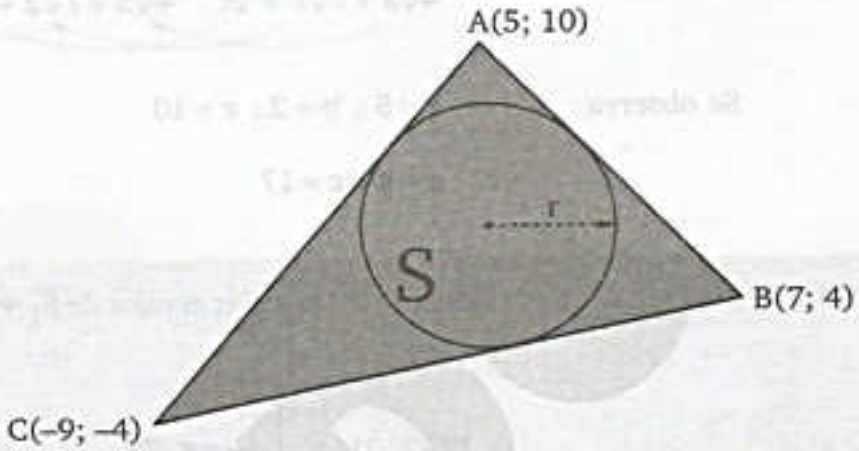
team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 17** Si el inradio del triángulo ABC de vértices A(5; 10), B(7; 4) y C(–9; –4) es:

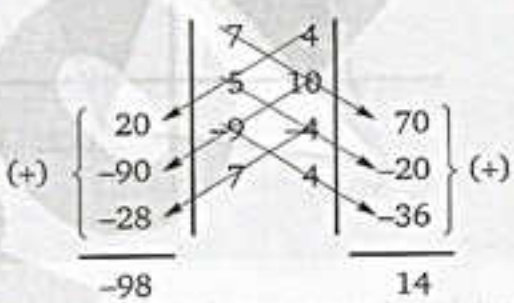
$$r = \frac{56}{4\sqrt{a} + 7\sqrt{b} + \sqrt{c}}$$

Calcular el valor de $a + b + c$ $(a; b; c \in \mathbb{Z}^+)$

**Resolución:** Graficando el ΔABC; cuyos vértices son:




Calculando el área de la región triangular ABC :




Luego : $S = \frac{14 - (-98)}{2} = 56\ u^2$ .....(1)

**Recordar:** El área de un triángulo también se calcula multiplicando el inradio por el semiperímetro.

$S = pr$ .....(2)

Calculando los lados del triángulo: (Aplicando distancia entre dos puntos)

Luego :

$$AB = \sqrt{(7-5)^2 + (4-10)^2} = \sqrt{40} \rightarrow AB = 2\sqrt{10}$$

$$AC = \sqrt{(-9-5)^2 + (-4-10)^2} = \sqrt{392} \rightarrow AC = 14\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(7+9)^2 + (4+4)^2} = \sqrt{320} \rightarrow BC = 8\sqrt{5}$$

El semiperímetro es: $p = \frac{8\sqrt{5} + 14\sqrt{2} + 2\sqrt{10}}{2}$

$p = 4\sqrt{5} + 7\sqrt{2} + \sqrt{10}$ .....(3)

team CALAPENSHKO



Reemplazando en (1) y (3) en (2):

$$56 = (4\sqrt{5} + 7\sqrt{2} + \sqrt{10})r$$

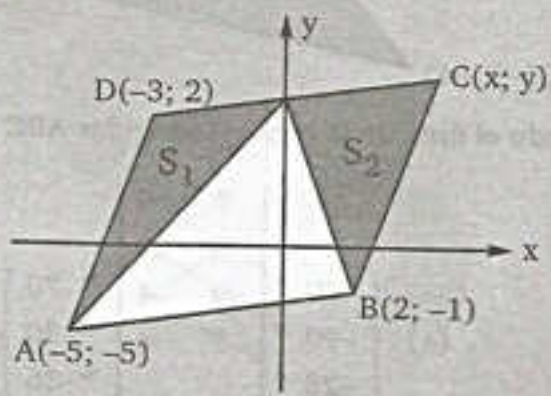
Despejando : $$r = \frac{56}{4\sqrt{5} + 7\sqrt{2} + \sqrt{10}}$$

Igualando al dato: $$\frac{56}{4\sqrt{a} + 7\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{56}{4\sqrt{5} + 7\sqrt{2} + \sqrt{10}}$$

Se observa : $a = 5 \; ; \; b = 2 \; ; \; c = 10$

$\therefore \; \mathbf{a + b + c = 17}$

**PROBLEMA 18** Si ABCD es un paralelogramo, calcular el valor de $S_1 + S_2$




**Resolución:** En un paralelogramo se cumple que:

$$\boxed{A + C = D + B}$$ (punto medio de un segmento)

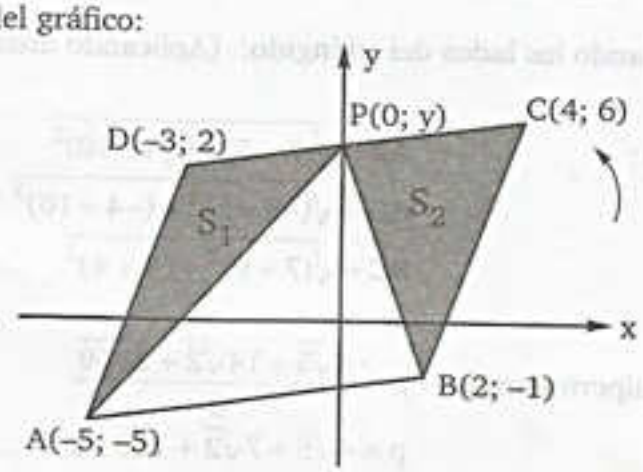
Luego reemplazando los datos:

$$(-5; -5) + (x; y) = (-3; 2) + (2; -1)$$

$$(x; y) = (-1; 1) - (-5; -5)$$

$$(x; y) = (4; 6) \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \end{cases}$$

Ahora del gráfico:

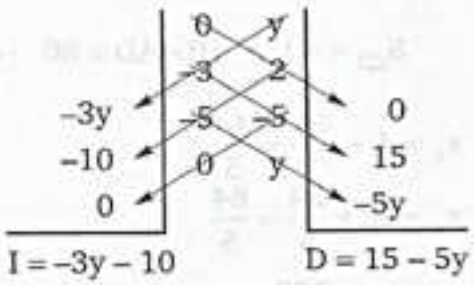



**Recordar:**

$$S = \frac{D - I}{2}$$

team CALAPENSHKO

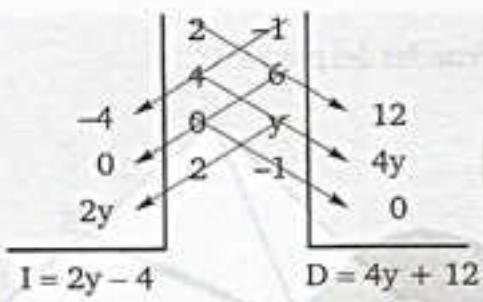

Calculemos el área de la región trinagular ADP:




$$S_1 = \frac{15 - 5y + 3y + 10}{2}$$

$$S_1 = \frac{25}{2} - y$$

Calculemos el área de la región triangular BPC:




$$S_2 = \frac{4y + 12 - 2y + 4}{2}$$

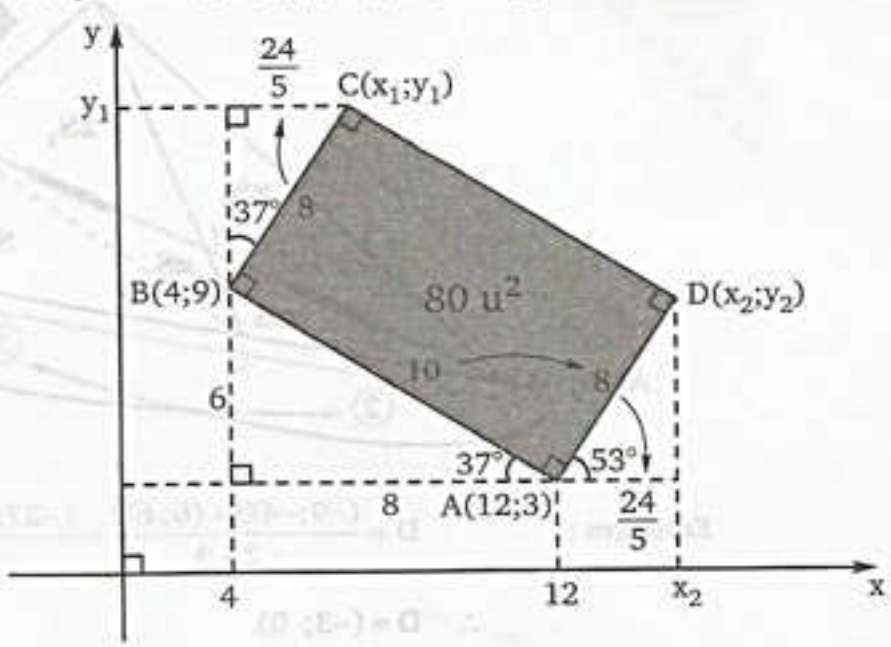
$$S_2 = 8 + y$$

Nos piden : $S_1 + S_2 = \frac{25}{2} - y + 8 + y$

$$\therefore\ S_1 + S_2 = \frac{41}{2}\ u^2$$

**PROBLEMA 19** Las coordenadas de los vértices A y B de un rectángulo ABCD son (12; 3) y (4; 9) respectivamente. Si el área de la región rectangular es 80 $u^2$, determinar la suma de las abscisas de los vértices C y D.

**Resolución:** Graficando los puntos A(12; 3) y B(4; 9) en el plano cartesiano.



Calculando : $AB = \sqrt{(12-4)^2 + (3-9)^2} = 10$

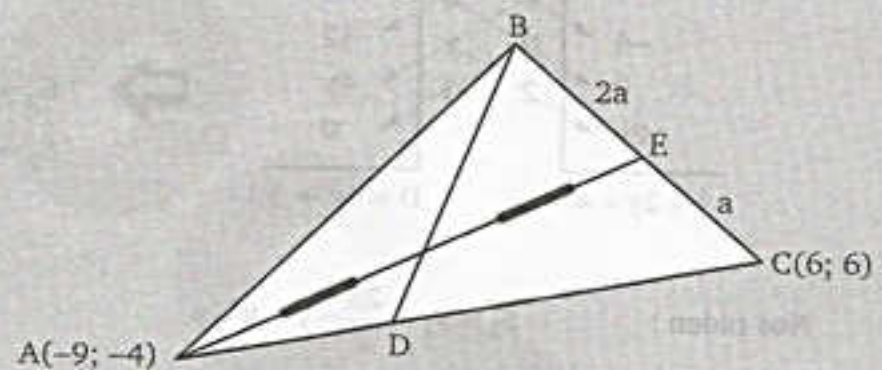
Del dato : $S_{\square} = 80 \rightarrow 10 \times AD = 80 \rightarrow AD = 8$

Del gráfico : $x_1 = 4 + \frac{24}{5} = \frac{44}{5}$

$x_2 = 12 + \frac{24}{5} = \frac{84}{5}$

Nos piden : $\mathbf{x_1 + x_2 = \frac{128}{5}}$

**PROBLEMA 20** Determine las coordenadas del punto "D".



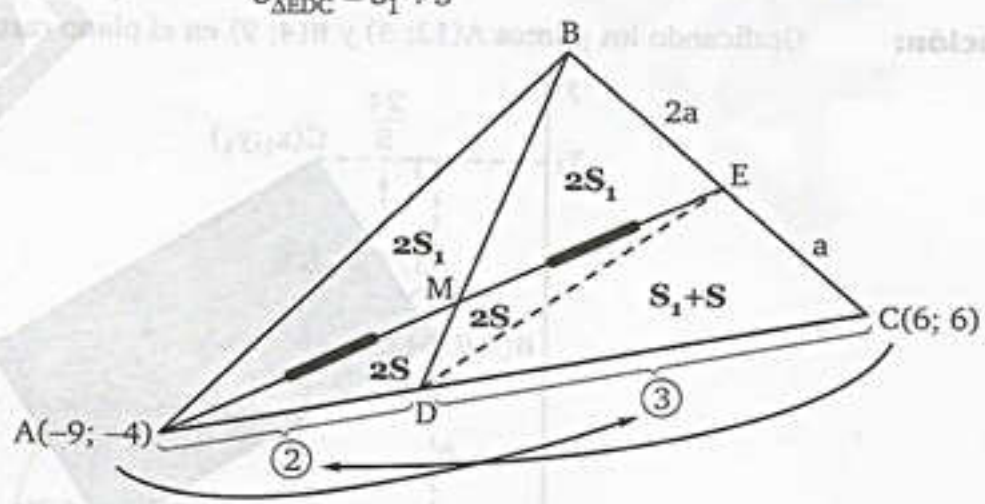

**Resolución:**

**Recordar:**

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{m}{n}$

Sea : $S_{\Delta ADM} = S_{\Delta DME} = 2S$

$S_{\Delta EDC} = S_1 + S$




Entonces : $D = \frac{(-9;-4)3 + (6;6)2}{2+3} = \frac{(-27;-12) + (12;12)}{5} = \frac{(-15;\ 0)}{5}$

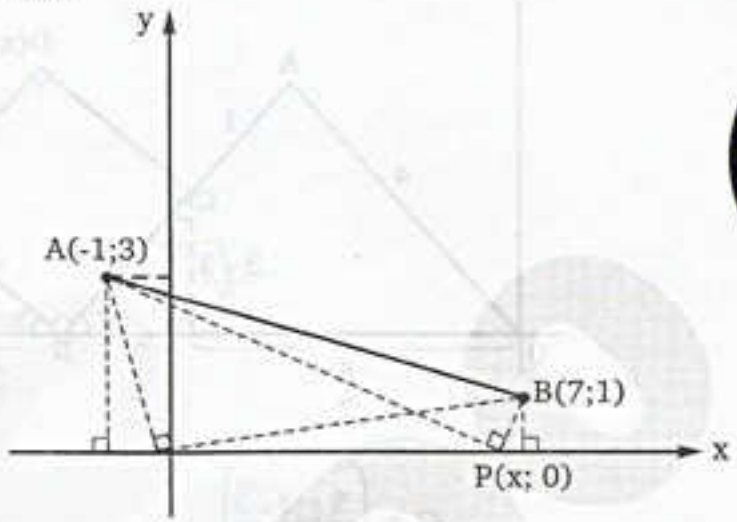
$\therefore \quad \mathbf{D = (-3;\ 0)}$

team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 21** Desde el punto P (x; 0) se divisa el segmento de extremos A(-1;3) y B(7;1) bajo un ángulo que mide 90°. Calcular la suma de valores que asume "x".

**Resolución:** Graficando:




Del gráfico se cumple que: $AP^2 + PB^2 = AB^2$

$$\sqrt{(x+1)^2+(0-3)^2}^2 + \sqrt{(x-7)^2+(-1)^2}^2 = \sqrt{(7+1)^2+(1-3)^2}^2$$

Resolviendo:

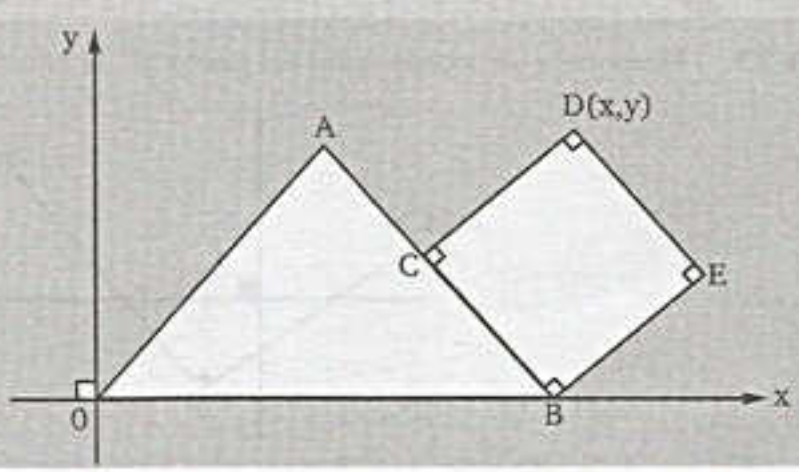
$$x^2 + 2x + 1 + 9 + x^2 - 14x + 49 + 1 = 64 +$$

$$2x^2 - 12x + 60 = 68$$

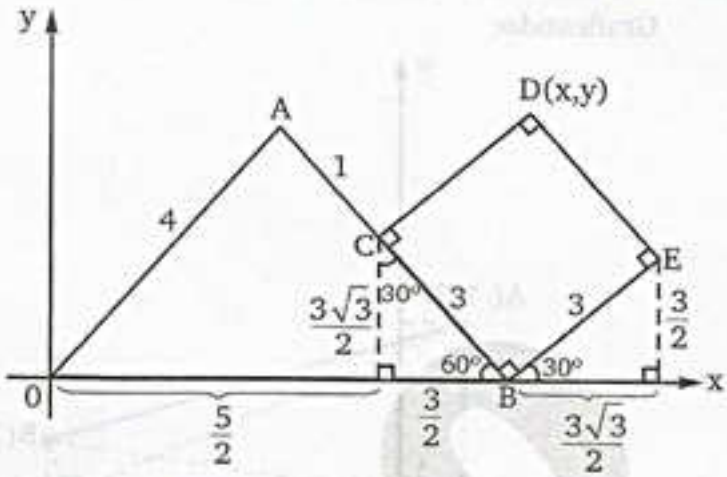
$$x^2 - 6x - 4 = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 3+\sqrt{13} \\ x_2 = 3-\sqrt{13} \end{cases}$$

**La suma de "x" es: 6**

**PROBLEMA 22** Según el gráfico las regiones poligonales OAB y BCDE son isoperimétricos, si B (4;0). Calcular el valor de: x – y
(OAB y BCDE son polígonos regulares)



**Resolución:** Haciendo trazos respectivos y buscando ◺ notables 30° y 60° se puede hallar los puntos: C y E.




$$C = \left(\frac{5}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$E = \left(4 + \frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

Por propiedad sabemos que:

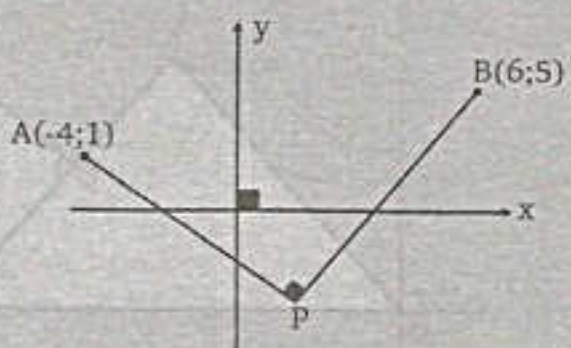
$$D + B = C + E$$

$$\Rightarrow D = C + E - B$$

$$= \left(\frac{5}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + \left(4 + \frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\right) - (4; 0)$$

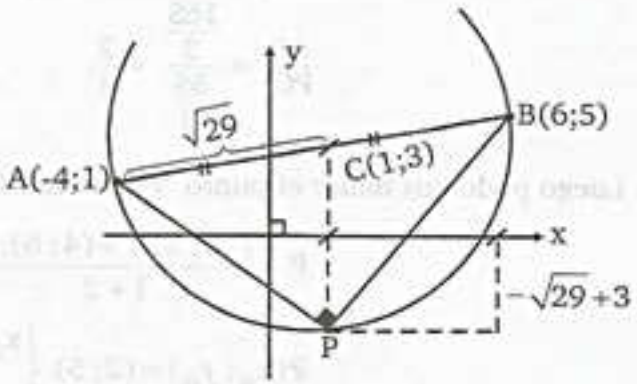
$$\therefore D(x; y) = \left(\frac{5}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{piden } \mathbf{x - y = 1}$$

**PROBLEMA 23** Determine las coordenadas del punto "P" de mínima ordenada:



team CALAPENSHKO


**Resolución:** Por esos puntos pasan necesariamente una circunferencia de diámetro AB.

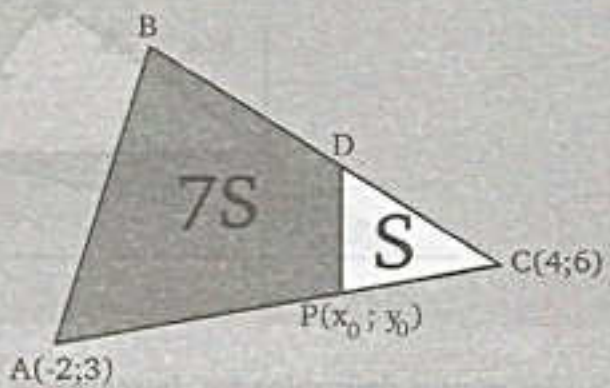



* Para poder encontrar la mínima ordenada también es necesario que: $\overline{CP}$// EJE "y"

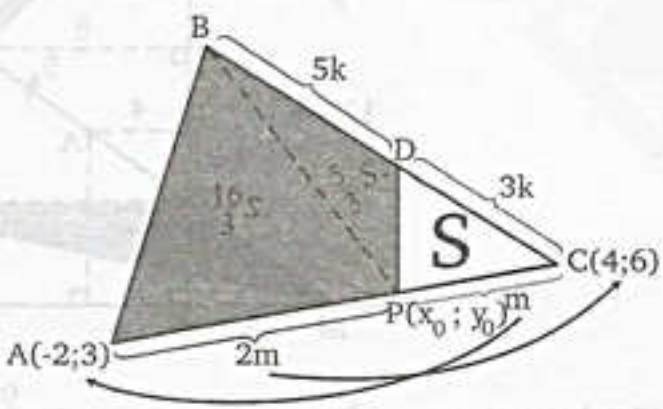
* $\overline{CP}$ es radio de circunferencia entonces las coordenadas de "p" se pueden hallar:

$$P(x; y) = P(1; 3-\sqrt{29})$$

**PROBLEMA 24** En el gráfico: $\frac{BD}{5} = \frac{DC}{3}$ Calcular: $k = y_0 - x_0$




**Resolución:** Haciendo un trazo convenientemente: BP




Como: $\frac{BD}{5} = \frac{DC}{3} \Rightarrow \frac{A\,\Delta_{BDP}}{5k} = \frac{S}{3k}$

$$\Rightarrow A\,\Delta_{BDP} = \frac{5}{3}S$$

Entonces: $A\,\Delta_{APB} = \frac{16}{3}S$

team CALAPENSHKO


Ahora podemos afirmar que:

$$\frac{AP}{PC}=\frac{\frac{16S}{3}}{\frac{8S}{3}}=\frac{2}{1}$$

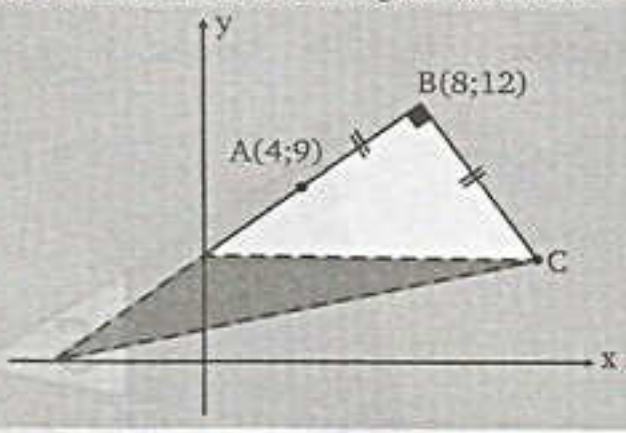
Luego podemos hallar el punto "P" por teoría de DSRD.

$$P=\frac{(-2;3).1+(4;6).2}{1+2}=(2;5)$$

$$P(x_o;y_o)=(2;5)\begin{cases}x_o=2\\y_o=5\end{cases}$$

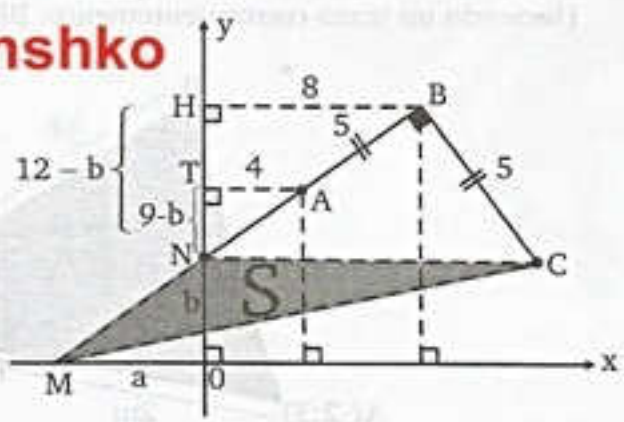
$$\therefore \mathbf{k=5-2=3}$$

**PROBLEMA 25** Del gráfico. Determine el área de la región sombreada.




**Resolución:** Con los puntos determinados, buscaremos triángulos rectángulos semejantes para encontrar los valores que faltan:

twitter.com/calapenshko




Se observa que: $\triangle NTA \sim \triangle NHB \Rightarrow \frac{9-b}{12-b}=\frac{4}{8} \Rightarrow b=6$

$\triangle MON \sim \triangle NTA \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{4}{3} \Rightarrow a=8$

$\therefore MN = 10$

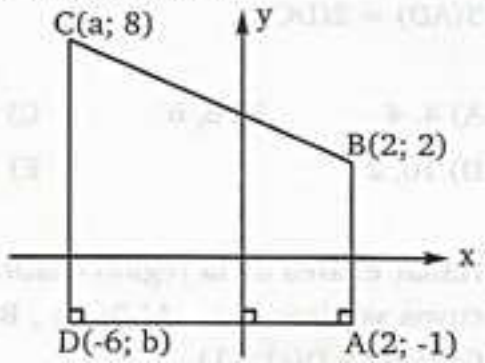
Piden: $S=\frac{MN.BC}{2} \Rightarrow S=\frac{10.5}{2} \Rightarrow \therefore \mathbf{S=25\ u^2}$

team CALAPENSHKO



## PROBLEMAS PROPUESTOS

**1.** Hallar el perímetro y el área de la región del trapecio ABCD.

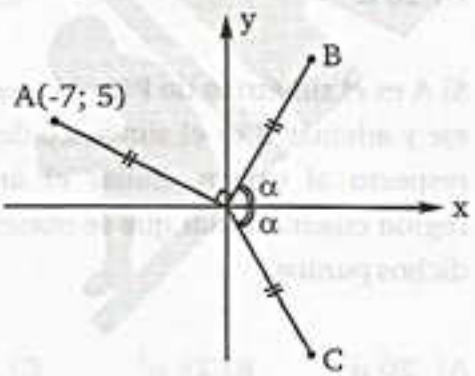



A) 25 u; 25 u$^2$ B) 25 u; 30 u$^2$
C) 30 u; 40 u$^2$
D) 30 u; 48 u$^2$ E) 35 u; 52 u$^2$

**2.** La ordenada de un punto "P" es 8 y su distancia al punto Q(5; -2) es $2\sqrt{41}$. Hallar la abscisa del punto "P", sabiendo que pertenece al IIC

A) –13 B) –11 C) –8
D) –6 E) –3

**3.** Indicar las coordenadas del punto "C"




A) (7; -5) B) (5; -7) C) (-5; 7)
D) (5; -5) E) (7; -7)

**4.** Dado un segmento $\overline{AB}$ donde A(2; 3) y B(11; 10). Calcular la suma de las proyecciones de dicho segmento sobre los ejes coordenados.

A) 12 B) 14 C) 16
D) 18 E) 20

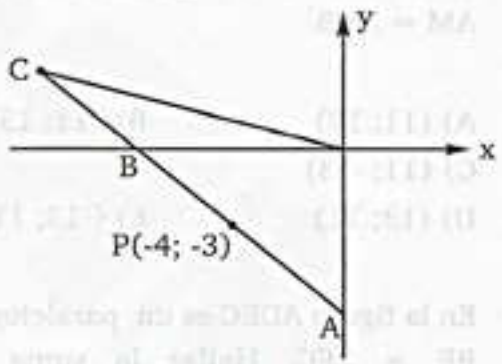
**5.** Dados los puntos A(0; 0), B(2; 0) y C(4; 8). Hallar la longitud del punto medio del segmento $\overline{AC}$ al punto medio del segmento $\overline{AB}$

A) 3u B) 4u C) $\sqrt{15}$u
D) $\sqrt{17}$u E) $\sqrt{13}$u

**6.** Dado dos vértices opuestos de un cuadrado P(3; 5) y Q(1; -3). Calcular su área.

A) 34 u$^2$ B) 28 u$^2$ C) 24 u$^2$
D) 21 u$^2$ E) 18 u$^2$

**7.** Del gráfico si: AP = PB = BC. Hallar las coordenadas del punto C.




A) (-7; 5) B) (-8; 6) C) (-9; 5)
D) (-10; 4) E)(-12;3)

**8.** Sobre el segmento $\overline{AB}$ se ubica el punto medio M siendo A(3; 3) y B(7; 9). Hallar las coordenadas de un punto "P" situado en el eje de abscisas, si el ángulo de inclinación de PM mide 37°.

A) (1; 0) B) (-1; 0) C) (-2; 0)
D) (2; 0) E) (-3; 0)

**9.** En que tipo de triángulo ABC:
A(6; -7), B(2; 3) y C(7; 5)
Se cumple:

A) Isósceles
B) Equilátero
C) Rectángulo
D) Rectángulo e Isósceles
E) Escaleno

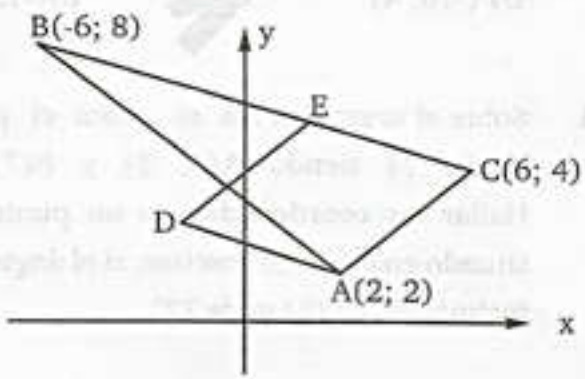
**10.** Sean M(-1; 2), N(1 + b; 3) y A(3; 1 - b) son puntos en el plano. Si MN = MA, hallar las coordenadas del punto medio de NA.

A) (4; 1) B) (5; -1) C) (2; -4)
D) (5; 1) E) (4; -2)

**11.** Dado tres puntos colineales A, M y B tal que B(5; -7) y M(1; -2). Hallar las coordenadas del punto A , tal que AM = 3MB

A) (11; 13) B)(-11; 13)
C) (11; -13)
D) (13; 11) E) (-13; 11)

**12.** En la figura ADEC es un paralelogramo y BE = 2EC. Hallar la suma de las coordenadas de "D"




A) 2/3 B) 4/3 C) 5/3
D) 7/3 E) 1/3

**13.** Siendo A(-3; -1) , B(-1; 5) y C(6; 4) los vértices de un triángulo ABC. Hallar el área de la región triangular ABD, sabiendo que "D" se encuentra sobre AC, además 3(AD) = 2(DC).

A) 4, 4 B) 6, 6 C) 8,8
D) 10, 2 E) 12

**14.** Hallar el área de la región cuadrangular cuyos vértices son: A(-3; 1) , B(2; 5) , C(5; -1) y D(-1; -1)

A) 15 $u^2$ B) 20 $u^2$ C) 25 $u^2$
D) 27 $u^2$ E) 30 $u^2$

**15.** Tomando como centro el punto P(-5; 3) se dibuja una circunferencia que es tangente al eje de ordenadas en "A" e interseca al eje de abscisas en "B" y "C". Halle el área de la región triangular ABC.

A) 6$u^2$ B) 8 $u^2$ C) 12 $u^2$
D) 16 $u^2$ E) 24 $u^2$

**16.** Si A es el simétrico de P(3; 5) respecto al eje y además B es el simétrico de Q(-2; 3) respecto al origen, hallar el área de la región cuadrangular que se obtiene al unir dichos puntos.

A) 20 $u^2$ B) 25 $u^2$ C) 30 $u^2$
D) 35 $u^2$ E) 40 $u^2$

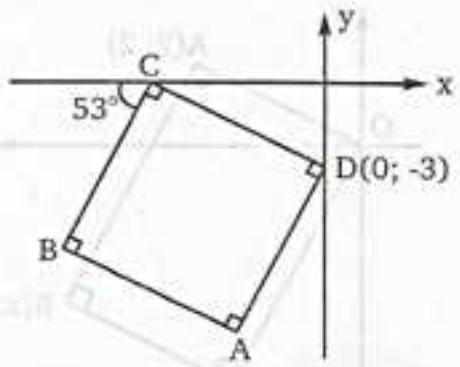
**17.** Una circunferencia pasa por el punto (-7; 4) y su centro se encuentra en (-3; 2). Hallar el área de la región de la circunferencia.

A) 10$\pi$ $u^2$ B) 12$\pi$ $u^2$ C) 16$\pi$ $u^2$
D) 18$\pi$ $u^2$ E) 20$\pi$ $u^2$

team CALAPENSHKO



**18.** Siendo ABCD un cuadrado, hallar la suma de coordenadas de los puntos A y B




A) –12 B) –15 C) -18
D) –21 E) –24

**19.** Indicar las coordenadas de un punto de trisección del segmento AB si A(-2; 3) y B(6; -3)

A) $\left(\frac{10}{3};1\right)$ B) $\left(1;\frac{10}{3}\right)$
C) $\left(\frac{10}{3};-1\right)$
D) $\left(-1;\frac{10}{3}\right)$ E) $\left(-\frac{10}{3};-1\right)$

**20.** Se tiene el paralelogramo ABCD donde; A(-4; -2) , B(3; -2) y C(5; b). Hallar las coordenadas del punto D, sabiendo que tiene como área 56 $u^2$ y b > 0

A) (-2; 0) B) (-2; 6) C) (6; -2)
D) (-6; 2) E) (2; 6)

**21.** Los puntos A(-2; 3) , B(1; 1) , C(3; a) con a positivos y D(b; c) son los vértices de un cuadrado. Calcular:

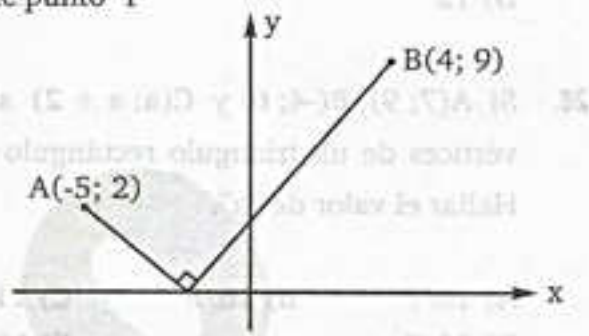
$$\frac{a+b}{c}$$

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{10}{3}$
D) $\frac{9}{4}$ E) $\frac{8}{5}$

**22.** Hallar la longitud de la altura relativa al lado AB del triángulo ABC
DATO: A(-2; 5) ; B(-2; -8) ; C(6; 3)

A) 2u B) 4u C) 6u
D) 8u E) 10u

**23.** Del gráfico mostrado, hallar las coordenadas de punto "P"




A) (-4; 0) B) (-3; 0) C) (-25; 0)
D) (-2; 0) E) (-1; 0)

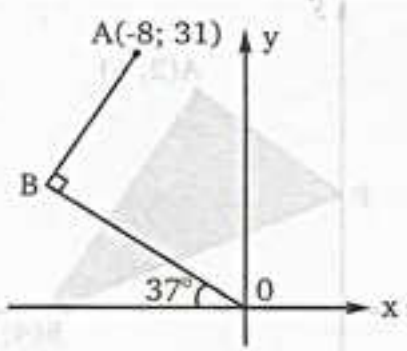
**24.** Hallar la longitud de la hipotenusa de un triángulo ABC (recto en B), si: B(5; 3) y su baricentro es G(7; 1)

A) $2\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{3}$ C) $5\sqrt{3}$
D) $6\sqrt{2}$ E) $8\sqrt{2}$

**25.** Determinar la suma de las coordenadas del baricentro de un triángulo, si los puntos medios de los lados son: M(1; 1); N(5; 3) y P(6; -4)

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

**26.** Hallar las coordenadas del punto B




A) (-10; 25) B) (-25; 30)
C) (-40; 30)
D) (-20, 15) E) (-24; 18)

team CALAPENSHKO



**27.** Los vértices de un triángulo son los puntos A(-1; -1) , B(-1; 12) y C(11; 4). Hallar la longitud de la proyección del lado $\overline{BC}$ sobre $\overline{AC}$.

A) 6 B) 8 C) 10
D) 12 E) 14

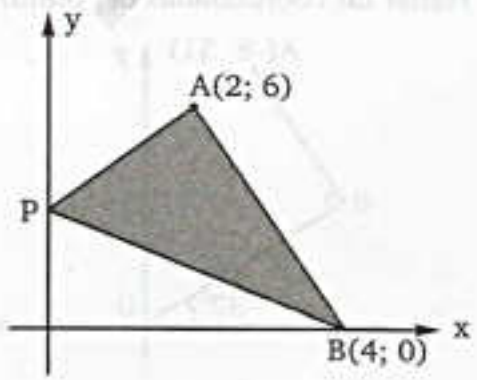
**28.** Si A(7; 9), B(-4; 6) y C(a; a + 2) son los vértices de un triángulo rectángulo en B. Hallar el valor de "a".

A) 16/7 B) 16/5 C) 11/6
D) 11/5 E) 10/7

**29.** Considerando al triángulo ABC cuyos vértices son: A(1; 1) , B(1; 3) y C(-2; -3). Hallar la longitud de la bisectriz interior del ángulo A.

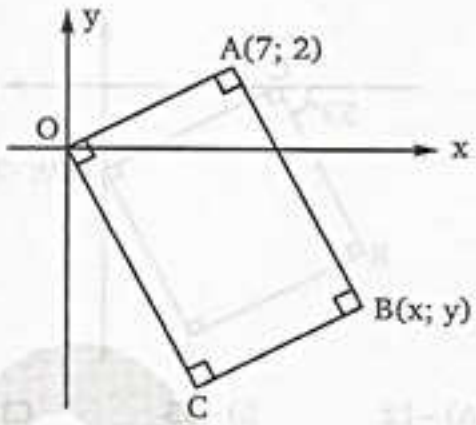
A) $\frac{2\sqrt{5}}{7}$ B) $\frac{3\sqrt{5}}{7}$ C) $\frac{2\sqrt{10}}{7}$
D) $\frac{3\sqrt{10}}{7}$ E) $\frac{4\sqrt{10}}{7}$

**30.** De la figura, hallar el área de la región triangular APB de tal manera que AP + PB sea mínima.




A) 6 u² B) 8 u² C) 10 u²
D) 12 u² E) 9 u²

**31.** Si en el gráfico OC = 3(OA), hallar el valor de "x + y"




A) –2 B) –3 C) –4
D) –5 E) –6

**32.** Si los puntos P(7; 3) y Q(5; 1) son los puntos medios de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ de un triángulo ABC; siendo el baricentro del triángulo el punto G(5; 3); determine las coordenadas del vértice "C".

A) (8; –1) B) (9; –1) C) (7; –1)
D) (5; –1) E) (6; –1)

**33.** Hallar las coordenadas de un punto M en el eje X, cuya distancia hasta el punto N(2; –3) es igual a 5.

A) (–2; 0) B) (2; 0) C) (4; 0)
D) (6; 0) E) Hay dos respuestas

**34.** Hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales de un cuadrilátero ABCD, sabiendo que: A(–4; 3), B(–3; 4), C(4; 3) y D(5; –2).

A) 2 u B) $\sqrt{5}$ u C) $\sqrt{6}$ u
D) $2\sqrt{2}$ u E) 3 u

team CALAPENSHKO

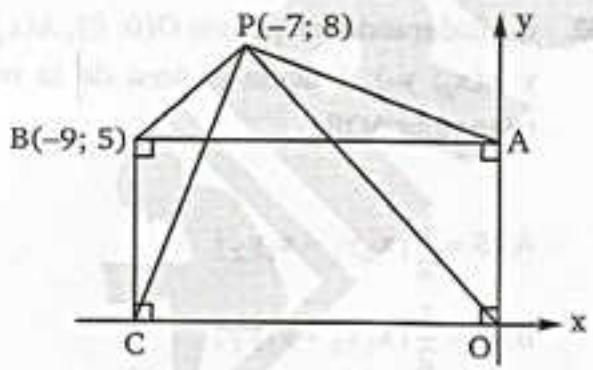

**35.** Considerando a los puntos en el plano cartesiano: M(–1; 2), N(1+b; 3) y A(3; 1–b). Si MN = MA, hallar las coordenadas del punto medio de NA.

A) (4; 1) B) (5; –1) C) (2; –4)
D) (4; –2) E) (5; 1)

**36.** Dos vértices de un triángulo ABC son A(3; 1) y B(1; –3) siendo su área $3u^2$; el tercer vértice se encuentra sobre el eje Y. Hallar la longitud de la mediana relativa al lado $\overline{AB}$, sabiendo que es la menor posible.

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{7}$
D) $\sqrt{11}$ E) $\sqrt{53}$

**37.** Del gráfico; calcular: $\dfrac{AP^2 + PC^2}{OP^2 + PB^2}$

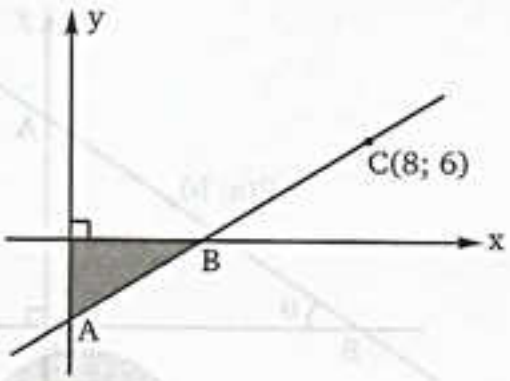



A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{2}$

**38.** Si dos vértices de un triángulo son A(–4; 6) y B(3; –8), hallar el área de la región triangular sabiendo que las medianas se intersecan en el punto G(2; 6)

A) $98\,u^2$ B) $102\,u^2$ C) $108\,u^2$
D) $118\,u^2$ E) $126\,u^2$

**39.** Hallar el área de la región triangular sombreada AOB si: 3(AB) = 2(BC)




A) $3{,}2\,u^2$ B) $4{,}8\,u^2$ C) $5{,}6\,u^2$
D) $6{,}4\,u^2$ E) $8{,}2\,u^2$

**40.** El lado de un rombo es igual a $5\sqrt{10}$ y dos de sus vértices opuestos son los puntos P(4; 9) y Q(–2; 1). Hallar el área de la región del rombo.

A) $120\,u^2$ B) $125\,u^2$ C) $130\,u^2$
D) $140\,u^2$ E) $150\,u^2$

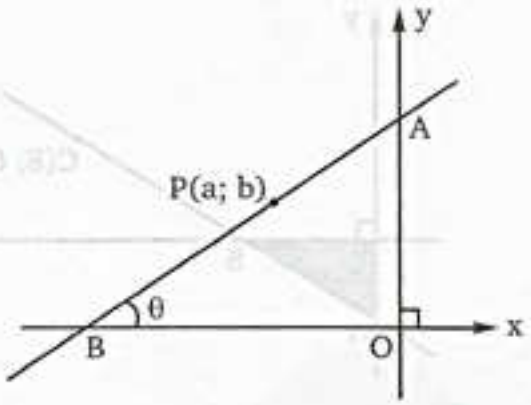
**41.** Si A(7; 9), B(–4; 6) y C(m; m + 2) son los vértices de un triángulo rectángulo en B. Hallar el valor de "m".

A) $-\frac{16}{7}$ B) $-\frac{16}{5}$ C) $-\frac{11}{6}$
D) $-\frac{11}{5}$ E) $-\frac{10}{7}$

**42.** Hallar las coordenadas del circuncentro de un triángulo ABC, sabiendo que las coordenadas de sus vértices son A(–3; 4), B(4; 5) y C(1; –4).

A) (1; 2) B) (1; 1) C) (0; 2)
D) (2; 1) E) (2; 0)

**43.** Hallar el mínimo valor del área de la región triangular AOB.




A) $a^2+b^2$ B) $a^2+b^2+ab$
C) $-2ab$
D) $a^2+b^2+1$ E) $a^2+b^2-ab$

**44.** Considerando al triángulo ABC con A(–1; –2), B(–5; 3) y C(3; 2). Además siendo "G" el baricentro; hallar la tangente del ángulo BCG.

A) $\frac{13}{12}$ B) $\frac{11}{12}$ C) $\frac{12}{31}$
D) $\frac{13}{32}$ E) $\frac{12}{17}$

**45.** Dados los puntos P(–5; 2) y Q(3; 1), hallar la longitud de la proyección del segmento $\overline{PQ}$ sobre una recta L de pendiente igual a $\frac{4}{3}$.

A) 2 u B) 3 u C) 4 u
D) 5 u E) 6 u

**46.** Considerando al triángulo ABC con: A(– 2; 5), B(2; – 8), C(6; 3). Determine la medida de la altura relativa al lado AB de dicho triángulo.

A) $\frac{96}{\sqrt{185}}$ B) $\frac{97}{\sqrt{185}}$ C) $\frac{98}{\sqrt{185}}$
D) $\frac{99}{\sqrt{185}}$ E) $\frac{100}{\sqrt{185}}$

**47.** Dado un trapecio de vértices A(1; – 4), B(8;–2), C(–4; 16) y D (–3; 2), sus diagonales se cortan en el punto P. ¿Cuál es la razón entre las áreas de las regiones triangulares BPC y APC?

A) 3 B) 9 C) 1
D) 18 E) 27

**48.** ¿Son secantes las rectas $r = x + y - 2 = 0$ y $s = x - 2y + 4 = 0$ ?, en caso afirmativo, calcule el punto de corte.

A) Si, P(0; 0) B) Si, P(1;0)
C) Si, P(0; 2)
D) No E) Si, P(0; 1)

**49.** Dados los puntos A(1; 3) y B(5; –1), hallar las coordenadas del punto "P" sobre el eje x de tal manera que "AP – PB" tenga el máximo valor.

A) (1; 0) B) (3; 0) C) (5; 0)
D) (7; 0) E) (9; 0)

**50.** Considerando los puntos O(0; 0), $A(x_1; y_1)$ y $B(x_2; y_2)$. Calcule el área de la región triangular AOB.

A) $S = \frac{1}{2}|x_2y_1 - x_1y_2|$

B) $S = \frac{1}{2}|x_1x_2 + y_1y_2|$

C) $S = \frac{1}{2}|x_1y_2 + x_2y_1|$

D) $S = \frac{1}{2}|x_1x_2 - y_1y_2|$

E) $S = \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$

team CALAPENSHKO

Capítulo 17

# La Recta

**CAPACIDADES**

- Determinar la ecuación de una recta conociendo un punto de ella y su pendiente.
- Determinar la ecuación de una recta conociendo dos puntos de ella.

## LA GEOMETRÍA SEGÚN RENÉ DESCARTES

La etapa de naciente formación en las Ciencias tal vez explique la inclinación abarcadora de los científicos de la época. Los grandes matemáticos incursionan con frecuencia en el campo filosófico, se esfuerzan por explicar los fenómenos en su totalidad, e intentan construir los instrumentos matemáticos requeridos para la formalización de los experimentos en el campo de la Mecánica.

RENÉ DESCARTES

La geometría analítica cartesiana, el cálculo diferencial, el cálculo de las variaciones, y la teoría matemática de la probabilidad constituyeron logros de las matemáticas que sirvieron en lo inmediato para apoyar el despegue de la Mecánica , y en el posterior desarrollo de la formalización matemática para describir las leyes de los objetos que son abordados.

La monumental obra de René Descartes (1596 - 1650) nos lega la creación de la Geometría Analítica. Descartes introduce la noción de plano cartesiano y combina el Álgebra y la Geometría de manera que a partir de sus trabajos los problemas geométricos podían resolverse algebraicamente y las ecuaciones algebraicas podían ilustrarse geométricamente.

Aunque se conservan algunos apuntes de su juventud, su primera obra fue Reglas para la dirección del espíritu creada en 1628 y publicada en 1701.(póstuma). Luego escribió La luz o Tratado del mundo y El hombre, que retiró de la imprenta al enterarse de la condena de la Inquisición a Galileo en 1633, y que más tarde se publicaron a instancias de Leibniz. En 1637 publicó el Discurso del método para dirigir bien la razón y hallar la verdad en las ciencias, seguido de tres ensayos científicos: Dióptrica, La Geometría y Los meteoros. Con estas obras, escritas en francés, Descartes acaba por presentarse ante el mundo erudito, aunque inicialmente intentó conservar el anonimato.

En 1641 publicó las Meditaciones metafísicas, acompañadas de un conjunto de Objeciones y respuestas que amplió y volvió a publicar en 1642. Hacia 1642 puede fecharse también un diálogo, La búsqueda de la verdad mediante la razón natural (póstumo).

De Descartes también se conserva una copiosa correspondencia, que en gran parte canalizaba a través de su amigo Mersenne, así como algunos esbozos y opúsculos que dejó inéditos. La edición de referencia de sus obras es la que prepararon Charles Adam y Paul Tannery a fines del siglo XIX e inicios del XX, y a la que los comentaristas usualmente se refieren como AT, por las iniciales de los apellidos de estos investigadores.

**A todo el público en general:**

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

**Este libro no debe ser prostituito monetariamente**, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

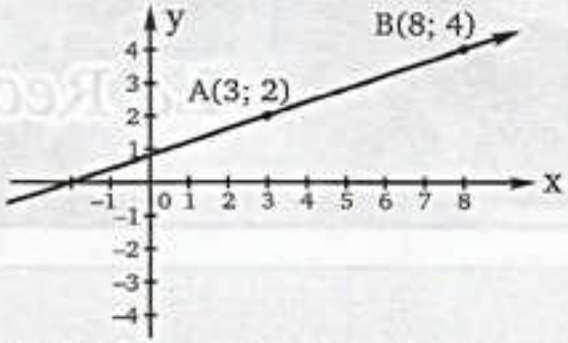
No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

**28 de agosto del 2020**

team CALAPENSHKO


## INTRODUCCIÓN




La definición de Euclides de línea recta no es de mucha ayuda, pero tampoco lo son las definiciones alternativas que hemos escuchado. Afortunadamente todos sabemos qué es una recta aunque no la podemos describir en términos de ideas más primitivas. Hay algo en lo que debemos estar de acuerdo: dados dos puntos (por ejemplo A y B), hay sólo una línea recta que pasa por los dos. Y al contrario de Euclides, se utilizará la palabra **recta** para decir línea recta.

Una recta es un objeto geométrico. Al colocarla en el sistema coordenado, debe tener una ecuación de la misma manera que un cincunferencia la tiene. ¿Cómo encontrar la ecuación de una recta? Para responder a esta pregunta es necesaria la noción de lo que es una pendiente, el cual lo veremos más adelante.

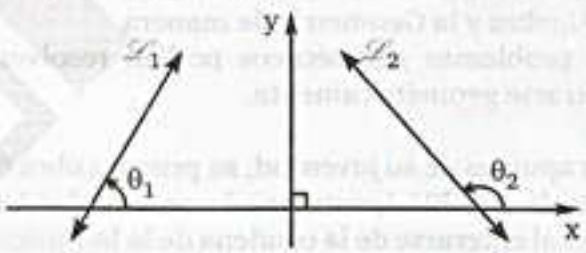
# LA RECTA

## DEFINICIÓN

Es el lugar geométrico de los puntos, si tomamos dos puntos distintos cualesquiera, el valor de la pendiente calculada resulta siempre constante.

## ÁNGULO DE INCLINACIÓN DE LA RECTA

Sea: $\overrightarrow{\mathscr{L}_1} \wedge \overrightarrow{\mathscr{L}_2}$ las rectas, entonces los ángulos de inclinación miden $\theta_1 \wedge \theta_2$ y son formados por las rectas y el eje "x", medido en sentido antihorario.




**Observación:**

$0 \leq \theta_1 \leq 180°$

$0 \leq \theta_2 \leq 180°$

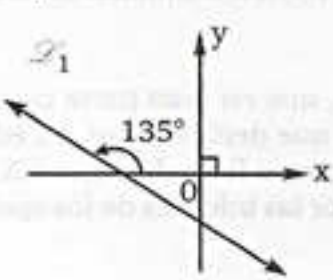
## PENDIENTE DE UNA RECTA

Se llama pendiente de una recta, a la tangente de su ángulo de inclinación y denotaremos:

$$m = \tan\theta$$

**Ejemplo:**

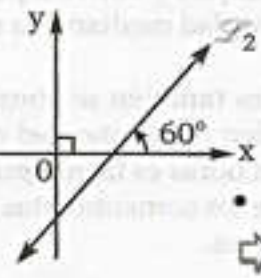
**i)**




- $m_1 = \tan 135°$

⇨ $m_1 = -1$

**ii)**



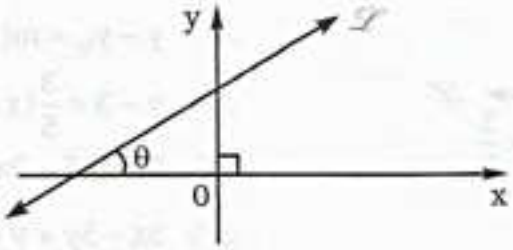

- $m_2 = \tan 60°$

⇨ $m_2 = \sqrt{3}$

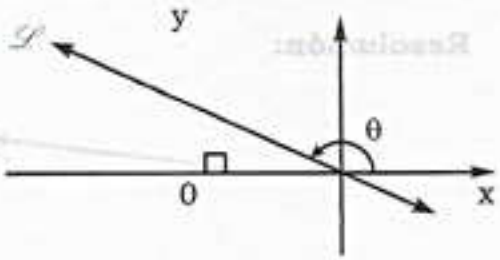
team CALAPENSHKO


## OBSERVACIÓN

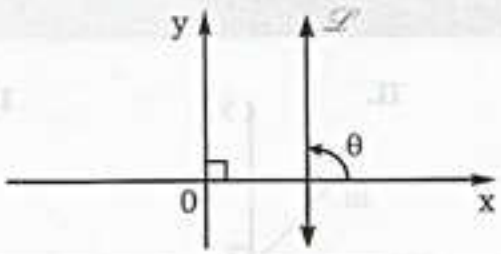
**I.** Si: $0 < \theta < 90°$ entonces: $m > 0$




**II.** Si: $90° < \theta < 180°$ entonces: $m < 0$




**III.** Si: $\theta = 90°$ entonces la pendiente no existe

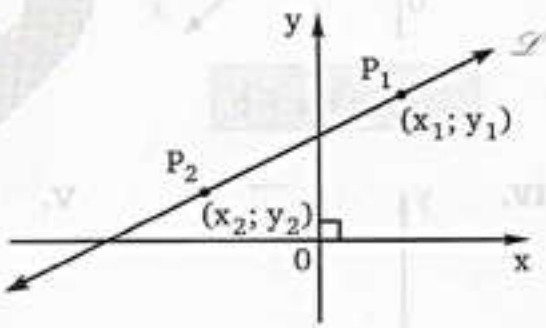



$m = \tan 90°$

## POR PROPIEDAD

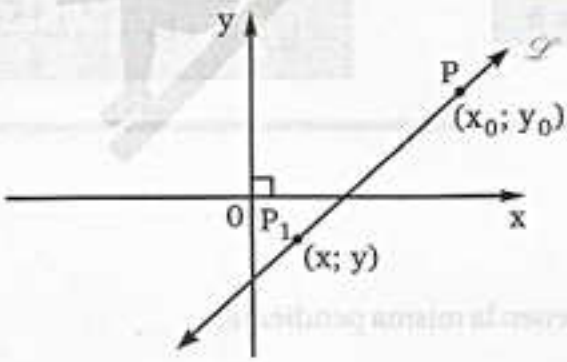
También la pendiente se calcula como la diferencia de ordenadas entre la diferencia de abscisas.

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$




## I. ECUACIÓN DE LA RECTA

Ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene una pendiente. (punto – pendiente)




Donde:

$m$ : pendiente

$(x_0; y_0)$ : Punto conocido

$(x; y)$ : punto de paso ó punto móvil

Su ecuación $\mathscr{L} : y - y_0 = m(x - x_0)$

## II ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA

Es de la forma:

$$Ax + By + C = 0$$

Donde: $m = -\frac{A}{B}$ ; $(B \neq 0)$

**Ejemplo (1):**

$\mathscr{L}_1 : 2x + 3y + 5 = 0 \Rightarrow m_1 = -\frac{2}{3}$

$\mathscr{L}_2 : 3x - 4y + 7 = 0$

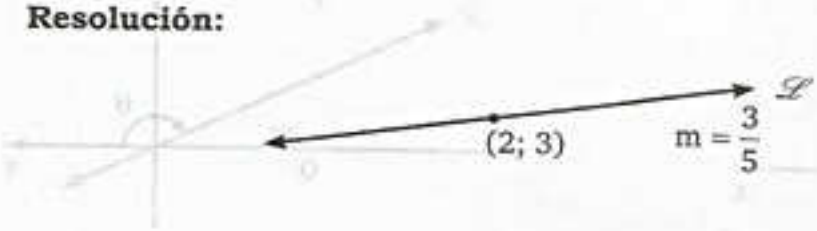
$\Rightarrow m_2 = -\left(\frac{3}{-4}\right) = \frac{3}{4}$

team CALAPENSHKO



**Ejemplo (2):** Hallar la ecuación de la recta $\mathscr{L}$ que pasa por el punto (2; 3) y cuya pendiente es 3/5.

**Resolución:**




$\mathscr{L}: y - y_0 = m(x - x_0)$

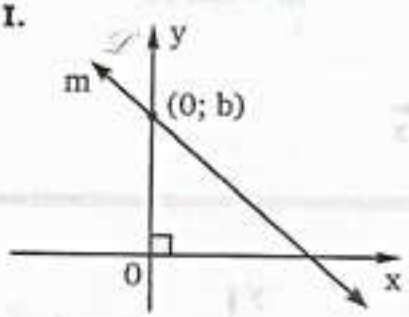
$\mathscr{L}: y - 3 = \frac{3}{5}(x - 2)$

$\mathscr{L}: 5y - 15 = 3x - 6$

$\mathscr{L}: 3x - 5y + 9 = 0$

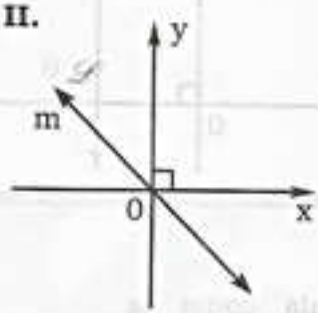
## OBSERVACIÓN

**I.**



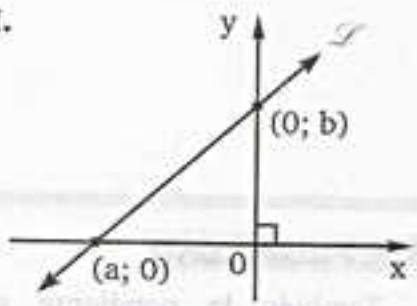

$\mathscr{L}: y = mx + b$

**II.**



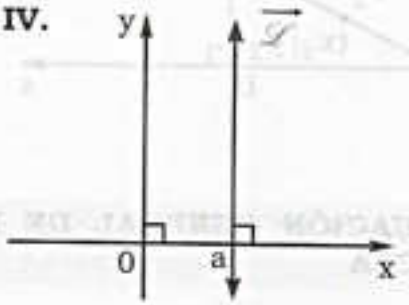

$\mathscr{L}: y = mx$

**III.**



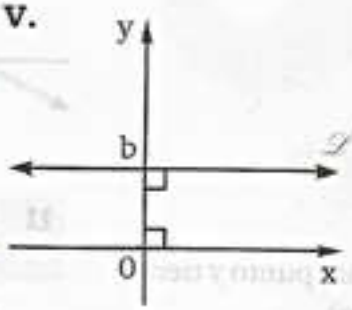

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

**IV.**



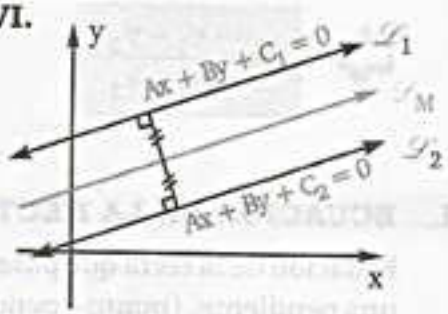

$\mathscr{L}: x = a$

**V.**




$\mathscr{L}: y = b$

**VI.**




$\mathscr{L}_M: Ax + By + \left(\frac{C_1 + C_2}{2}\right) = 0$

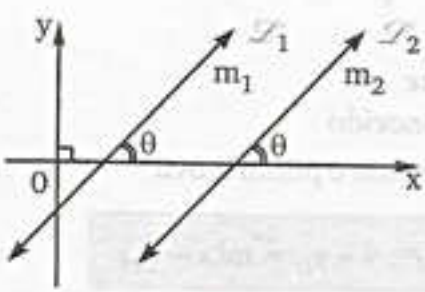
## PROPIEDADES

### I. RECTAS PARALELAS

Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

Si: $\mathscr{L}_1 // \mathscr{L}_2$

$\Rightarrow$ $m_1 = m_2$



team CALAPENSHKO

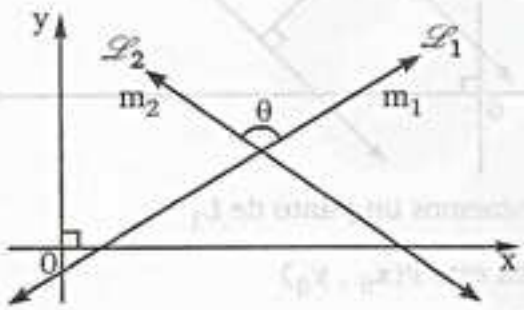

## II. RECTAS PERPENDICULARES

Dos rectas no verticales son perpendiculares si y sólo si sus pendientes son el recíproco negativo una de la otra.

Si: $\mathscr{L}_1 \perp \mathscr{L}_2$

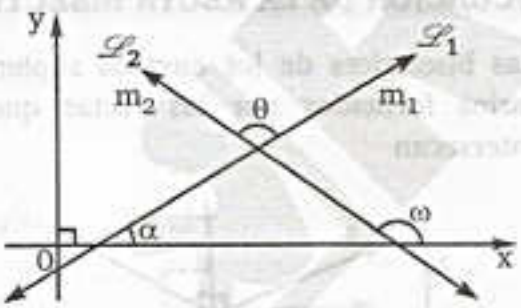
$$\Rightarrow \boxed{m_1 \times m_2 = -1}$$

## III. ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS




$$\Rightarrow \boxed{\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}}$$

**Demostración:**




Se observa que:

$$\alpha + \theta = w$$

$$\rightarrow \alpha = w - \theta$$

$$\rightarrow \tan\alpha = \tan(w - \theta) = \frac{\tan w - \tan\theta}{1 + \tan w \tan\theta} \quad ...(1)$$

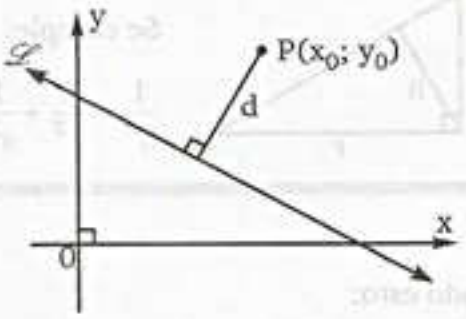
Ademas:

$$m_1 = \tan\alpha \wedge m_2 = \tan w$$

Reemplazando en (1):

$$\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

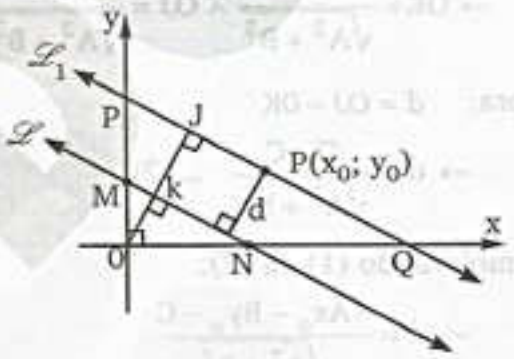
## IV. DISTANCIA DE UN PUNTO A LA RECTA




Como: $\mathscr{L}: Ax + By + C = 0$

$$\Rightarrow \boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

**Demostración:**




Trazamos una recta paralela a $\mathscr{L}$ que pasa por P.

Como $\mathscr{L}_1 // \mathscr{L}$:

$$\rightarrow \mathscr{L}_1: Ax + By + C' = 0$$

Como $P \in L_1$:

$$\rightarrow Ax_o + By_o + C' = 0$$

$$\rightarrow C' = -Ax_o - By_o \quad ...(1)$$

Ahora hallemos los intersectos de $\mathscr{L}$ y $\mathscr{L}_1$ con el eje x e y.

* $\mathscr{L}: Ax + By + C = 0$

  $x = 0 \rightarrow y = -C/B$

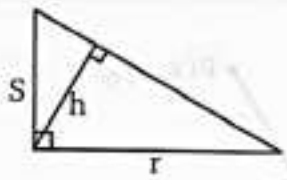
  $y = 0 \rightarrow x = -C/A$

* $L_1: Ax + By + C' = 0$

  $x = 0 \rightarrow y = -C'/B$

  $y = 0 \rightarrow x = -C'/A$

**OBSERVACIÓN**




Se cumple:

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{r^2}+\frac{1}{s^2}$$

Usando esto:

$$\triangle MON:\ \frac{1}{Ok^2}=\frac{1}{(-C/A)^2}+\frac{1}{(-C/B)^2}$$

$$\triangle POQ:\ \frac{1}{OJ^2}=\frac{1}{(-C'/A)^2}+\frac{1}{(-C'/B)^2}$$

$$\rightarrow OK=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} \wedge OJ=\frac{C'}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Ahora: $d = OJ - OK$

$$\rightarrow d=\frac{C'-C}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad ...(2)$$

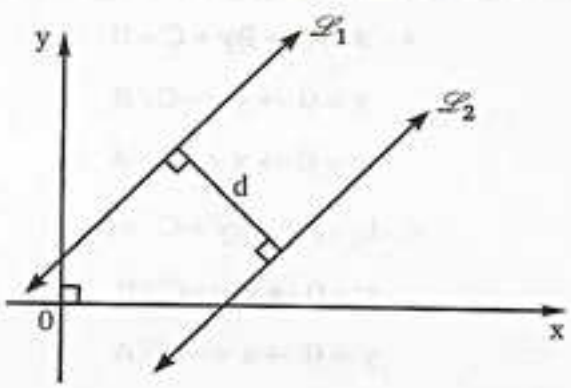
Reemplazando (1) en (2):

$$\rightarrow d=\frac{-Ax_o-By_o-C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Dependiendo de la ubicación de P respecto a $\mathscr{D}$ la expresión $Ax_o + By_o + C$ puede ser negativa o positiva y debido a que la distancia(d) es positiva, en general:

$$d=\frac{|Ax_o+By_o+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

## V. DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS PARALELAS

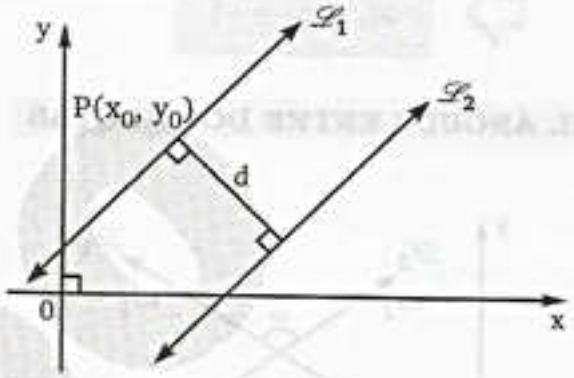



Como: $\mathscr{L}_1 : Ax + By + C_1 = 0$

$\mathscr{L}_2 : Ax + By + C_2 = 0$

$$\Rightarrow \boxed{d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$$

**Demostración:**




Tomemos un punto de $L_1$

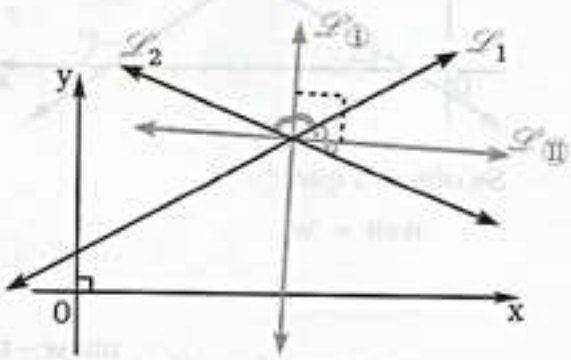
Sea este $P(x_0 , y_0)$

$\Rightarrow Ax_o + By_o + C_1 = 0$ y por el teorema IV:

$$d=\frac{|Ax_o+By_o+C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

## VI. ECUACIÓN DE LA RECTA BISECTRIZ

Las bisectrices de los ángulos suplementarios formados por las rectas que se intersecan




$\mathscr{L}_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$

$\mathscr{L}_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$

$\Rightarrow \mathscr{L}_1 \wedge \mathscr{L}_2$:

$$\boxed{\frac{|A_1x+B_1y+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{|A_2x+B_2y+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}}$$

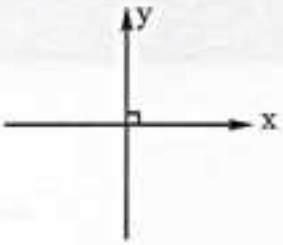
team CALAPENSHKO



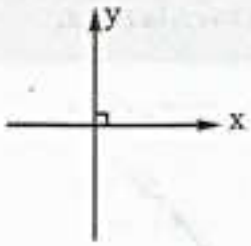
## EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Graficar las rectas en cada plano cartesiano.

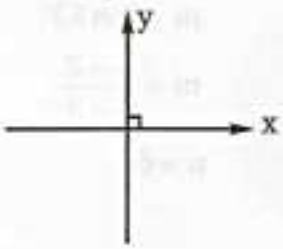
**1.** $\mathscr{L}: x = 2$



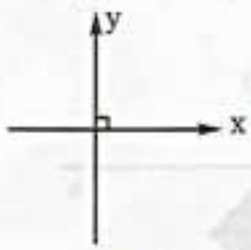

**2.** $\mathscr{L}: x = 5$



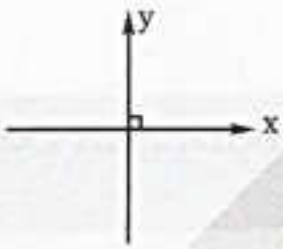

**3.** $\mathscr{L}: y = -2$




**4.** $\mathscr{L}: y = -5$

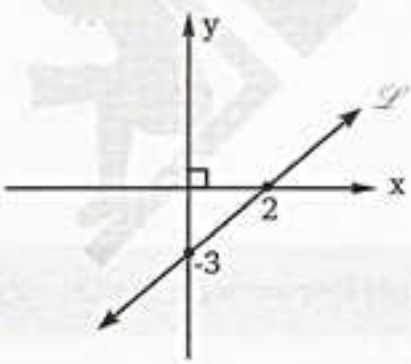



**5.** $\mathscr{L}: x - y = 0$

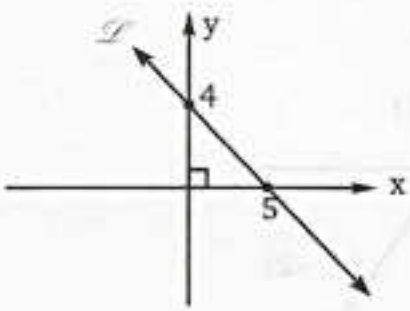



De cada recta, indicar su pendiente.

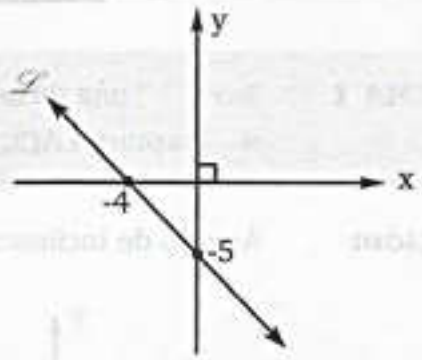
**6.**




**7.**




**8.**




Si conocemos la pendiente y un punto de paso, determinar la ecuación de la recta

**9.** Si: $m = \frac{1}{5} \wedge P_0(3; 2)$

$\mathscr{L}$:

**10.** Si: $m = -3 \wedge P_0(-1; 2)$

$\mathscr{L}$:

**11.** Si: $m = 2 \wedge P_0(0; 3)$

$\mathscr{L}$:

Si cada par ordenado pertenece a cada recta, encontrar la abscisa o la ordenada según sea el caso.

**12.** Si: $P(-3; y) \in \mathscr{L}: 3x + 4y + 5 = 0$

y =

**13.** Si: $Q(0; y) \in \mathscr{L}: 4x - 7y + 28 = 0$

y =

**14.** Si: $M(x; -2) \in \mathscr{L}: 5x + 24y = 45$

x =

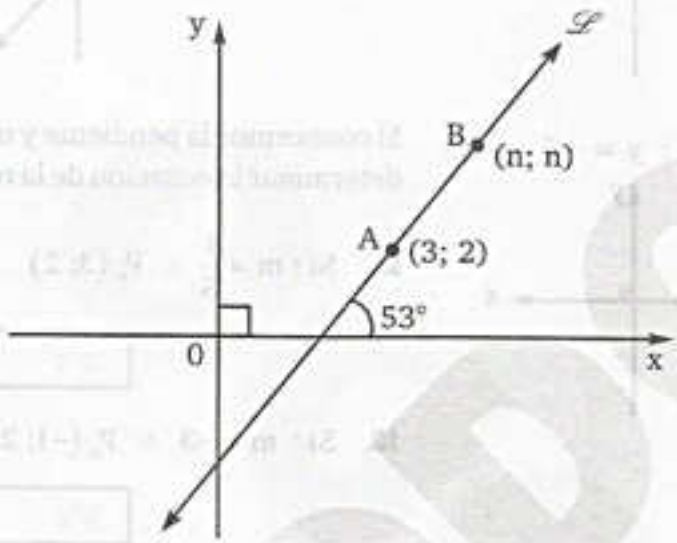
**15.** Si: $N(x; 4) \in \mathscr{L}: 6x + 2y = 36$

x =

## PROBLEMAS RESUELTOS

**PROBLEMA 1** Sea " $\mathcal{L}$ " una recta cuyo ángulo de inclinación mide 53°, determine el valor de "n" si los puntos A(3; 2) y B(n; n) están en la recta.

**Resolución:** Ángulo de inclinación de la recta " $\mathcal{L}$ " es 53°




Igualando pendientes (m)

$$m = \tan 53°$$

$$m = \frac{n-2}{n-3}$$

$$\therefore \quad n = 6$$

**PROBLEMA 2** Determine el valor de "b" si el punto A(b + 1; 2) esta en la recta cuya ecuación es:

$$3x + 2y = 13$$

**Resolución:** Todo punto que pertenece a la recta tendrá que cumplir con su ecuación luego como A(b + 1; 2) pertenece a la recta:

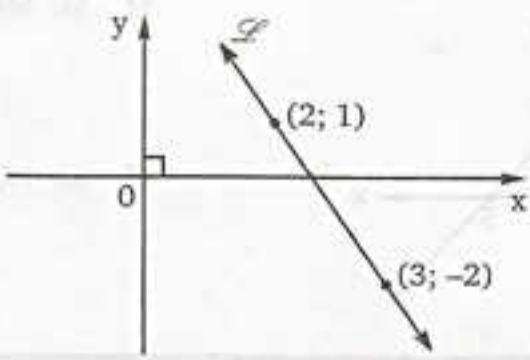
$$3x + 3y = 13$$

Reemplazando: $3(b + 1) + 2(2) = 13$

$$\therefore \quad b = 2$$

**PROBLEMA 3** Determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos (2; 1) y (3; – 2)

**Resolución:** Sea la recta $\mathcal{L}$



team CALAPENSHKO


Hallamos la pendiente de la recta:

$$m = \frac{1-(-2)}{2-3} \Rightarrow m = -3$$

Luego la ecuación de la recta:

$$\boxed{\mathscr{L}: y - y_0 = m(x - x_0)}$$

Sabemos que $(x_0; y_0)$ es un punto conocido de la recta "(2;1)"

Reemplazando : $\mathscr{L}: y - 1 = (-3)(x - 2)$

$$\therefore \quad \mathscr{L}: 3x + y - 7 = 0$$

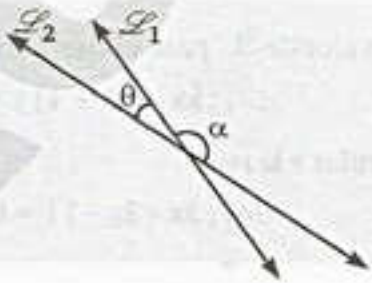
**PROBLEMA 4** Sean las rectas: $\mathscr{L}_1: 4x + 2y - 3 = 0$

$\mathscr{L}_2: x + 3y - 5 = 0$

Calcular la medida del ángulo formado por dichas rectas

**Resolución:** Como : $\mathscr{L}_1: 4x + 2y - 3 = 0 \Rightarrow m_1 = -\left(\frac{4}{2}\right) = -2$

$\mathscr{L}_2: x + 3y - 5 = 0 \Rightarrow m_2 = -\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$




Sabemos : $\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|$

Reemplazando : $\tan\theta = \left|\frac{(-2) - \left(-\frac{1}{3}\right)}{1 + (-2)\left(-\frac{1}{3}\right)}\right|$

$$\tan\theta = \left|\frac{-\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}}\right|$$

$$\tan\theta = |-1| = 1$$

Luego el valor del ángulo que forman las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$

$$\therefore \quad m\angle\theta = 45° \text{ ó } m\angle\alpha = 135°$$

**PROBLEMA 5** Determine el valor de "k" para el cual la recta:

$$\mathcal{L}_1 : kx + (k-1)y - 18 = 0$$

sea paralela a la recta:

$$\mathcal{L}_2 : 4x + 3y + 7 = 0$$

**Resolución:**

$$\mathcal{L}_1 : kx + (k-1)y - 18 = 0$$

$$m_1 = -\left(\frac{k}{k-1}\right)$$

$$\mathcal{L}_2 : 4x + 3y + 7 = 0$$

$$m_2 = -\left(\frac{4}{3}\right)$$

Como $\mathcal{L}_1$ es paralela a la recta $\mathcal{L}_2$:

$$\boxed{m_1 = m_2}$$

Reemplazando: $-\left(\frac{k}{k-1}\right) = -\left(\frac{4}{3}\right)$

$$\therefore \ \mathbf{k = 4}$$

**PROBLEMA 6** Determine el valor de "k" para el cual la recta:

$$\mathcal{L}_1 : kx + (k+1)y + 3 = 0$$

sea perpendicular a la recta:

$$\mathcal{L}_2 : 3x - 2y - 11 = 0$$

**Resolución:**

$$\mathcal{L}_1 : kx + (k+1)y + 3 = 0$$

$$m_1 = -\left(\frac{k}{k+1}\right)$$

$$\mathcal{L}_2 : 3x - 2y - 11 = 0$$

$$m_2 = -\left(\frac{3}{-2}\right) = \frac{3}{2}$$

Como $\mathcal{L}_1$ es perpendicular a la recta $\mathcal{L}_2$

$$\boxed{m_1 \cdot m_2 = -1}$$

Reemplazando: $-\left(\frac{k}{k+1}\right) \cdot \frac{3}{2} = -1$

$$\therefore \ \mathbf{k = 2}$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 7** Una recta $\mathscr{L}$ pasa por el punto (-2; 3) y por la intersección de las rectas:

$$\mathscr{L}_1: x + 5y + 2 = 0$$

$$\mathscr{L}_2: 3x + 4y - 5 = 0$$

Determine la ecuación de la recta $\mathscr{L}$.

**Resolución:**

i) Hallamos el punto de intersección de las $\mathscr{L}_1 \wedge \mathscr{L}_2$ simplemente hay que resolver las dos ecuaciones:

$$\mathscr{L}_1: x + 15y + 2 = 0 \quad \text{.....(1)}$$

$$\mathscr{L}_2: 3x + 4y - 5 = 0 \quad \text{.....(2)}$$

ii) Se multiplica a la primera ecuación por (–3) y después se suman las dos ecuaciones:

$$+\left\{\begin{array}{l} -3x - 5y - 6 = 0 \\ 3x + 4y - 5 = 0 \end{array}\right.$$

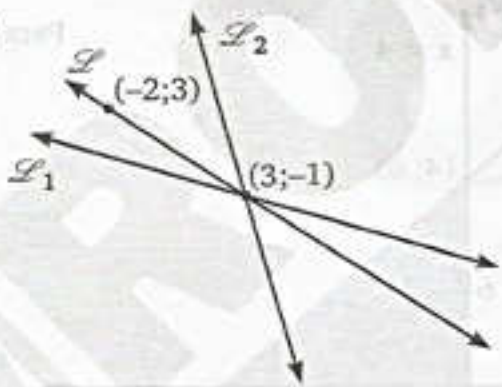
$$-11y - 11 = 0$$

$$y = -1$$

$$x = 3$$

⇨ El punto de intersección es (3; –1)

iii)




Sea la recta $\mathscr{L}$ cuya ecuación nos piden:

$$m = \frac{3-(-1)}{-2-3}$$

$$m = -\frac{4}{5}$$

Luego su ecuación: $\mathscr{L}: (y-(-1)) = -\frac{4}{5}(x-3)$

$$\mathscr{L}: 5(y+1) = -4(x-1)$$

$$\therefore \quad \mathscr{L}: \mathbf{4x + 5y + 1 = 0}$$

twitter.com/calapenshko

**PROBLEMA 8** Determine la longitud del punto Q:(10; 2) a la recta:

$$\mathscr{L}: 2x + y - 7 = 0$$

team CALAPENSHKO

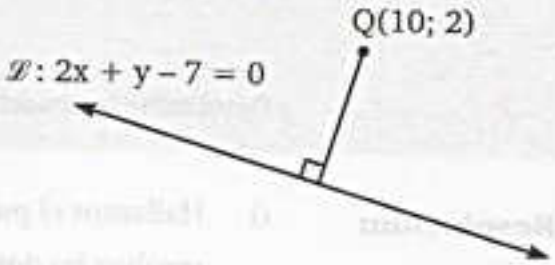

**Resolución:** Para calcular la longitud de un punto a la recta usaremos:

$$d = \frac{|2x + y - 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

$$d = \frac{|2(10) + 2 - 7|}{\sqrt{5}}$$

$$d = \frac{15}{\sqrt{5}} \text{ (racionalizando)}$$

$$\therefore \quad \mathbf{d = 3\sqrt{5}}$$



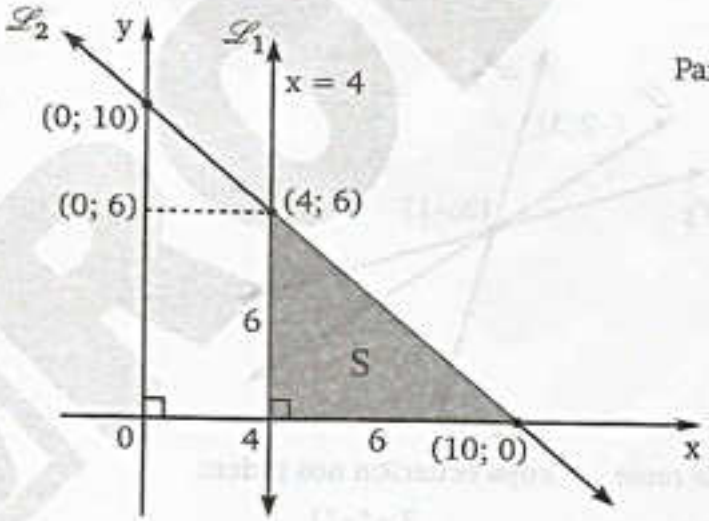

**PROBLEMA 9** Determine el área de la región triangular formado por:

$\mathscr{L}_1 : x = 4$ ; $\mathscr{L}_2 : x + y = 10$ y el eje "x"

**Resolución:** Graficando las rectas:

$\mathscr{L}_1 : x = 4$

$\mathscr{L}_2 : x + y = 10$




Para: $\mathscr{L}_2$ (tabulando)

| x | y |
|---|---|
| 0 | 10 |
| 10 | 0 |

- Para hallar el punto de intersección de las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ simplemente hay que resolver las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 4 \\ x + y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 4 \\ y = 6 \end{matrix}$$

- Luego el área de la región triangular formado por $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ y el eje "x" es "S"

$$S = \frac{6 \times 6}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{S = 18\ u^2}$$

**A todo el público en general:**

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

**Este libro no debe ser prostituito monetariamente**, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

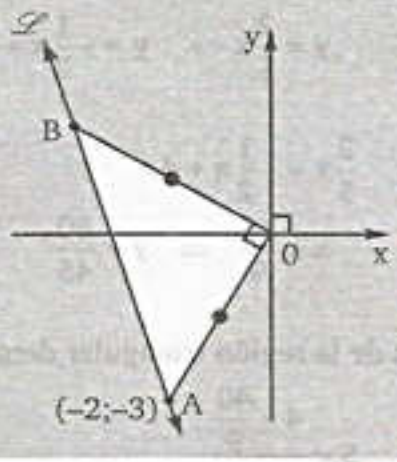
No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

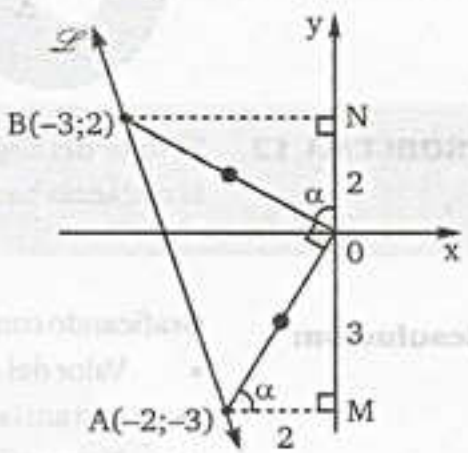
**28 de agosto del 2020**

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 10** Del gráfico mostrado, determine la ecuación de la recta $\mathscr{L}$.




**Resolución:** Trazamos la altura AM y BN luego los triángulos rectángulos AMO y BNO son congruentes, entonces B(–3; 2)




En busca de la ecuación de la recta $\mathscr{L}$

i) $m_L = \dfrac{2-(-3)}{(-3)-(-2)} = -5$

ii) $\mathscr{L}: y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 2 = (-5)(x - -3)$

$\therefore\ \mathscr{L}: 5x + y + 13 = 0$

**PROBLEMA 11** Determine el área de la región limitada por el eje de ordenadas y las rectas:

$y = 0{,}4x\ ;\ y = -0{,}5x + 4$

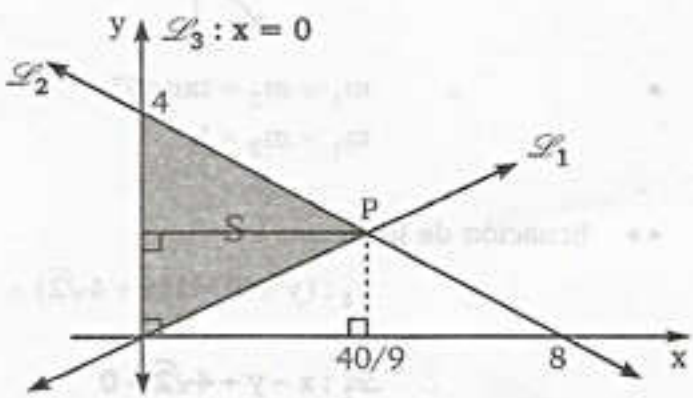
**Resolución:** Sean las rectas $\mathscr{L}_1: y = \dfrac{2}{5}x$

$\mathscr{L}_2: y = -\dfrac{1}{2}x + 4$

$\mathscr{L}_3: x = 0$

| x | y |
|---|---|
| 0 | 4 |
| 8 | 0 |

Graficando:



Para hallar las coordenadas de "P" se igualan las dos ecuaciones $\mathscr{L}_1 \wedge \mathscr{L}_2$ (se desarrollan las dos ecuaciones)

$$y = \frac{2}{5}x \quad \wedge \quad y = -\frac{1}{2}x + 4$$

Igualando : $\frac{2}{5}x = -\frac{1}{2}x + 4$

$$x = \frac{40}{9} \Rightarrow y = \frac{80}{45}$$

Luego el área de la región triangular determinada por $\mathscr{L}_1$; $\mathscr{L}_2$ y $\mathscr{L}_3$

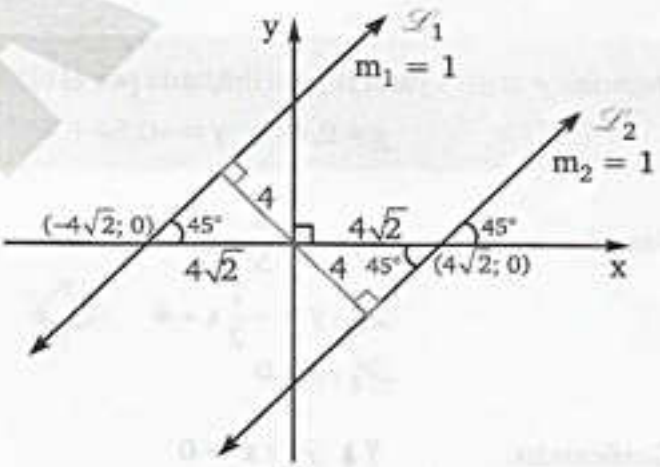
$$S = \frac{4 \times \frac{40}{9}}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{S = \frac{80}{9}\ u^2}$$

**PROBLEMA 12** El valor del ángulo de inclinación de una recta es de 45°. Determine su ecuación, si la distancia hacia el origen es 4 u.

**Resolución:** Graficando con respecto al enunciado:

- Valor del ángulo de inclinación 45°
- •• Distancia con respecto al origen 4 u
- ••• Dos posibilidades




- $m_1 = m_2 = \tan 45°$

  $m_1 = m_2 = 1$

- •• Ecuación de las rectas $L_1 \wedge L_2$

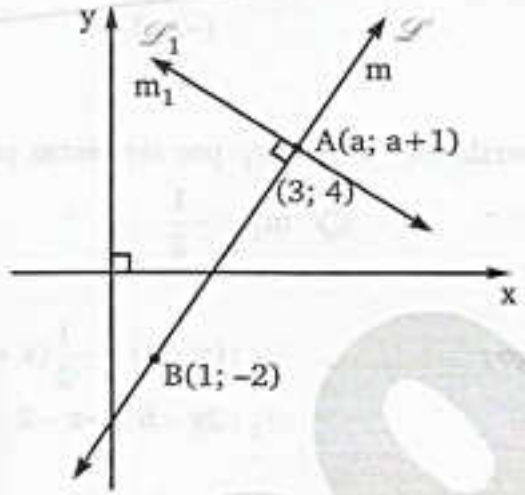
$$\mathscr{L}_1 : (y - 0) = 1(x + 4\sqrt{2}) \wedge \mathscr{L}_2 : (y - 0) = 1(x - 4\sqrt{2})$$

$$\therefore \quad \mathscr{L}_1 : \mathbf{x - y + 4\sqrt{2} = 0} \quad \wedge \quad \mathscr{L}_2 : \mathbf{x - y - 4\sqrt{2} = 0}$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 13** La pendiente de la recta " $\mathcal{L}$ " que pasa por los puntos A(a; a+1) y B(1; –2) es 3. Determine la ecuación de la recta $\mathcal{L}_1$ que es perpendicular a $\mathcal{L}$ y pasa por el punto A.

**Resolución:**




Sea "m" la pendiente de la recta $\mathcal{L}$, además es $m = 3$

Igualando pendientes:

$$m = 3 = \frac{(a+1)-(-2)}{a-1}$$

$$3a - 3 = a + 3$$

$$a = 3$$

$\therefore$ A: (3; 4)

Luego : $\boxed{m \cdot m_1 = -1}$

$$m_1 = -\frac{1}{3}$$

Finalmente hallamos la ecuación de la recta $\mathcal{L}_1$

$$\mathcal{L}_1 : (y-4) = -\frac{1}{3}(x-3)$$

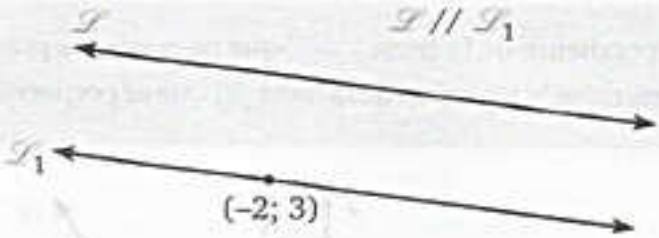
$$3y - 12 = -x + 3$$

$$\therefore \ \mathcal{L}_1 : x + 3y - 15 = 0$$

**PROBLEMA 14** Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto (–2; 3) y es paralela a la recta: $x + 2y + 9 = 0$

**Resolución:** Sea la recta : $\mathcal{L} : x + 2y + 9 = 0 \Rightarrow m_{\mathcal{L}} = -\frac{1}{2}$

Y la recta $\mathcal{L}_1$ paralela a $\overrightarrow{\mathcal{L}}$ que pasa por el punto (–2; 3)




La pendiente $m_{\mathscr{L}} = m_1$ por ser rectas paralelas :

$$\Rightarrow m_1 = -\frac{1}{2}$$

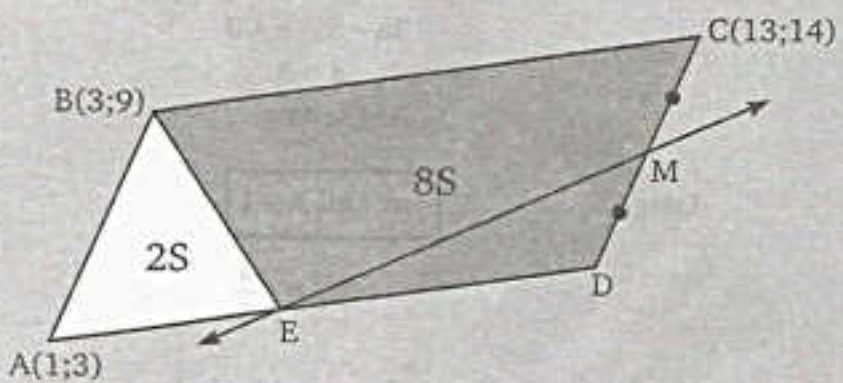
Luego :

$$\mathscr{L}_1 : (y-3) = -\frac{1}{2}(x+2)$$

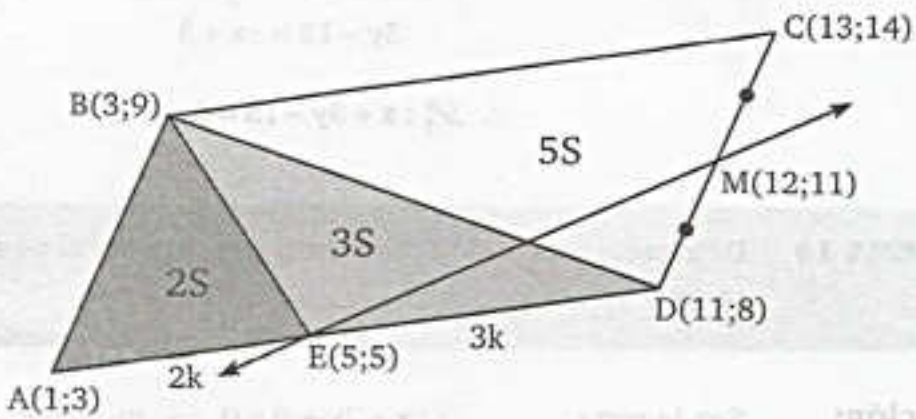
$$\mathscr{L}_1 : 2y - 6 = -x - 2$$

$$\therefore \ \mathscr{L}_1 : x + 2y - 4 = 0$$

**PROBLEMA 15** Del gráfico mostrado, si ABCD es un paralelogramo determine la ecuación de la recta " $\mathscr{L}$ "




**Resolución:**




- Trazamos la diagtonal BD entonces AE = 2k ∧ ED = 3k guardan la misma relación de las áreas

team CALAPENSHKO


- Paralelogramo: $A + C = B + D \Rightarrow D(11; 8)$

- Sea : $E(x_0; y_0)$

$$x_0 = \frac{(1)3k + (11)2k}{5k} = 5 \wedge y_0 = \frac{(3)(3k) + (8)2k}{5k} = 5$$

Entonces : $E(5; 5)$

- En busca de la ecuación de la recta:

$$m_{\mathscr{L}} = \frac{11-5}{12-5} = \frac{6}{7}$$

$$\mathscr{L}: (y - y_0) = m(x - x_0)$$

$$\mathscr{L}: (y - 5) = \frac{6}{7}(x - 5)$$

$$\therefore \mathscr{L}: 6x - 7y + 5 = 0$$

**PROBLEMA 16** La recta $\mathscr{L}: 2x + 3y = 12$, interseca a los ejes coordenados en los puntos P y Q, determine la ecuación de la recta que pase por el origen de coordenadas y por el punto medio del segmento $\overline{PQ}$.

**Resolución:**

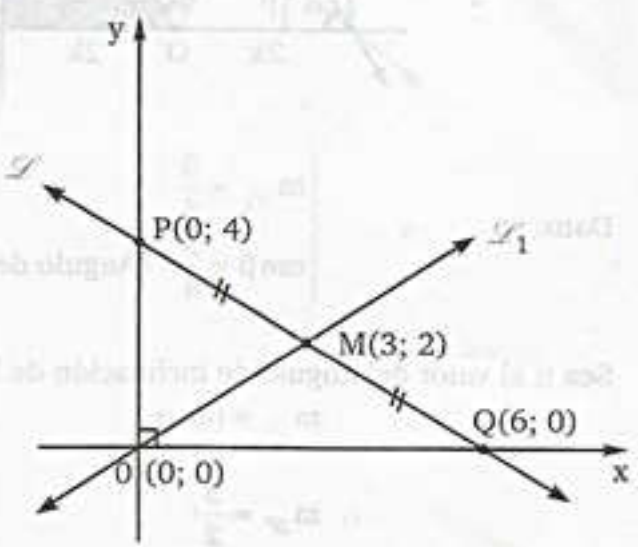
- La recta, $\mathscr{L}: 2x + 3y = 12$

| x | y | |
|---|---|---|
| 0 | 4 | $\Rightarrow (0; 4)$ |
| 6 | 0 | $\Rightarrow (6; 0)$ |

Se tabula para hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados.

- "M" es punto medio de $\overline{PQ}$.

$$M = (3; 2)$$



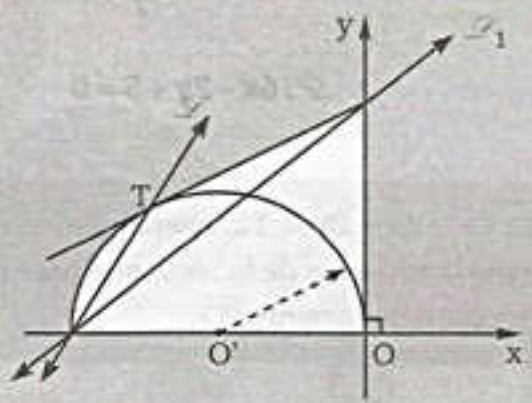
- La ecuación de la recta pedida $\mathscr{L}_1$ es:

$$m_1 = \frac{2-0}{3-0} \Rightarrow m_1 = \frac{2}{3}$$

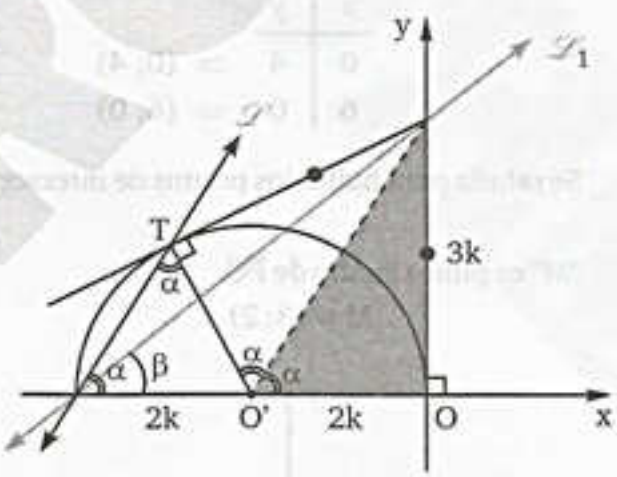
Luego: $\mathscr{L}_1 : (y-2) = \frac{2}{3}(x-3)$

$$\therefore \mathscr{L}_1 : \mathbf{2x - 3y = 0}$$

**PROBLEMA 17** En la figura, calcular la pendiente de la $\mathscr{L}$, si la pendiente de la $\mathscr{L}_1$ es 3/4. (T: punto de tangencia)




**Resolución:**




Dato: $\begin{cases} m_{\mathscr{L}_1} = \frac{3}{4} \\ \tan\beta = \frac{3}{4} \end{cases}$ (Ángulo de inclinación de la recta $\mathscr{L}_1$, mide β)

Sea α el valor del ángulo de inclinación de la recta $\mathscr{L}$.

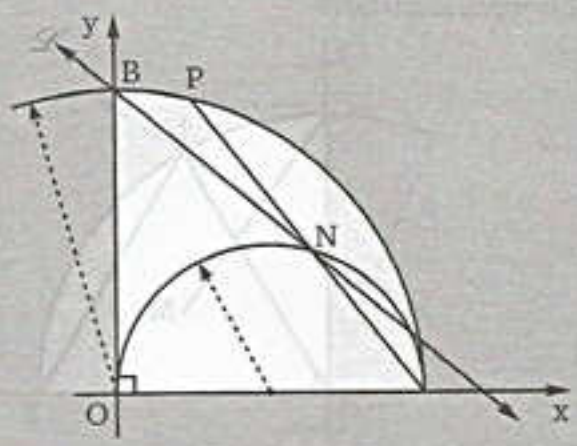
$$m_{\mathscr{L}} = \tan\alpha$$

$$\therefore \mathbf{m_{\mathscr{L}} = \frac{3}{2}}$$

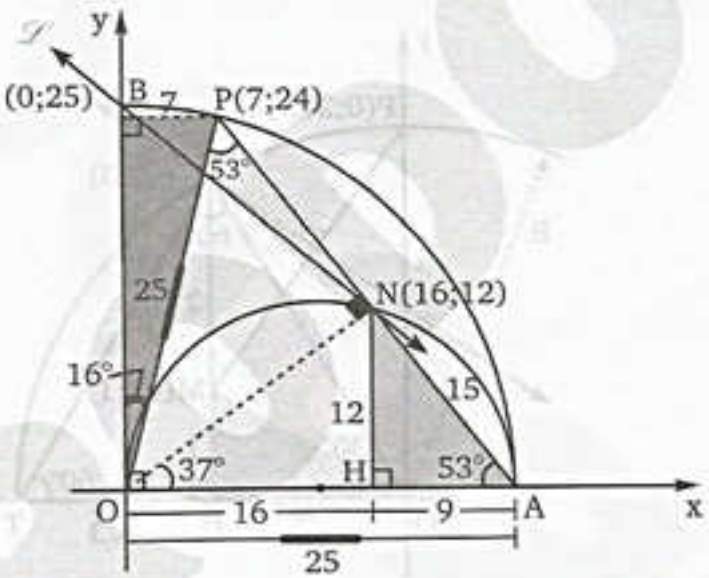
team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 18** En el gráfico, determinar la ecuación de la recta $\mathcal{L}$, si P(7; 24)




**Resolución:**




Del gráfico : $OP = 25 \Rightarrow m\angle OAP = 53°$ (aproximado)

Trazamos la altura NH y hallamos los lados del triángulo rectángulo OHN y AHN luego:

$$m_{\mathcal{L}} = \frac{25-12}{0-16}$$

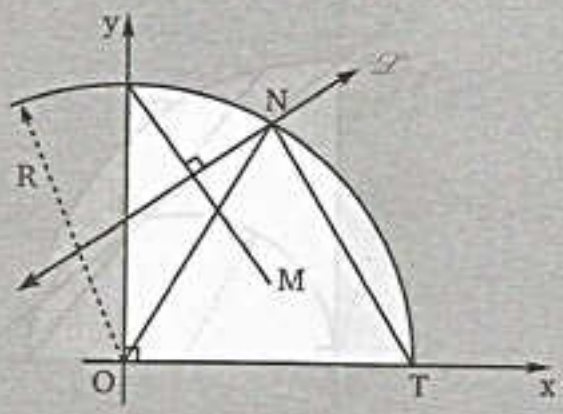
$$m_{\mathcal{L}} = -\frac{13}{16}$$

$$\mathcal{L}: (y - y_o) = m(x - x_o)$$

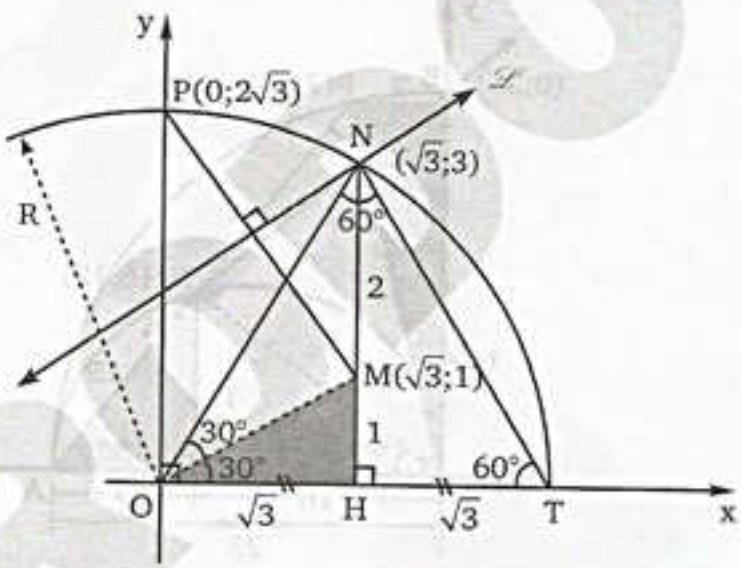
$$\mathcal{L}: (y - 25) = -\frac{13}{16}(x - 0)$$

$$\therefore \quad \mathcal{L}: 13x + 16y - 400 = 0$$

**PROBLEMA 19** De la figura, determine la ecuación de la $\mathscr{L}$, si $R = 2\sqrt{3}$ y M es el centro del triángulo equilátero ONT.




**Resolución:**




M : baricentro del $\Delta_{ONT}$

Pendiente de la recta $\mathscr{L}_{PM}$

$$m_{PM} = \frac{2\sqrt{3}-1}{0-\sqrt{3}} \Rightarrow m_{PM} = \frac{1-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

Como : $$m_L \cdot m_{PM} = -1 \Rightarrow m_L = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-1}$$

Luego : $$\mathscr{L}: (y-3) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-1}(x-\sqrt{3}) \text{ (racionalizando)}$$

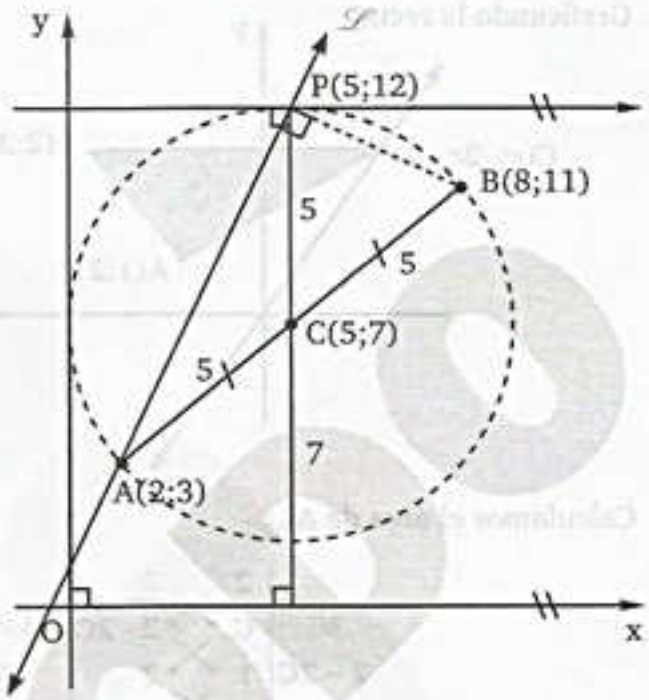
$$\mathscr{L}: (y-3) = \frac{(6+\sqrt{3})}{11}(x-\sqrt{3})$$

$$\therefore \quad \mathscr{L}: (6+\sqrt{3})x - 11y + 6(5-\sqrt{3}) = 0$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 20** Dados los puntos A(2; 3) y B(8; 11) determine la e ecuación de la recta que pasa por el punto A y por el punto "P" desde el cual se observa el segmento $\overline{AB}$ con un ángulo recto y además tiene la mayor ordenada posible.

**Resolución:**




Calculando la distancia:

$$AB = 10$$

Como la $m\angle APB = 90°$ entonces por A y B pasa una circunferencia de centro "C".

Luego trazamos una recta tangente a la circunferencia paralela al eje "x" en "P" para que su ordenada sea la mayor posible.

$$(y_{Máx.} = 12)$$

Las coordenadas de P(5; 12)

Hallamos la pendiente de la recta "L" que pasa por A y P.

$$m_{\mathscr{L}} = \frac{12-3}{5-2} \Rightarrow m_{\mathscr{L}} = 3$$

La ecuación de la recta "$\mathscr{L}$":

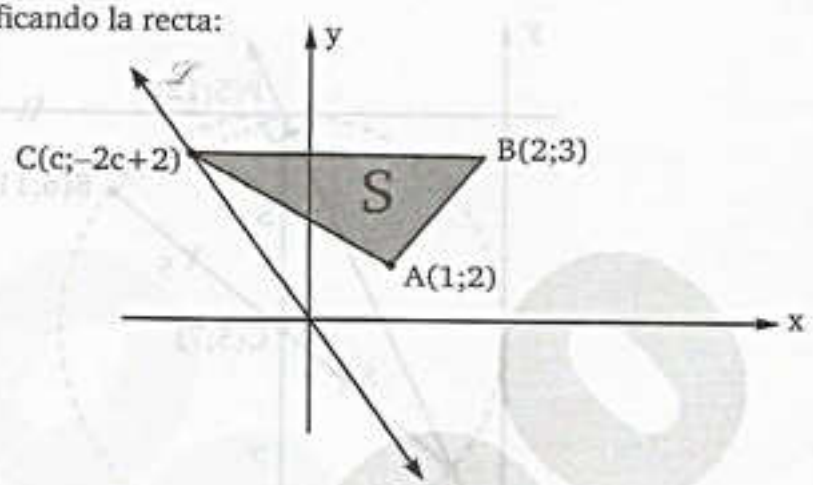
$$\mathscr{L}: 3 = \frac{y-3}{x-2}$$

$$\therefore \ \mathscr{L}: 3x - y - 3 = 0$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 21** El área de la región triangular ABC es 8 $u^2$ dos de sus vértices son los puntos A(1;2) y B (2; 3), si el vértice "C" de dicho triángulo está en la recta y = 2 - 2x
Calcular la suma de las coordenadas del vértice c.

**Resolución:** Graficando la recta:




Calculamos el área de $\Delta_{ABC}$

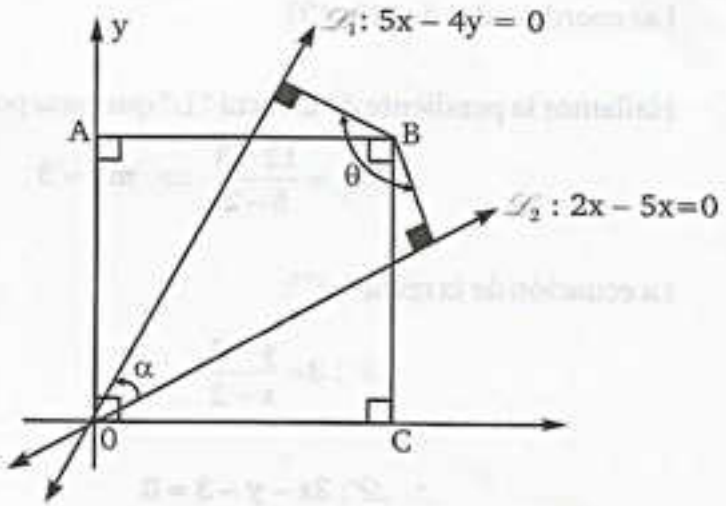
$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & \\ 3C & C \times 2-2C & 4-4C \\ 2-2C & 1 \times 2 & 2C \\ 4 & 2 \times 3 & 3 \\ \hline I = 6 + C & & D = 7 - 2C \\ \hline \end{array}$$

$$S = \frac{D - I}{2}$$

Reemplazando: $8 = \dfrac{7 - 2C - 6 - C}{2} \Rightarrow C = -5$

$\therefore$ **C (−5;12)**

**PROBLEMA 22** Si en el gráfico OABC es un cuadrado.
Determine el valor de "θ"



team CALAPENSHKO


$\mathscr{L}_1 : 5x - 4y = 0 \Rightarrow m_1 = \frac{5}{4} \quad \wedge \quad \mathscr{L}_2 : 2x - 5y = 0 \Rightarrow m_2 = \frac{2}{5}$

Hallamos la medida del ángulo "α" $\tan\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 . m_2}$

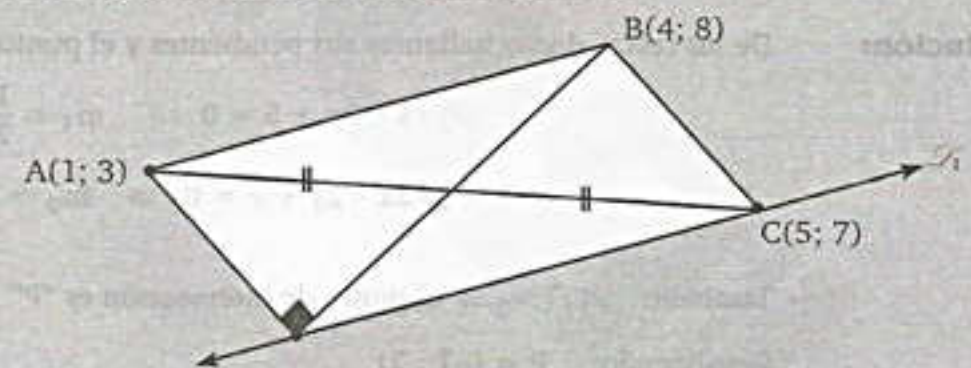
Reemplazando: $\tan\alpha = \frac{\frac{5}{4} - \frac{2}{5}}{1 + \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{5}} = \frac{\frac{17}{20}}{\frac{3}{2}}$

$\tan\alpha = \frac{17}{30} \Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{17}{30}\right)$

Además: $\theta + \alpha = \pi \Rightarrow \theta = \pi - \alpha$

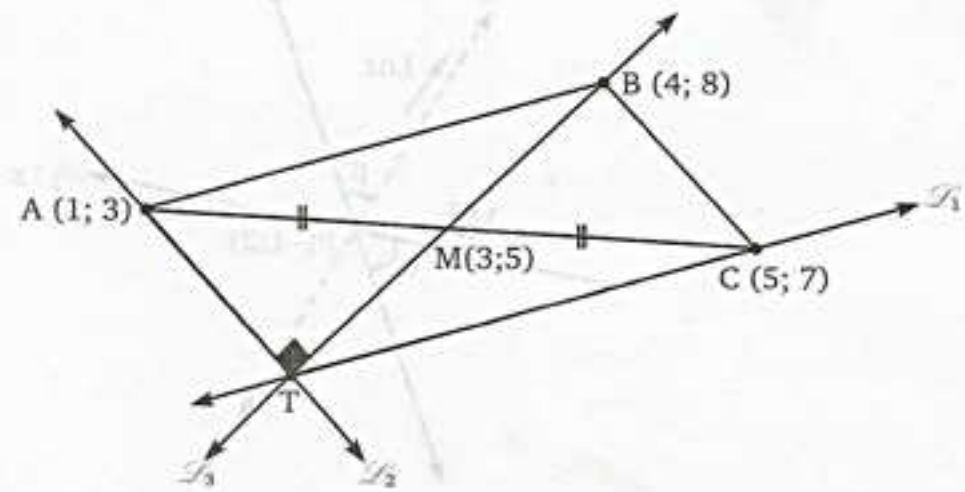
Reemplazando: $\therefore \quad \theta = \pi - \arctan\left(\frac{17}{30}\right)$

**PROBLEMA 23** Del esquema, determine la ecuación de la recta $\mathscr{L}_1$.




**Resolución:** Por el punto medio, hallamos las coordenadas de "M"

M = ( 3 ; 5 )



Hallemos la pendiente de $\mathscr{L}_3$: $m = 3 \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{3}$ (Por rectas perpendiculares).

Determinar las rectas: $\mathscr{L}_2$: $x + 3y - 10 = 0$ y $\mathscr{L}_3$: $3x - y - 4 = 0$ } Resolviendo las ecuaciones encontramos el punto "T"

$$\Rightarrow x = \frac{11}{5} \qquad \Rightarrow \therefore T\left(\frac{11}{5}; \frac{13}{5}\right)$$
$$\Rightarrow y = \frac{13}{5}$$

Con los puntos "T" y "C" logramos la pendiente de $\mathscr{L}_1$: $M_1 = \frac{11}{7}$; y finalmente determinamos la ecuación:

$$\mathscr{L}_1 : 11x - 7y - 6 = 0$$

**PROBLEMA 24** Un rayo de luz corre a lo largo de la recta $\mathscr{L}_1: x - 2y + 5 = 0$ hasta llegar el espejo cuya ecuación es $\mathscr{L}_2 : 3x - 2y + 7 = 0$ en el cual se refleja. Determine la ecuación de la recta que contiene el rayo reflejado.

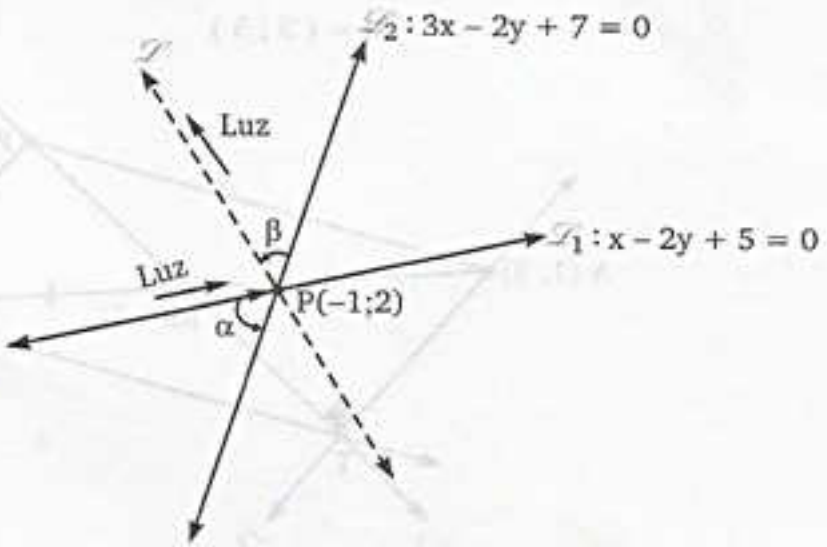
**Resolución:** De las rectas dadas hallamos sus pendientes y el punto de intersección.

$$\mathscr{L}_1 : x - 2y + 5 = 0 \Rightarrow \quad m_1 = \frac{1}{2}$$
$$\mathscr{L}_2 : 3x - 2y + 7 = 0 \Rightarrow \quad m_2 = \frac{3}{2}$$

También: $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 \Rightarrow$ el punto de intersección es "P"

Resolviendo: $P = (-1 ; 2)$

Ahora graficando las rectas.



team CALAPENSHKO


Recordar: $\angle$ de incidencia = $\angle$ reflejado

$$\tan\alpha = \tan\beta$$

$$\Rightarrow \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} = \frac{m - m_2}{1 + m.m_2}$$

Reemplazando:

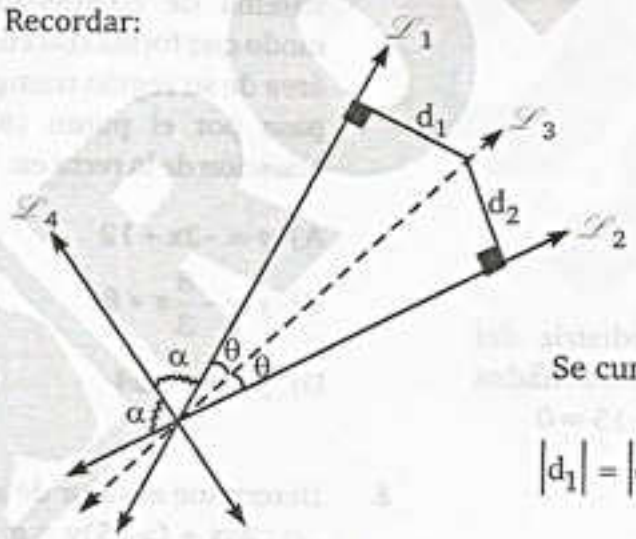
$$\frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{m - \frac{3}{2}}{1 + m\left(\frac{3}{2}\right)} \Rightarrow \quad m = \frac{29}{2}$$

Luego: $\mathscr{L} : y - 2 = \frac{29}{2}(x+1)$

Rayo reflejado: $\therefore$ **$L = 29x - 2y + 33$**

**PROBLEMA 25** Determinar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas: $\mathscr{L}_1 : 7x - y + 7 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : x - y + 1 = 0$

**Resolución:** Recordar:




Se cumple que:

$$|d_1| = |d_2| \Rightarrow \frac{|7x + -y + 7|}{\sqrt{49+1}} = \frac{|x - y + 1|}{\sqrt{1+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{|7x - y + 7|}{5\sqrt{2}} = \frac{|x - y + 1|}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow |7x - y + 7| = 5|x - y + 1|$$

$\Rightarrow$ i) $7x - y + 7 = 5(x - y + 1)$ Resolviendo: $2x + 4y + 2 = 0$

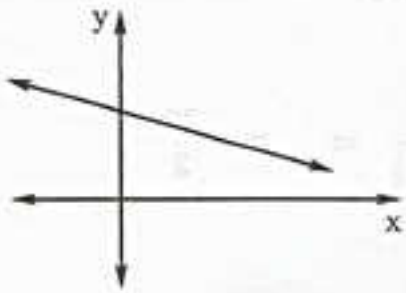
ii) $7x - y + 7 = -5(x - y + 1)$ Resolviendo: $12x - 6y + 12 = 0$

También: $\left.\begin{array}{l} \mathscr{L}_3 : 12x - 6y + 12 = 0 \\ \mathscr{L}_4 : x + 2y + 1 = 0 \end{array}\right\}$ **Rectas bisectrices**

team CALAPENSHKO


## PROBLEMAS PROPUESTOS

**1.** La recta del gráfico adjunto está mejor representada por la ecuación:




A) $y = x + 1$
B) $y = 0{,}1x + 4$
C) $y = 0{,}1x - 1$
D) $y = 100x + 5$
E) $y = -0{,}1x + 1$

**2.** Los vértices de un triángulo son los puntos A(1; 3), B = (-2; 8), C = (6; -2). Hallar la ecuación de la recta que contiene a la mediana $\overline{BM}$:

A) $3x + 5y + 12 = 0$
B) $13x - 7y - 18 = 0$
C) $x + y - 4 = 0$
D) $15x + 11y - 58 = 0$
E) $2x - 2y + 83 = 0$

**3.** Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento, que los ejes coordenados determinan en la recta $5x + 3y - 15 = 0$

A) $3x - 5y - 8 = 0$
B) $3x + 5y - 8 = 0$
C) $3x - 5y + 8 = 0$
D) $2x - 4x - 5 = 0$
E) $6x - 3y - 5 = 0$

**4.** Se tienen los puntos P(2; 3) y Q(−1; 0). Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto Q y que es perpendicular al segmento PQ.

A) $y - 2x + 1$ B) $y - x + 2$ C) $y = x - 1$
D) $y = -2x - 1$ E) $y = -x - 1$

**5.** $\mathscr{L}$ es una recta de la ecuación:

$$ax + by + 6 = 0$$

y pasa por los puntos (1; 4) y (3; −2). Hallar el valor de: a + b

A) $\frac{12}{7}$ B) $\frac{7}{12}$ C) $-\frac{7}{12}$
D) $-\frac{24}{7}$ E) $-\frac{6}{7}$

**6.** Se tienen la ecuación de la recta:

$\mathscr{L}: 4x - 5y + 3 = 0$

y el punto P(− 6; 4). Halle el valor de la proyección de P sobre $\mathscr{L}$.

A) (2; −1) B) (−1; 2) C) (−1; −2)
D) (−2; −1) E) (1; 2)

**7.** Una recta interseca a los ejes positivos de un sistema de coordenadas cartesianas, de modo que forma con ellos un triángulo, si el área de su región triangular es 12 y la recta pasa por el punto (6; −8); entonces la ecuación de la recta es:

A) $y = -2x + 12$ B) $y = -8x + 24$
C) $y = -\frac{8}{3}x + 8$
D) $y = 8x + 24$ E) $y = \frac{8}{3}x + 8$

**8.** Determine el valor de a para que las rectas $\mathscr{L}_1: 2ax + (a-5)y = a$ y $\mathscr{L}_2: 9x - ay = -8$ sean paralelas y perpendiculares.

A) $(23 \text{ y } 0); \left(3 \text{ y } -\frac{15}{2}\right)$
B) $(23 \text{ y } 1); (3 \text{ y } -15)$
C) $\left(3 \text{y } \frac{15}{2}\right); (-23 \text{ y } 0)$
D) $\left(3 \text{ y } -\frac{15}{2}\right); (23 \text{ y } 0)$
E) $\left(3 \text{ y } -\frac{15}{2}\right); (-23 \text{ y } 0)$

team CALAPENSHKO


**9.** Sean las rectas:
$\mathscr{L}_1: 3x+5y-11=0$; $\mathscr{L}_2: 6x+10y-5=0$
entonces la distancia entre ellas es:

A) $\frac{9}{2\sqrt{34}}$ B) $\frac{11}{2\sqrt{34}}$ C) $\frac{13}{2\sqrt{34}}$
D) $\frac{15}{2\sqrt{34}}$ E) $\frac{17}{2\sqrt{34}}$

**10.** Determinar el valor de "B" para que las tres rectas sean concurrentes:
$\mathscr{L}_1: 8x+By-1=0$
$\mathscr{L}_2: 3x+2y-3=0$
$\mathscr{L}_3: x-5y+16=0$

A) –3 B) 3 C) 2
D) –2 E) 1

**11.** En un rectángulo ABCD, los vértices A y C tienen coordenadas (– 4; 3) y (7; 1) si el vértice B está sobre la recta:
$\mathscr{L}: x+2y+7=0$
entonces las coordenadas del vértice B son:

A) (–1; –1) B) (–1; –2) C) (–2; –3)
D) (–1; –3) E) (–2; –2)

**12.** Hallar la ecuación cartesiana de la recta que pasa por (3; 2) y dista del punto (5; 6), 2 unidades.

A) $3x+4y-1=0$
B) $3x-4y-1=0$
C) $2x-3y-1=0$
D) $2x+3y-1=0$
E) $3x-2y-1=0$

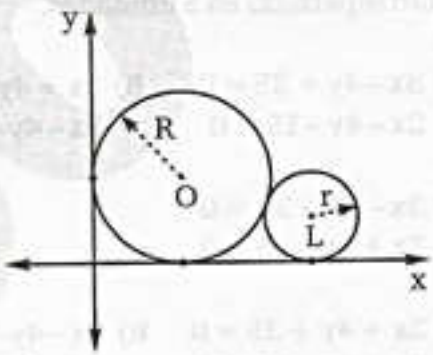
**13.** Hallar la ecuación de la recta bisectriz del ángulo determinado por los rayos que tienen su origen en (0; 0) y pasan por (2; 6) y (9; 3) respectivamente.

A) $y=x$ B) $y=\frac{1}{2}x$ C) $y=2x$
D) $y=\frac{1}{3}x$ E) $y=3x$

**14.** Hallar la medida del ángulo agudo determinado por las rectas de pendientes k y $\frac{k-1}{k+1}$

A) 60° B) 15° C) 30°
D) 45° E) 75°

**15.** Según la figura R = 9 y r = 4. Hallar la pendiente de la recta que contiene a los puntos "L" y O.




A) $-\frac{3}{7}$ B) $-\frac{7}{12}$ C) $-\frac{2}{11}$
D) $-\frac{5}{12}$ E) $-\frac{5}{13}$

**16.** Hallar el área de la región trapecial limitado por la recta:
$3x+2y+4=0$
el eje x, y las rectas $x=1$ y $x=5$.

A) $12\,u^2$ B) $15\,u^2$ C) $26\,u^2$
D) $30\,u^2$ E) $36\,u^2$

**17.** Calcular la suma de los valores de k para que la recta:
$k.x+(k+1)y+3=0$
sea perpendicular a la recta:
$3x-2y-11=0$

A) –1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$
D) 1 E) 2

**18.** Se tiene la recta $\mathcal{L}_1: x + 2y = 16$ y la recta $\mathcal{L}_2$ que es perpendicular a $\mathcal{L}_1$ e intersecta al eje x en el punto A(1; 0). Halle el área de la región triangular ABC (en $u^2$) donde: $\{B\} = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ y $\{C\} = \mathcal{L}_1 \cap$ Eje x:

A) 40 B) 45 C) 46
D) 47 E) 50

**19.** Halle las ecuaciones de las rectas que son paralelas a la recta $\mathcal{L}: 3x - 4y - 10 = 0$ y que están separadas en 5 unidades.

A) $3x - 4y + 35 = 0$ y $2x - 4y - 15 = 0$
B) $3x + 4y + 35 = 0$ y $3x - 4y - 15 = 0$
C) $3x - 4y + 35 = 0$ y $3x + 4y - 15 = 0$
D) $3x + 4y + 35 = 0$ y $3x + 4y - 15 = 0$
E) $3x - 4y + 15 = 0$ y $3x - 4y - 35 = 0$

**20.** Si: P(7; 9), Q(–5; –7) y R = (12; –3) son vértices de un triángulo. Halle la ecuación de la ceviana trazada desde Q que interseca a la mediatriz de $\overline{PQ}$ en un punto de $\overline{PR}$ si: Ax + By = C es la ecuación de la recta, entonces (A + B) es:

A) 230 B) 237 C) 238
D) 236 E) 235

**21.** La base mayor de un trapecio isósceles une los puntos A = (–2; 8) y B = (–2; –4) uno de los extremos de la base menor tiene por coordenadas C = (3; –2). Si D = (x; y) es el otro vértice del trapecio. Halle la ecuación de una recta perpendicular a $\overline{BD}$ y que pasa por el punto medio de $\overline{CD}$.

A) $2y + x - 7 = 0$
B) $x + 2y + 7 = 0$
C) $x - 2y - 7 = 0$
D) $x + 2y - 11 = 0$
E) $x - 2y + 7 = 0$

**22.** Dadas las rectas:
$\mathcal{L}_1: 2x + 3y + 4 = 0$ y $\mathcal{L}_2: 4y + 3x - 6 = 0$
Hallar un punto de $\mathcal{L}_1$ que diste 2 unidades de $\mathcal{L}_2$.

A) (–4; 4) B) (4; –4)
C) (–64; 44)
D) (32; –22) E) (–22; 32)

**23.** Halle la ecuación de una recta que interseca al eje positivo de las x un segmento de longitud igual a 7, que pase además por el punto de abscisa x = 4, perteneciente a la recta 5x + 3y = 30

A) $10x - 9y + 70 = 0$
B) $9x + 10y - 70 = 0$
C) $10x + 9y - 70 = 0$
D) $9x - 10y + 70 = 0$
E) $x + 9y - 17 = 0$

**24.** Dadas las rectas:

$$\mathcal{L}_1: 2^n x - 2^{n-1} y + 3 = 0$$
$$\mathcal{L}_2: 4^n x - 2^{-n} y - 5 = 0$$

Hallar el valor de "n" para que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ sean paralelas, además determinar su pendiente (m).

A) $n = \frac{1}{2}; m = \frac{1}{2}$ B) $n = \frac{1}{3}; m = \frac{1}{2}$
C) $n = 2; m = \frac{1}{3}$
D) $n = \frac{1}{3}; m = 2$ E) $n = 3; m = 2$

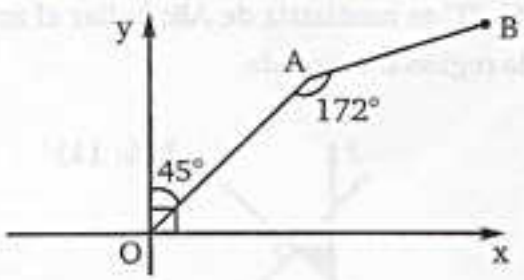
**25.** Sea el paralelogramo ABCD, A = (–3; 5), B = (1; 7) y el punto de intersección de sus diagonales es M(1; 1). ¿A qué distancia está "D" de AC?

A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}$
D) $4\sqrt{2}$ E) $5\sqrt{2}$

**26.** Los vértices de un triángulo son A(-3; 4), B(2; 4) y C(2; -8). Hallar la ecuación de la recta que pasa por el incentro y circuncentro del triángulo.

A) $y = 8x + 2$ B) $y = 4x + 2$
C) $y = -4x + 2$
D) $y = -8x + 2$ E) $y = -2x + 1$

**27.** Según el gráfico: $AO = 8\sqrt{2}$ y $AB = 10$. Hallar la ecuación de la línea recta que contiene al punto medio de $\overline{AO}$ y el punto B.




A) $4x - 5y + 3 = 0$
B) $4x - 5y + 2 = 0$
C) $3x - 5y + 3 = 0$
D) $5x - 4y + 2 = 0$
E) $5x - 6y + 4 = 0$

**28.** Se tiene un triángulo ABO donde O(0; 0); A(5; 12) y B(14; 0). Hallar la distancia de "B" hacia la $\overline{AI}$ siendo "I" el incentro del $\Delta ABO$.

A) $\frac{12}{13}\sqrt{65}$ B) $\frac{12}{13}\sqrt{5}$ C) $\frac{12}{13}\sqrt{67}$
D) $\frac{12}{13}\sqrt{61}$ E) $\frac{13}{12}\sqrt{65}$

**29.** Hallar el área de la región del cuadrilátero formado por los puntos de intersección de las rectas: $\mathcal{L}_1: 2x - y - 1 = 0$
$\mathcal{L}_2: x - 8y + 37 = 0$
$\mathcal{L}_3: 2x - y - 16 = 0$
$\mathcal{L}_4: x - 8y + 7 = 0$

A) $15\ u^2$ B) $30\ u^2$ C) $45\ u^2$
D) $20\ u^2$ E) $40\ u^2$

**30.** Determinar si es verdadero (V) o falso (F):
I. Si dos rectas son paralelas, tienen el mismo ángulo de inclinación.
II. Si dos rectas son perpendiculares, el producto de sus pendientes es -1.
III. Las rectas verticales no tienen pendiente.

A) VFF B) FFF C) VVF
D) FVV E) VFV

**31.** La pendiente de una recta es igual a ctg40°y pasa por F(-3; 0). Hallar la ecuación de la recta que pasa por F y forma con la recta anterior un ángulo que mide 10°. (Dar una solución)

A) $3x - \sqrt{3}y + 9 = 0$
B) $y = \sqrt{3}x - 3\sqrt{3}$
C) $y - \sqrt{3}x - 3 = 0$
D) $\sqrt{3}x + 3y - 9 = 0$
E) $y + x - 3 = 0$

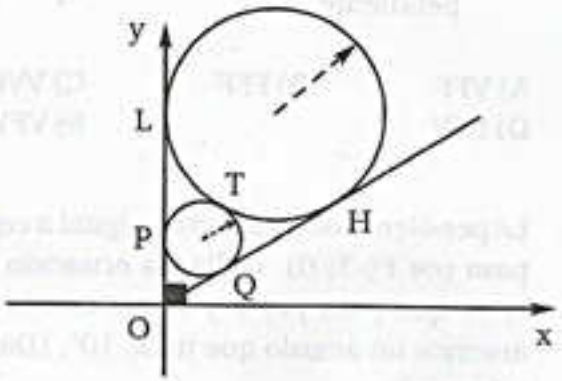
**32.** Determinar los valores de $k_1$ y $k_2$ para que las dos ecuaciones: $k_1x - 7y + 18 = 0$; $8x - k_2y + 9k_1 = 0$; representen la misma recta. Calcular: $|k_1| + |k_2|$

A) 18 B) 14 C) 16
D) 20 E) 24

**33.** Dadas las rectas:
$\mathcal{L}_1: x - y + 2 = 0$
$\mathcal{L}_2: x + 3y - 10 = 0$
Hallar la ecuación de la recta "$\mathcal{L}$" si dicha recta determina un segmento $\overline{AB}$ comprendido entre $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, cuyo punto medio sea P(6; 4)

A) $\mathcal{L}: 3x + y - 22 = 0$
B) $\mathcal{L}: 2x + y - 22 = 0$
C) $\mathcal{L}: 3x - 2y - 22 = 0$
D) $\mathcal{L}: 3x - 2y - 11 = 0$
E) $\mathcal{L}: 2x + 3y - 22 = 0$

**34.** Según el gráfico los radios miden 3 u y 1 u. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento que une los centro y por L(L; P; Q; H y T son puntos de tangencia)




A) $2y+\sqrt{3}x+6\sqrt{3}=0$

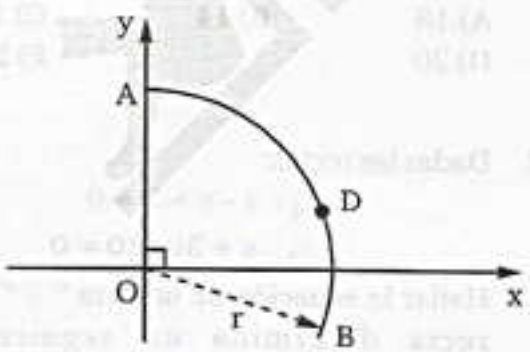
B) $2y+\sqrt{3}x-6\sqrt{3}=0$

C) $2x+\sqrt{3}y-6\sqrt{3}=0$

D) $2x+\sqrt{3}y+6\sqrt{2}=0$

E) $2x+\sqrt{3}y+4\sqrt{3}=0$

**35.** Según el gráfico $r=2$ y $m\widehat{DB}=30°$. Hallar la ecuación de la línea recta que contiene el punto medio de $\overline{AO}$ y sea perpendicular a $\overline{DA}$.




A) $\sqrt{3}x-2y+2=0$

B) $\sqrt{3}x-y+2=0$

C) $\sqrt{3}x-3y+1=0$

D) $\sqrt{3}x-y+3=0$

E) $\sqrt{3}x-y+1=0$

**36.** Sean los puntos A(0; 3), B(8; –1)y C(6; 7) los vértices del triángulo ABC, se trazan las alturas $\overline{BH}$ y $\overline{CM}$. Hallar la ecuación de la recta que pasa por H y M.

A) $33x-4y-100=0$

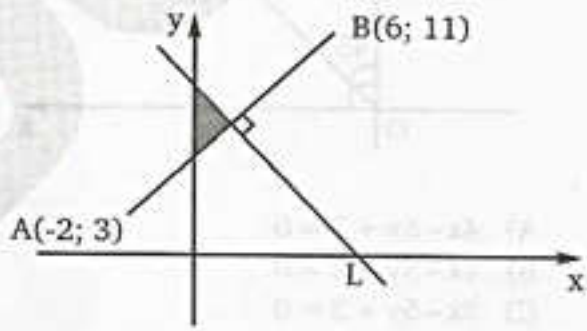
B) $20y+5x+44=0$

C) $20y+5x-44=0$

D) $5x-20y+41=0$

E) $20x+5y-71=0$

**37.** Si: "L" es mediatriz de $\overline{AB}$; hallar el área de la región sombreada.




A) $2\,u^2$ B) $3\,u^2$ C) $4\,u^2$

D) $6\,u^2$ E) $8\,u^2$

**38.** Sean:

$$\mathscr{L}_1: a_1x+b_1y+c_1=0$$

$$\mathscr{L}_2: a_2x+b_2y+c_2=0$$

Las ecuaciones de dos rectas. Determinan la verdad de las proposiciones siguientes:

I. Si $\mathscr{L}_1 \perp \mathscr{L}_2$, entonces:

$$a_1a_2+b_1b_2=0$$

II. Si $\mathscr{L}_1 \parallel \mathscr{L}_2$, entonces:

$$a_1b_2-a_2b_1=0$$

III. Si $\mathscr{L}_1$, se intersecta con $\mathscr{L}_2$, entonces

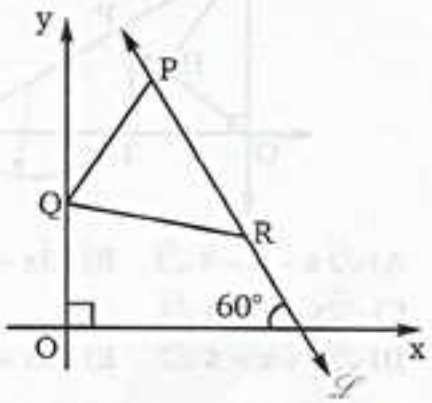
$$c_1=c_2$$

A) VFV B) VFF C) FVV

D) VVF E) VVV

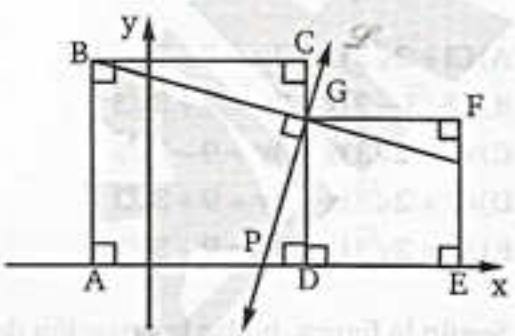
team CALAPENSHKO


**39.** Según el gráfico, hallar la ecuación de la recta $\mathscr{L}$, sabiendo que PQ = QR. QO = $2\sqrt{3}$ m y el área de la región triangular PQR es igual a $4\sqrt{3}m^2$ y PR = 4m.




A) $y+x\sqrt{3}-3=0$
B) $y+x\sqrt{3}+3=0$
C) $y+x\sqrt{3}-3\sqrt{3}=0$
D) $y+x\sqrt{3}+2\sqrt{3}=0$
E) $y+x\sqrt{3}-6\sqrt{3}=0$

**40.** Según la figura ABCD y DEFG son cuadrados A(–2; 0), 2(BC) = 3(EF), PD = 2. Hallar la ecuación de la recta $\mathscr{L}$.

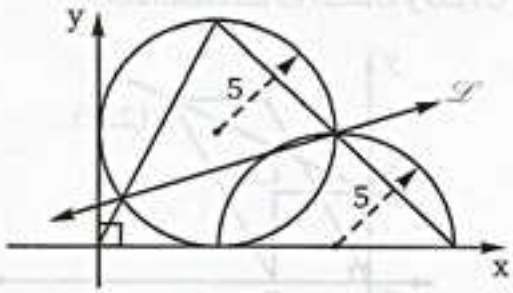



A) 2x – y + 15 = 0 B) 3x – y + 15 = 0
C) 3x – 2y + 12 = 0
D) 2x – y + 7 = 0 E) 3x – y – 15 = 0

**41.** Hallar la pendiente de la recta que contiene el punto A(9; 6) e interseca a las rectas 2x – 3y + 6 = 0; y – 4 = 0 en los puntos B y C respectivamente 5(AB) = 2(BC).

A) 4/3 B) 3/4 C) –4/3
D) 5/3 E) –2/3

**42.** Según la figura, hallar la ecuación de la recta $\mathscr{L}$.

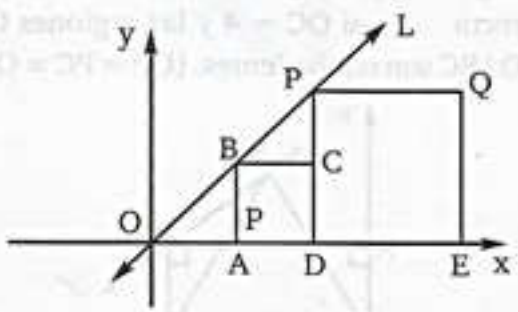



A) x – 3y + 5 = 0
B) x – 3y – 5 = 0
C) x – 3y – 4 = 0
D) x – 3y – 3 = 0
E) x – 3y – 2 = 0

**43.** Desde el punto P(–2; 3) se ha dirigido hacia el eje OX un rayo de luz con una inclinación de un ángulo que mide $\alpha$, donde $\tan\alpha = 3$. El rayo se ha reflejado del eje OX. Encuentre la ecuación de la recta en la que está el rayo reflejado.

A) Y = –3X + 9 B) Y = 3X + 9
C) Y = 3X – 9
D) Y = –3X – 9 E) Y = 3X + 3

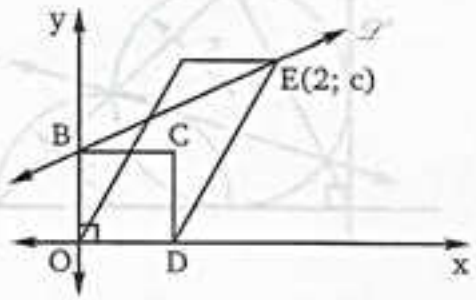
**44.** Según el gráfico ABCD y PDQR son cuadrados. Hallar la ecuación de la recta L sabiendo que las regiones triangulares OAB y BCP son equivalentes.




A) y + x = 0
B) x = y
C) 2x + y = 0
D) x + 2y = 0
E) x – 2y = 0

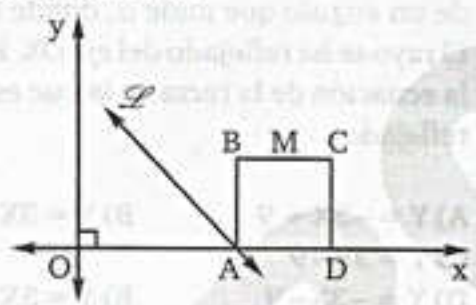
team CALAPENSHKO


**45.** Según la figura, hallar la ecuación de $\mathscr{L}$ si se sabe que "C" es el centro del romboide OFED y OBCD es un cuadrado.



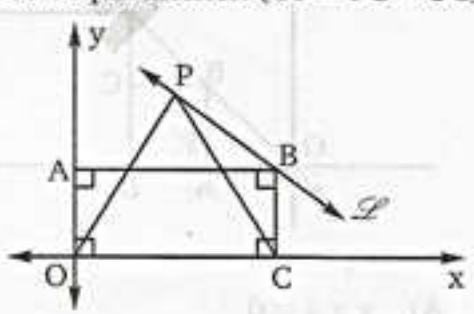

A) $x-2y+4=0$ B) $x-2y+2=0$
C) $x-3y+2=0$
D) $2x-3y-2=0$ E) $x-4y-2=0$

**46.** Según el gráfico, hallar la ecuación de la recta $\mathscr{L}$ la cual contiene al punto medio de OM (BM = MC) y OA = 3AD = 12.
(ABCD: cuadrado)



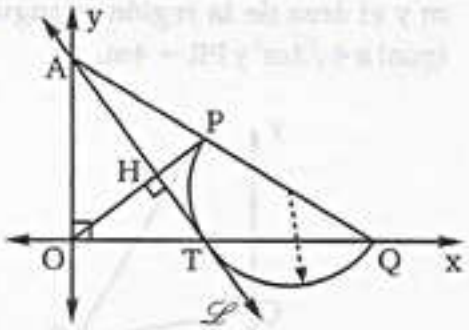

A) $2x+5y=24$ B) $5x+2y=24$
C) $2x-5y=24$
D) $5x-2y=24$ E) $5y-2x=24$

**47.** Según el gráfico, hallar la ecuación de la recta $\mathscr{L}$, si OC = 4 y las regiones OPC y OABC son equivalentes. (OP = PC = OC)



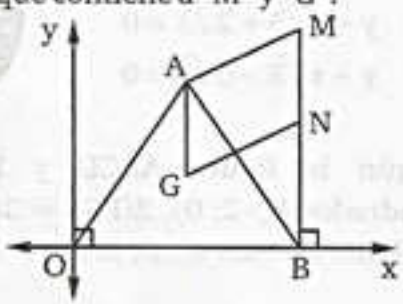

A) $\sqrt{3}x-2y=6\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3}x+2y=6\sqrt{3}$
C) $2x-\sqrt{3}y=\sqrt{3}$
D) $2x-\sqrt{3}y=6\sqrt{3}$ E) $2x+\sqrt{3}y=6\sqrt{3}$

**48.** Según el gráfico, hallar la ecuación general de $\mathscr{L}$ si OH = 4 (T es punto de tangencia)



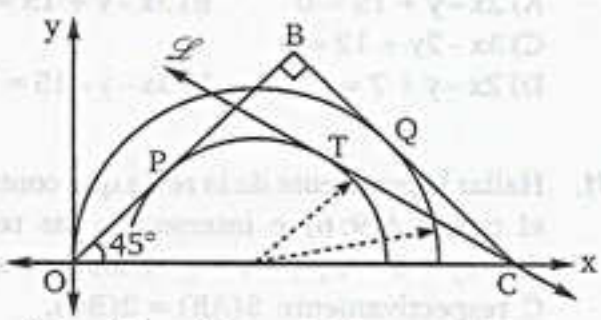

A) $\sqrt{2}x-y=4\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3}x-y=4\sqrt{2}$
C) $\sqrt{2}x+y=4\sqrt{3}$
D) $\sqrt{3}x+y=4\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}x+4y=\sqrt{2}$

**49.** Según el gráfico, el punto "G" es baricentro de la región triangular equilátera OAB, tal que OB = 6, AMNG es un romboide y $m\angle AMN = 45°$. Hallar la ecuación de la recta que contiene a "M" y "G".




A) $(3+2\sqrt{3})x+3y=9+3\sqrt{3}$
B) $(2\sqrt{3}-3)x+3y=9+3\sqrt{3}$
C) $(3+2\sqrt{3})x+3y=9-3\sqrt{3}$
D) $(3+2\sqrt{3})x-3y=9+3\sqrt{3}$
E) $(3+2\sqrt{3})x-3y=9-3\sqrt{3}$

**50.** Según la figura, hallar la ecuación de $\mathscr{L}$ si $BC=4\sqrt{6}$ (P, T y Q son puntos de tangencia)




A) $y+\sqrt{3}x=24$ B) $3y+x=24$
C) $3y-\sqrt{3}x=24$
D) $y-\sqrt{3}x=24$ E) $3y+\sqrt{3}x=24$

team CALAPENSHKO

Capítulo 18

# Circunferencia y Parábola

**CAPACIDADES**

- Reconocer la ecuación de una circunferencia y parábola e indicar sus elementos.
- Trazar lugares geométricos relativos a la circunferencia y parábola.
- Resolver problemas entre rectas, circunferencia y parábola.

## EL PROBLEMA DE LA DUPLICACIÓN DEL CUBO

La duplicación del cubo consiste en hallar el lado de un cubo que tenga volumen doble que otro cubo de lado dado.

Es decir, dado un cubo de arista a y volumen V, hallar la arista de un cubo de volumen 2V.

La tradición cuenta que una epidemia de peste arrasó Atenas hacia el 428 a.C.. Para acabar con ella se envió un mensajero al oráculo de Apolo en Delos. El oráculo indicó que para acabar con la epidemia sería necesario duplicar el volumen del altar cúbico de Apolo. Los atenienses duplicaron las dimensiones del altar, pero evidentemente no se duplicó el volumen. ¡Ni que decir tiene que la epidemia no desapareció! Entre los geómetras mas famosos que intentaron resolverlo resaltan:

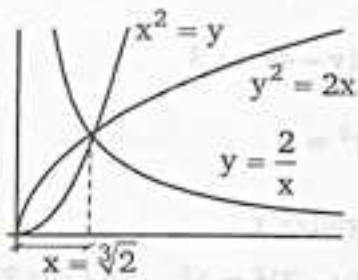
ORÁCULO DE APOLO
DELFOS GRECIA

### HIPÓCRATES DE CHIOS

Demostró que el problema puede reducirse a encontrar dos medias proporcionales entre la arista dada y el doble de la misma. Con la notación actual resulta: $x^2 = a\,y$; $y^2 = 2a\,x$
Si consideramos a = unidad podemos obtener el valor de la arista del cubo buscado mediante la intersección de las parábolas $x^2 = y$ e $y^2 = 2\,x$

### MENECMO

En el siglo IV a.C ya había hallado la solución mediante la intersección (con el lenguaje actual) de una parábola y una hipérbola ($y = 2/x$) al considerar los miembros primero y tercero de la proporción según $a : x = y : 2a$ primero y segundo $a : x = x : y$ que para a = unidad son la parábola e hipérbola de la gráfica.

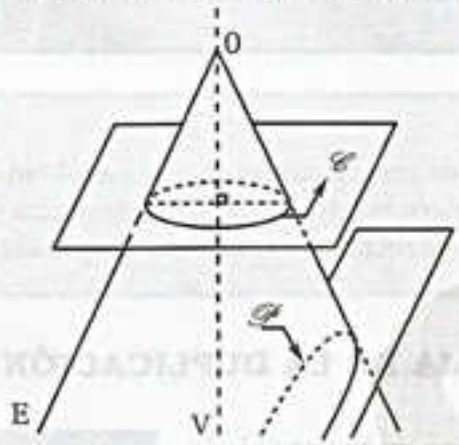


team CALAPENSHKO



## INTRODUCCIÓN

Las secciones cónicas, son aquellas que se generan por la intersección de una superficie cónica de revolución y un plano secante que no contiene el vértice de la cónica. Si el plano secante es perpendicular al eje $\overline{OV}$ se genera la circunferencia y si fuera paralela a la generatriz $\overline{OE}$ se genera la parábola.




# CIRCUNFERENCIA

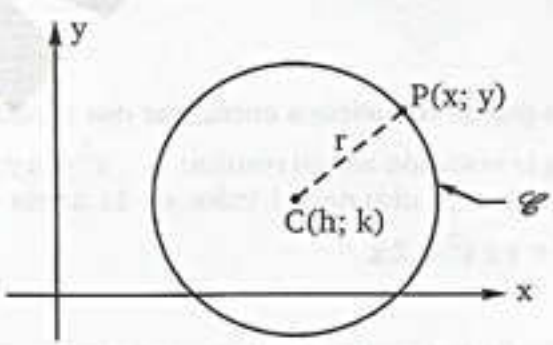
## DEFINICIÓN

Una circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo. Al punto fijo se le llama centro (C) y a la distancia constante se le llama radio (r)

## ECUACIÓN ORDINARIA DE LA CIRCUNFERENCIA

Sea P(x, y) un punto del plano cartesiano cuya distancia a un punto fijo C(h, k) es "r". Luego la ecuación de la circunferencia es:

$$\mathscr{C}: (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$




**Ejemplos:** En cada caso hallar el centro y radio de la circunferencia.

a) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$

b) $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 3$

c) $x^2 + (y+3)^2 = 8$

**Resolución:** Centro: C(h; k); radio: r

a) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5^2 \Rightarrow C(2; 3) \wedge r = 5$

team CALAPENSHKO


b) $(x-(-1))^2+(y-4)^2=(\sqrt{3})^2 \Rightarrow C(-1;4) \wedge r=\sqrt{3}$

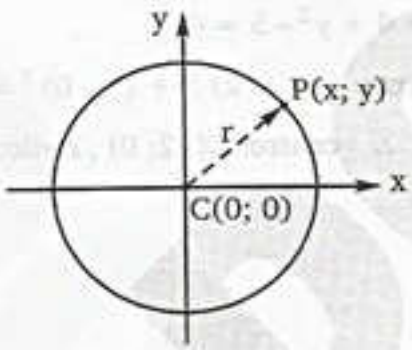
c) $(x-0)^2+(y-(-3))^2=(2\sqrt{2})^2 \Rightarrow \mathbf{C(0;-3) \wedge r=2\sqrt{2}}$

Se deja al lector la grafica de las circunferencias anteriores

## ECUACIÓN CANÓNICA DE UNA CIRCUNFERENCIA

Si hacemos que el punto fijo C(h; k) se traslade al origen (0; 0); tenemos la ecuación canónica así:

$$\mathscr{C}: x^2+y^2=r^2$$




**Ejemplo:** En cada caso, hallar el radio "r"

a) $x^2+y^2=4 \Rightarrow r=2$

b) $x^2+y^2=5 \Rightarrow r=\sqrt{5}$

c) $x^2+y^2=1 \Rightarrow r=1$ ..... circunferencia trigonométrica

## ECUACIÓN GENERAL DE LA CIRCUNFERENCIA

De la ecuación ordinaria de la circunferencia tenemos: $\mathscr{C}: (x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

Desarrollando y ordenando tenemos: $\mathscr{C}: x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$

Haciendo: $-2h=D;\ -2k=E;\ h^2+k^2-r^2=F$

Luego:

$$\mathscr{C}: x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

**(Ecuación general de la circunferencia)**

**Ejemplo 1:** Hallar la ecuación general de la circunferencia de:
centro: C(3; 4) ∧ radio : r = 5

**Resolución:** Usando la ecuación ordinaria tenemos:

$h=3;\ k=4;\ r=5$

$\Rightarrow \mathscr{C}_1: (x-3)^2+(y-4)^2=5^2$

$x^2-6x+9+y^2-8y+16=25$

$\therefore \mathscr{C}: \mathbf{x^2+y^2-6x-8y=0}$

twitter.com/calapenshko

team CALAPENSHKO


**Ejemplo 2:** En cada caso, hallar las coordenadas del centro y radio de la circunferencia.

a) $x^2 + y - 2x + 6y - 3 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0$

**Resolución:** Ordenado y completando cuadrados tenemos:

a) $x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 - 3 = 10 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 13$

Dando forma: $(x-1)^2 + (y+3)^2 = \sqrt{13}^2 \Rightarrow h = 1;\ k = -3\ ;\ r = \sqrt{13}$

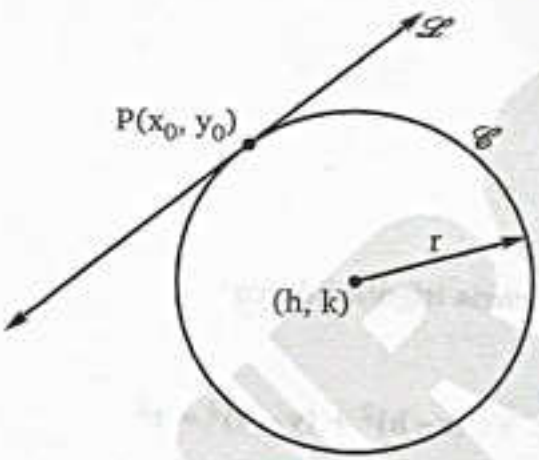
$\therefore$ **centro: C(1; –3) ; radio: $r = \sqrt{13}$**

b) $x^2 + 4x + 4 + y^2 - 5 = 4 \Rightarrow (x+2)^2 + y^2 = 9$

Dando forma: $(x-(-2))^2 + (y-0)^2 = 3^2 \Rightarrow h = -2\ ;\ k = 0\ ;\ r = 3$

$\therefore$ **centro: C(–2; 0) , radio: r = 3**

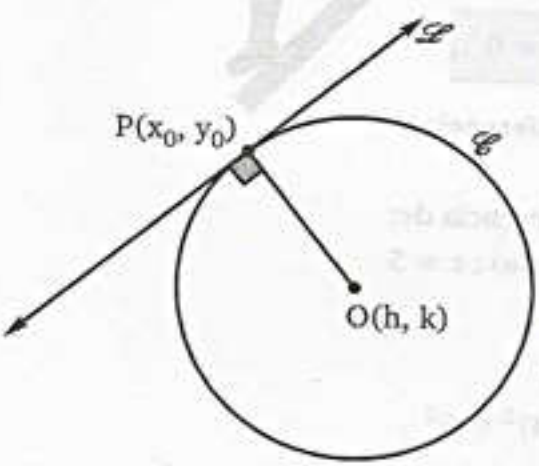
## PROPIEDAD




La ecuación de la recta tangente en P a la circunferencia es:

$$\mathscr{L}: (y-k)(y_0-k) + (x-h)(x_0-h) = r^2$$

**DEMOSTRACIÓN:**




Del gráfico: $m_{PO} = \dfrac{y_0 - k}{x_0 - h}$

Además: $\mathscr{L} \perp PO$

$\Rightarrow m_{\mathscr{L}} \times m_{PO} = -1$

$\rightarrow m_{\mathscr{L}} = -\dfrac{x_0 - h}{y_0 - k}$

Ahora, como $P \in \mathscr{L}$ y conocemos $m_{\mathscr{L}}$

$$\mathscr{L}: y - y_0 = m_{\mathscr{L}}(x - x_0)$$

$$y - y_0 = -\frac{x_0 - h}{y_0 - k}(x - x_0)$$

$$\rightarrow (y - y_0)(y_0 - k) + (x_0 - h)(x - x_0) = 0$$

team CALAPENSHKO


$$(y-k+k-y_0)(y_0-k)+(x_0-h)(x-h+h-x_0)=0$$
$$\rightarrow (y-k)(y_0-k)-(y_0-k)^2+(x-h)(x_0-h)-(x_0-h)^2=0$$
$$\rightarrow (y-k)(y_0-k)+(x-h)(x_0-h)=(y_0-k)^2+(x_0-h)^2$$

Debido a que $P \in \mathscr{C}$: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$$\rightarrow (x_0-h)^2+(y_0-k)^2=r^2$$

Reemplazando obtenemos:

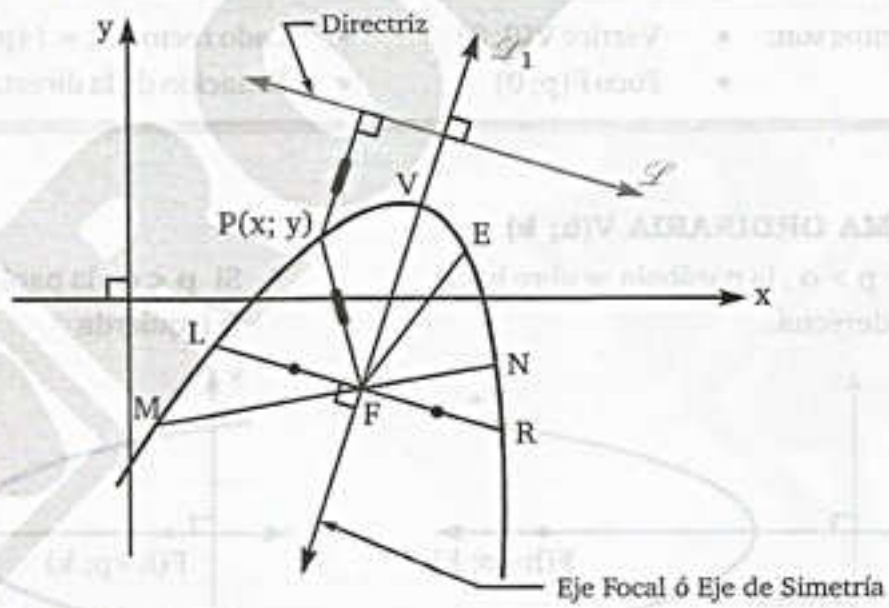
$$\therefore\ (y-k)(y_0-k)+(x-h)(x_0-h)=r^2$$

## PARÁBOLA

### DEFINICIÓN

Es el lugar geométrico de un punto P(x; y) del plano $\mathbb{R}^2$, que se mueve de tal manera que equidista de una recta fija $\mathscr{L}$ (llamada directriz) situada en el plano y de un punto fijo F (llamado foco) del plano $\mathbb{R}^2$ y que no pertenece a la recta $\mathscr{L}$. Es decir:

$$\mathscr{P} = \{P(x; y) \in \mathbb{R}^2 / d(P, L) = d(P, F)\}$$




### ELEMENTOS DE LA PARÁBOLA

- **Foco "F"** Es el punto fijo de la parábola.
- **Vértice "V"** Es el punto medio del segmento que une la directriz y el foco.
- **Eje focal $\mathscr{L}_1$** Es la recta perpendicular a la directriz $\mathscr{L}$.
- **Cuerda focal $\overline{MN}$** Es el segmento que une dos puntos de la parábola y que pasa por el foco.
- **Radio vector $\overline{EF}$** Es el segmento que une un punto de la parábola E y el foco F.
- **Lado recto $\overline{LR}$** Es la cuerda focal perpendicular al eje focal.
- **Excentricidad e** Es la razón constante entre la distancia de un punto al foco y la distancia de dicho punto a la directriz.

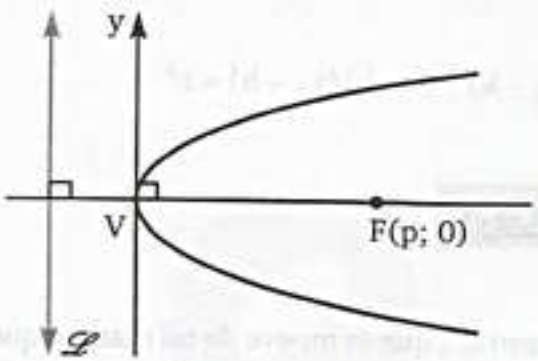
team CALAPENSHKO


## ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA

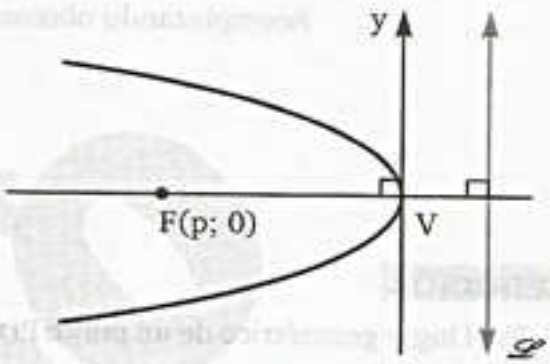
### I. EJE FOCAL PARALELO AL EJE "x"

#### A) FORMA CANÓNICA V(0; 0)

* Si **p > o**, la parábola se abre hacia la derecha.




* Si **p < o**, la parábola se abre hacia la izquierda



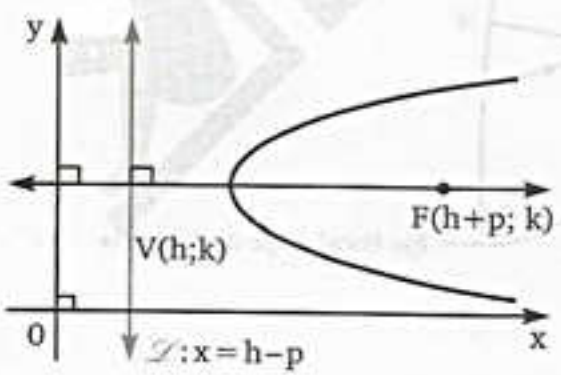

$$y^2 = 4px$$

**NOTA**

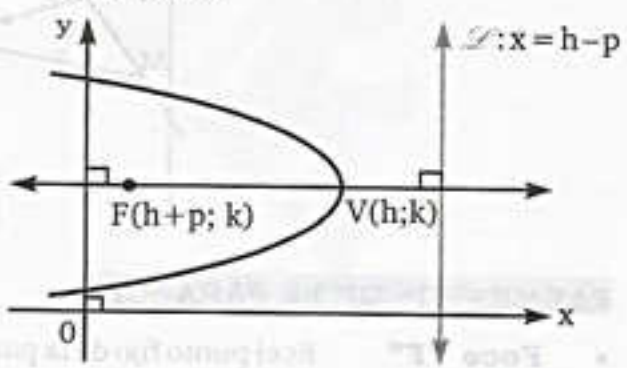
Sus elementos son:
- Vértice V(0; 0)
- Foco F(p; 0)
- Lado recto CM = |4p|
- Ecuación de la directriz: x = −p

#### B) FORMA ORDINARIA V(h; k)

* Si **p > o**, la parábola se abre hacia la derecha.




* Si **p < o**, la parábola se abre hacia la izquierda




$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

**NOTA**

Sus elementos son:
- Vértice V(h; k)
- Foco F(h + p; k)
- Lado recto CM = |4p|
- Ecuación de la directriz: x = h−p

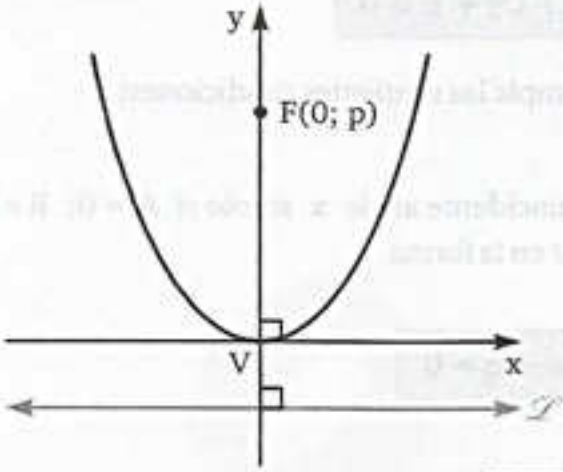
team CALAPENSHKO



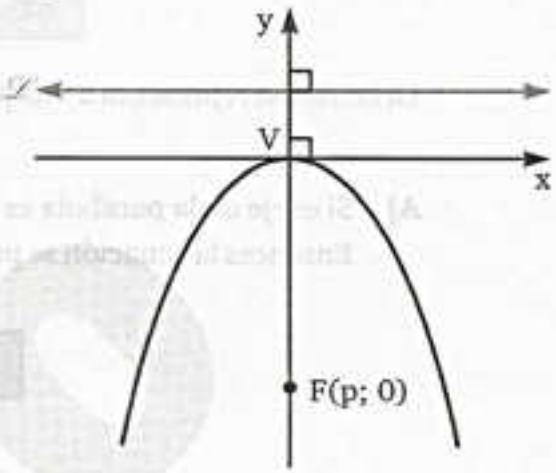
## II. EJE FOCAL PARALELO AL EJE "y"

### A) FORMA CANÓNICA

* Si $p > 0$, la parábola se abre hacia arriba.




* Si $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo.



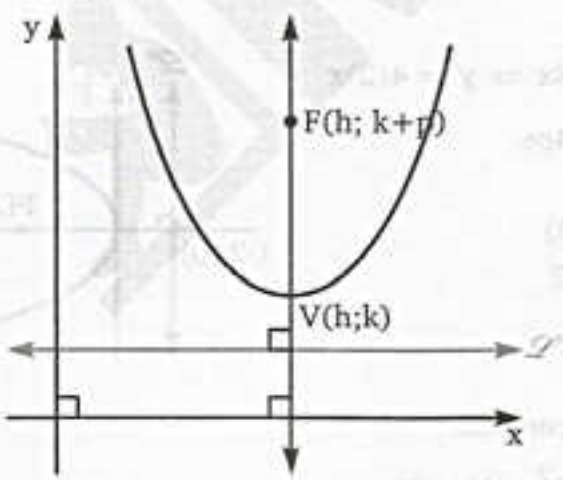

$$x^2 = 4py$$

**NOTA**

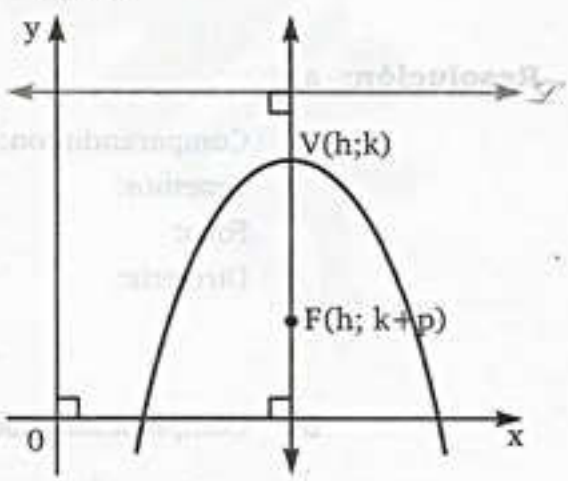
Sus elementos son:
- Vértice V(0; 0)
- Foco F(0; p)
- Lado recto CM = |4p|
- Ecuación de la directriz: y = –p

### B) FORMA ORDINARIA

* Si $p > 0$, la parábola se abre hacia arriba.




* Si $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo.




$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

**NOTA**

Sus elementos son:
- Vértice V(h; k)
- Foco F(h; k + p)
- Lado recto CM = |4p|
- Ecuación de la directriz: y = k – p

## III. ECUACIÓN GENERAL DE LA PARÁBOLA

La ecuación de segundo grado en las variables x e y que carezca del término xy, se puede expresar en la forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

La ecuación representa a una parábola si cumple las siguientes condiciones:

**A)** Si el eje de la parábola es paralelo ó coincidente al eje x si solo si $A = 0;\ B \neq 0;\ C \neq 0$. Entonces la ecuación se puede expresar en la forma.

$$y^2 + ay + bx + c = 0$$

**B)** Si el eje de la parábola es paralelo ó coincidente al eje y si solo si $A \neq 0;\ B = 0;\ D \neq 0$. Entonces la ecuación se puede expresar en la forma.

$$x^2 + ax + by + c = 0$$

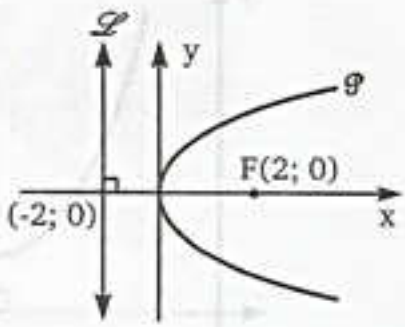
**Ejemplo:** Graficar:

a) $y^2 = 8x$

b) $x^2 - 2x - 4y + 5 = 0$

**Resolución:** a) $y^2 = 8x \Rightarrow y^2 = 4(2)x$

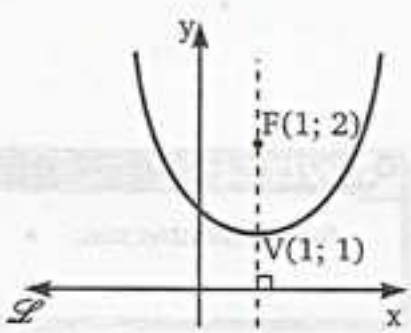
Comparando con: $y^2 = 4px$
Tenemos: $p = 2$
Foco: $F(2; 0)$
Directriz: $x = -2$




b) Completando cuadrados tenemos:

$$(x-1)^2 = 4(y-1)$$

Comparando con: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$
Tenemos: $p = 1;\ h = 1;\ k = 1$
$\Rightarrow\ V(1; 1)$
Foco: $F(1; 2)$
Directriz: $y = 0$



team CALAPENSHKO

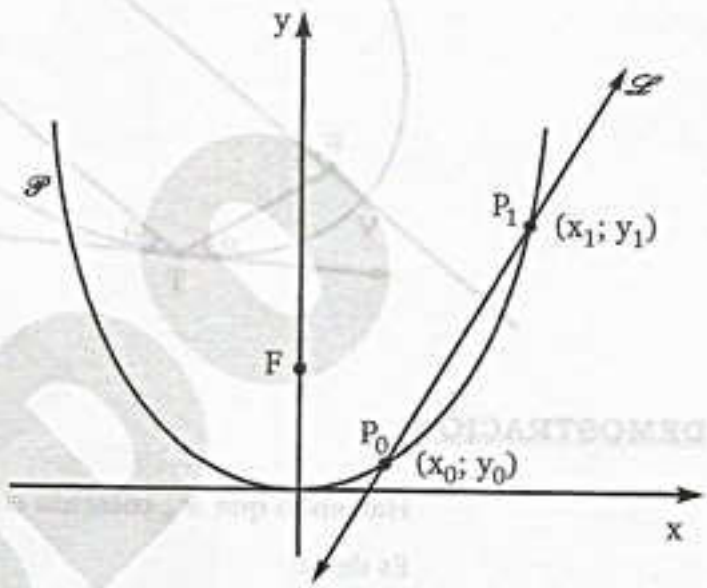

**PROPIEDAD**

Sea $\mathscr{P}$: $4py = x^2$

La recta tangente a $\mathscr{P}$ en el punto $P_0\ (x_0, y_0)$ tiene pendiente $\frac{x_0}{2p}$ y por ecuación: $2p(y + y_0) = xx_0$

**DEMOSTRACIÓN:**

$$\mathscr{P}: 4Py = x^2$$




$P_0 \in \mathscr{P}$: $4py_0 = x_0^2$

$P_1 \in \mathscr{P}$: $4py_1 = x_1^2$

Restando las dos últimas igualdades:

$$4p(y_1 - y_0) = (x_1 - x_0)(x_1 + x_0)$$

$$\rightarrow \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{x_1 + x_0}{4p} \quad \text{.....(1)}$$

Además: $m_{\mathscr{L}} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

De (1): $m_{\mathscr{L}} = \frac{x_1 + x_0}{4p}$

$\mathscr{L}$ es tangente $\Leftrightarrow$ $x_1 = x_0$

$\Rightarrow$ $m_{\mathscr{L}} = \frac{x_0}{2p}$

Hallando la ecuación de la recta tangente:

$$y - y_0 = m_{\mathscr{L}}(x - x_0)$$

$$y - y_0 = \frac{x_0}{2p}(x - x_0)$$

$$2p(y - y_0) = x_0 x - x_0^2 \quad \text{.....(2)}$$

Pero $P_0 \in \mathscr{P}$: $4py_0 = x_0^2$ .....(3)

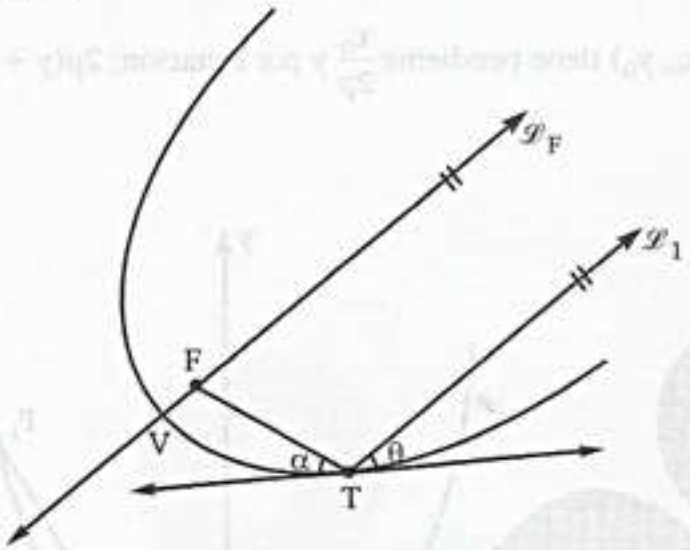
Reemplazando (3) en (2):

$$2p(y - y_0) = x_0 x - 4Py_0$$

$$\therefore\ 2p(y + y_0) = x_0 x$$

## PROPIEDAD

Sea la parábola $\mathscr{P}$




Donde:

F: Foco

V: Vértice

T: punto de tangencia.

$\mathscr{L}_F$: Eje focal

$\mathscr{L}_1$: recta paralela a $\mathscr{L}_F$ trazada por T.

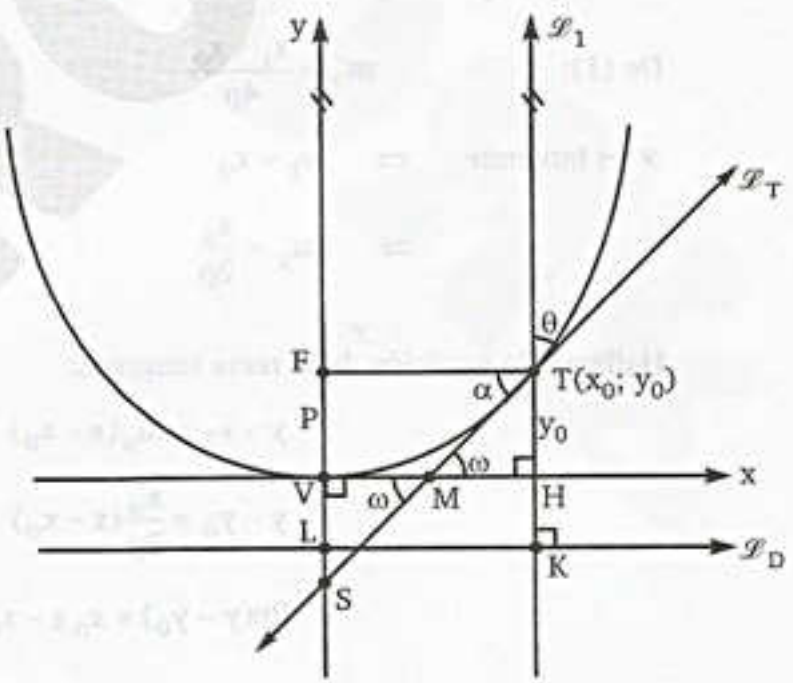
Se cumple:

$$\alpha = \theta$$

## DEMOSTRACIÓN:

Haciendo que $\mathscr{L}_F$ coincida con el eje Y, y el vértice en el origen de coordenadas.

Es decir:




Sea $\mathscr{L}_D$: recta directriz.

Debido a las consideraciones realizadas:

$$\mathscr{P}: 4Py = x^2$$

Como $T \in \mathscr{P}$ $\rightarrow 4Py_0 = x_0^2 \rightarrow \dfrac{2y_0}{x_0} = \dfrac{x_0}{2P}$ .....(1)

Por la propiedad anterior:

$$m_{\mathscr{L}_T} = \frac{x_0}{2P} \rightarrow \tan\omega = \frac{x_0}{2P} \quad .....(2)$$

De (1) y (2): $\tan\theta = \frac{2y_0}{x_0}$ .....(3)

Además del $\triangle$THM: $\tan\theta = \frac{TH}{MH} = \frac{y_0}{MH}$ .....(4)

De (3) y (4): Igualando:

$$\frac{2y_0}{x_0} = \frac{y_0}{MH} \rightarrow MH = \frac{x_0}{2}$$

y como $VH = x_0$, se deduce que M es punto medio de VH $\left(VM = MH = \frac{x_0}{2}\right)$

Ahora: $\triangle$THM $\quad \tan\omega = \frac{y_0}{MH} = \frac{2y_0}{x_0}$

$\triangle$ SVM $\quad \tan\omega = \frac{VS}{VM} = \frac{2VS}{x_0}$

Igualando: $\quad VS = y_0$

$\Rightarrow FS = FV + VS = P + y_0$

*) $V \in \mathscr{P}$ $\quad \Rightarrow FV = d(V, L_D) = P$

*) VHKL es un rectángulo:

$HK = VL = P$

*) $T \in \mathscr{P}$ $\quad \Rightarrow FT = d(T, L_D) = y_0 + HK$

$\Rightarrow FT = y_0 + P$

Ahora: En el $\Delta$ FTS; se tiene:

$FT = FS = y_0 + P$

$\Rightarrow \angle FST = \angle FTS = \alpha$ y $\mathscr{L}_1 // y$

$\therefore \theta = \alpha$

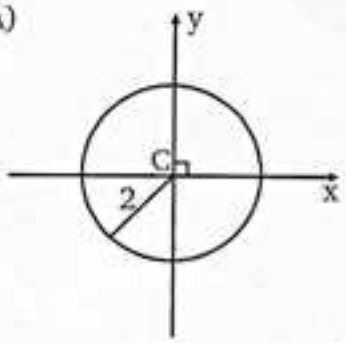
## EJERCICIOS DE APLICACIÓN

**1.** Completar:

| Centro | Radio | Ecuación |
|---|---|---|
| (0; 0) | r = 3 | |
| | | $x^2 + y^2 = 5$ |
| (–2; 4) | r = 2 | |
| | | $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 9$ |
| (3; 0) | $r = \sqrt{5}$ | |
| | | $x^2 + (y+2)^2 = 10$ |
| | | $x^2 + y^2 = 2x$ |

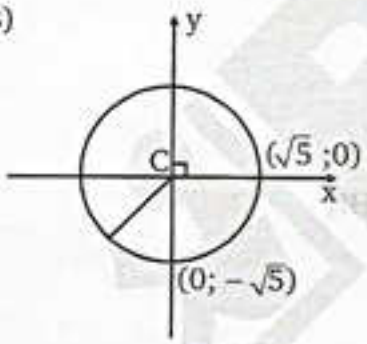
**2.** Determine la ecuación de la circunferencia.

A)



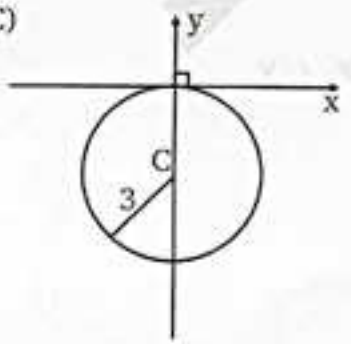

$\mathscr{C}$: .....

B)




$\mathscr{C}$: .....

C)



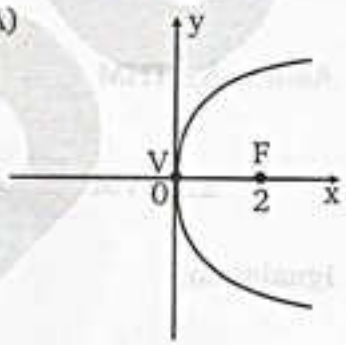

$\mathscr{C}$: .....

**3.** Completar

| Eje focal paralelo al eje | p | Vértice | Ecuación |
|---|---|---|---|
| | | | $x = 8y$ |
| y | –2 | (0; 0) | |
| | | | $y^2 = -12x$ |
| x | 4 | (0; 0) | |
| x | 2 | (2; 1) | |
| | | | $(y-3)^2 = -12(x+1)$ |
| | | | $x(x+4) = y$ |

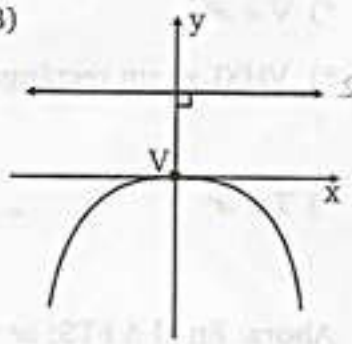
**4.** Determine la ecuación de la parábola

A)



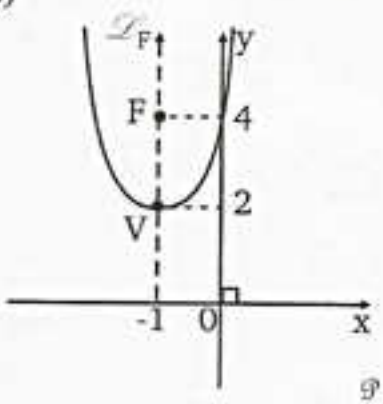

$\mathscr{P}$ : .....

B)




$\mathscr{P}$ : .....

B)




$\mathscr{P}$ : .....

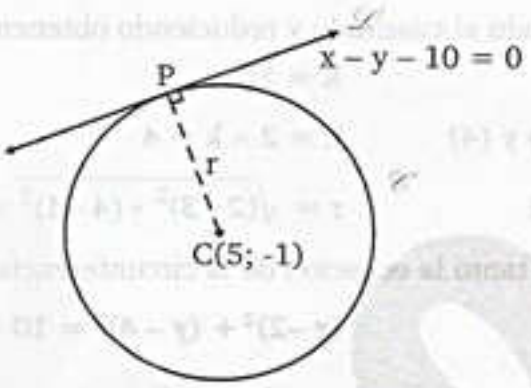
team CALAPENSHKO



## PROBLEMAS RESUELTOS

**PROBLEMA 1** Determine la ecuación general de la circunferencia con centro en el punto C(5; –1) y que es tangente a la recta $\mathscr{L}$: x – y – 10 = 0

**Resolución:**




El radio de la C es PC = r como PC ⊥ $\mathscr{L}$, entonces calcularemos la distancia de C a la recta ‹ (Método de distancia de un punto a una recta).

$$r = \frac{|5-(-1)-10|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} \Rightarrow r = \frac{|-4|}{\sqrt{2}}$$

$$r = 2\sqrt{2}$$

La ecuación ordinaria de la $\mathscr{C}$ es:

$$(x-5)^2 + (y+1)^2 = (2\sqrt{2})^2$$

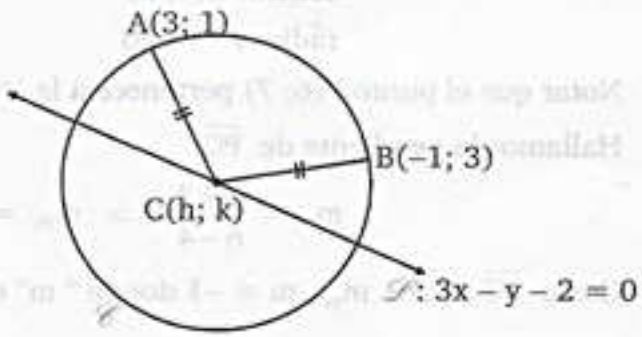
Desarrollando: ∴ $\mathbf{x^2 + y^2 - 10x + 2y + 18 = 0}$

**(Ecuación general de la $\mathscr{C}$).**

**PROBLEMA 2** Determine la ecuación de la circunferencia que pasa por A(3; 1) y B(–1; 3) sabiendo que su centro esta situado en la recta:

$$3x - y - 2 = 0$$

**Resolución:**




El centro C(h; k) pertenece a la recta :

$\mathscr{L}$: 3x – y – 2 = 0 ⇒ 3h – k – 2 = 0 .....(1)

Además el radio r = AC = BC

$$AC = \sqrt{(h-3)^2 + (k-1)^2} \quad \text{..... (2)}$$

$$BC = \sqrt{(h+1)^2 + (k-3)^2} \quad \text{..... (3)}$$

De (2) y (3) $\sqrt{(h-3)^2 + (k-1)^2} = \sqrt{(h+1)^2 + (k-3)^2}$

Elevando al cuadrado y reduciendo obtenemos:

$$K = 2h \quad \text{.....(4)}$$

De (1) y (4) $h = 2 \wedge k = 4$

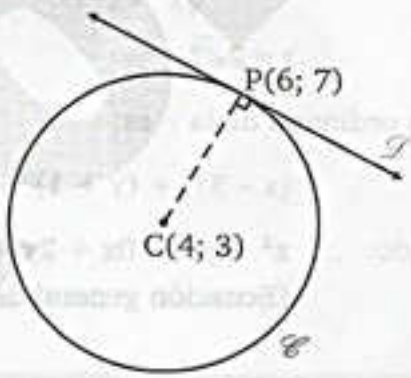
En (2) $r = \sqrt{(2-3)^2 + (4-1)^2} \Rightarrow r = \sqrt{10}$

Por lo tanto la ecuación de la circunferencia es:

$$\mathbf{(x-2)^2 + (y-4)^2 = 10}$$

**PROBLEMA 3** Determine la ecuación de la recta tangente a la curva: $x^2+y^2-8x-6y+5=0$ que pasa por el punto P(6; 7)

**Resolución:**




De: $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 5 = 0$

Completando cuadrados tenemos:

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 20 \text{ .....(*)}$$

Entonces (*) nos representa una circunferencia de centro:

centro: C(4; 3)

radio: $r = \sqrt{20}$

Notar que el punto P(6; 7) pertenece a la $\mathscr{C}$ pues cumple la ecuación (*)

Hallamos la pendiente de $\overline{PC}$

$$m_{PC} = \frac{7-3}{6-4} \Rightarrow m_{PC} = 2$$

Como $\overline{PC} \perp \mathscr{L}$: $m_{PC} \cdot m = -1$ donde " m" es la pendiente de $\mathscr{L}$

Así: $m = -\frac{1}{2}$

Finalmente hallamos la ecuación de $\mathscr{L}$

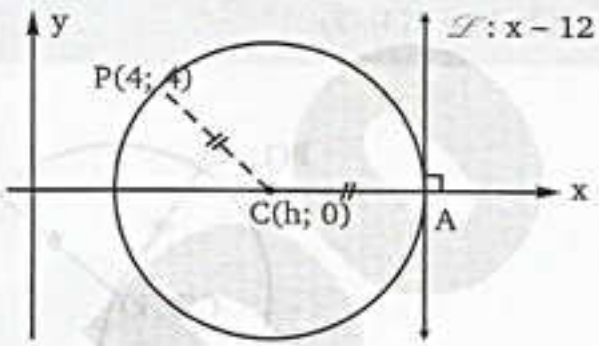
team CALAPENSHKO


$$-\frac{1}{2}=\frac{y-7}{x-6}$$

$$\therefore\ \mathscr{L}: x + 2y - 20 = 0$$

**PROBLEMA 4** Se tiene una circunferencia con centro en el eje x, tangente a la recta: $x - 12 = 0$ y pasa por el punto (4; 4). Determine la ecuación de dicha circunferencia.

**Resolución:**




Según las condiciones:

$$PC = CA = r$$

Luego: $\sqrt{(4-h)^2+4^2} = 12 - h$

Elevando al cuadrado y desarrollando:

$$(4 - h)^2 + 16 = (12-h)^2$$
$$16 - 8h + h^2 + 16 = 144 - 24h + h^2$$

Reduciendo obtenemos:

$$h = 7 \Rightarrow r = 5$$

Luego la ecuación de la circunferencia es:

$$(x - 7)^2 + (y - 0)^2 = 5^2$$
$$\therefore\ \mathbf{x^2 + y^2 - 14x + 24 = 0}$$

**PROBLEMA 5** Si la circunferencia:

$$\mathscr{C}_1: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

De radio 3 es concéntrica a la circunferencia:

$$\mathscr{C}_2: x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

Calcular: D + E + F

**Resolución:** De (2): completando cuadrados tenemos

$$\mathscr{C}_2: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$$

Luego $\mathscr{C}_2$ es una circunferencia de:

Centro: (1; 2)

Radio: $r_2 = 2$

Como $\mathscr{C}_1$ es concéntrica a $\mathscr{C}_2$ (mismo centro)

Entonces para el centro (1; 2) $\wedge$ $r_1 = 3$

team CALAPENSHKO


$$(x-1)^2+(y-2)^2=3^2$$

Desarrollando y simplificando:

$$x^2+y^2-2x-4y-4=0 \quad .....(3)$$

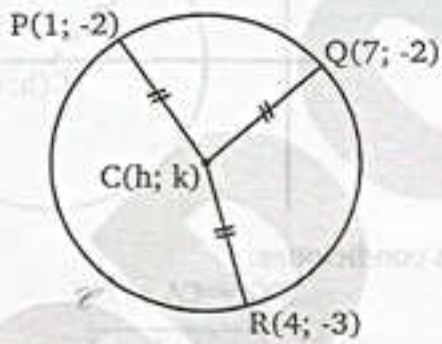
De (1) y (3) tenemos:

$$D=-2\ ;\ E=-4\ ;\ F=-4$$

$$\therefore\ \mathbf{D+E+F=-10}$$

**PROBLEMA 6** Determine la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos P (1; -2), Q(7; -2) y R(4; -3)

**Resolución:**




De la condición: $PC = QC = RC$

Luego tenemos: $PC = QC$

$$\Rightarrow \sqrt{(h-1)^2+(k+2)^2}=\sqrt{(h-7)^2+(k+2)^2}$$

Desarrollando y reduciendo:

$$h=4 \quad ..... (1)$$

Además: $QC = RC$

$$\sqrt{(h-7)^2+(k+2)^2}=\sqrt{(h-4)^2+(k+3)^2}$$

$$3h+k=14 \quad ..... (2)$$

(1) en (2): $K=2 \quad ..... (3)$

El radio "r" es: $r=\sqrt{(h-1)^2+(k+2)^2}$

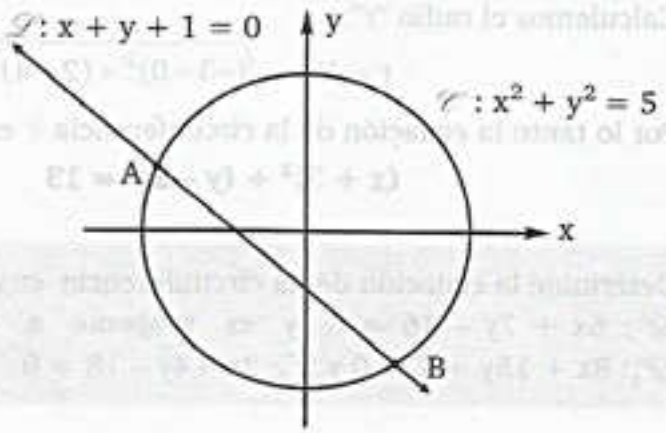
Usando (1) y (3) $r=5$

$$\therefore\ \mathscr{C}:\ \mathbf{(x-4)^2+(y-2)^2=25}$$

**PROBLEMA 7** Calcular la longitud de la cuerda generada por la intersección de la recta: $x+y+1=0$ y la circunferencia: $x^2+y^2=5$

team CALAPENSHKO


**Resolución:**




Hallemos los puntos de intersección entre la circunferencia C y la recta $\mathscr{L}$, resolviendo el sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 & \ldots\ldots (1) \\ x + y + 1 = 0 & \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Tenemos: $x = 1 \Rightarrow y = -2$

$x = -2 \Rightarrow y = 1$

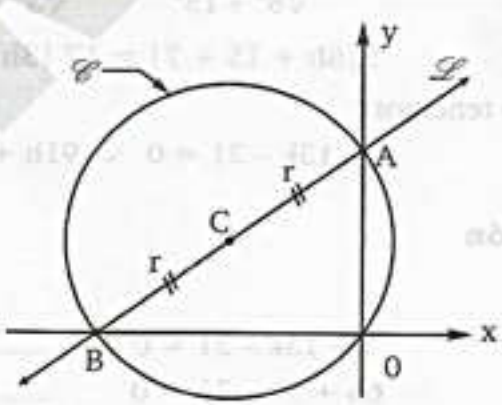
Luego: $A(-2; 1) \wedge B(1; -2)$

Finalmente: $AB = \sqrt{((-2)-1)^2 + (1-(-2))^2}$

$\therefore \quad \mathbf{AB = 3\sqrt{2}}$

**PROBLEMA 8** Determine la ecuación de la circunferencia que tiene como diámetro la porción de la recta $\mathscr{L}$: $2x - 3y + 12 = 0$, comprendido en el segundo cuadrante.

**Resolución:**




Interceptando $\mathscr{L}$ con los ejes coordenados, tenemos:

Si: $x = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow A(0; 4)$

Si: $y = 0 \Rightarrow x = -6 \Rightarrow B(-6; 0)$

Como el centro C(h; k) es el punto medio del diámetro $\overline{AB}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow h = \dfrac{0-6}{2} \Rightarrow h = -3 \\ \Rightarrow k = \dfrac{4+0}{2} \Rightarrow k = 2 \end{array}\right\} C(-3;2)$$

Calculemos el radio "r":

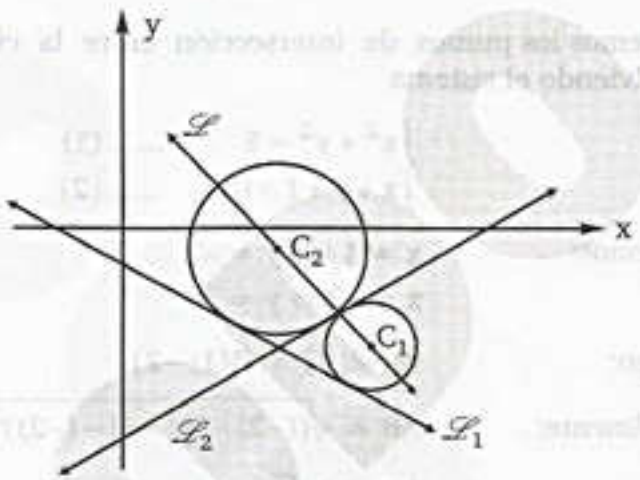
$$r = AC = \sqrt{(-3-0)^2 + (2-4)^2} \Rightarrow r = \sqrt{13}$$

Por lo tanto la ecuación de la circunferencia es:

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 13$$

**PROBLEMA 9** Determine la ecuación de la circunferencia cuyo centro esta en la recta $\mathscr{L}: 6x + 7y - 16 = 0$ y es tangente a cada una de las rectas $\mathscr{L}_1: 8x + 15y + 7 = 0$ y $\mathscr{L}_2: 3x - 4y - 18 = 0$

**Resolución:**




Sea C(h; k) el centro de la circunferencia, entonces se cumple:

$$6h + 7k - 16 = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

La distancia del punto C(h; k) a las rectas es la mismo (radio) así:

$$\frac{|8h+15k+7|}{\sqrt{8^2+15^2}} = \frac{|3h-4k-18|}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

$$5|8h + 15 + 7| = 17\,|3h - 4k - 18|$$

Reduciendo tenemos:

$$h - 13k - 31 = 0 \quad \vee \quad 91h + 7k - 271 = 0$$

**1.ª Solución**

Usando(1)

De:

$$h - 13k - 31 = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$
$$6h + 7k - 16 = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$h = 5;\ k = -2 \quad \Rightarrow C_1(5; -2)$$

Hallamos: "$r_1$"

$$r_1 = \frac{|3(5) - 4(-2) - 18|}{\sqrt{3^2+4^2}} \Rightarrow r_1 = 1$$

$$\therefore \quad \mathscr{C}_1: (x-5)^2 + (y+2)^2 = 1$$

team CALAPENSHKO


**2.ª Solución:**

Usando (1)

De: $91h + 7k - 271 = 0$ ..... (3)

$6h + 7k - 16 = 0$ ..... (1)

$$h = 3\ ;\ k = -\frac{2}{7} \qquad \Rightarrow C_2\left(3; -\frac{2}{7}\right)$$

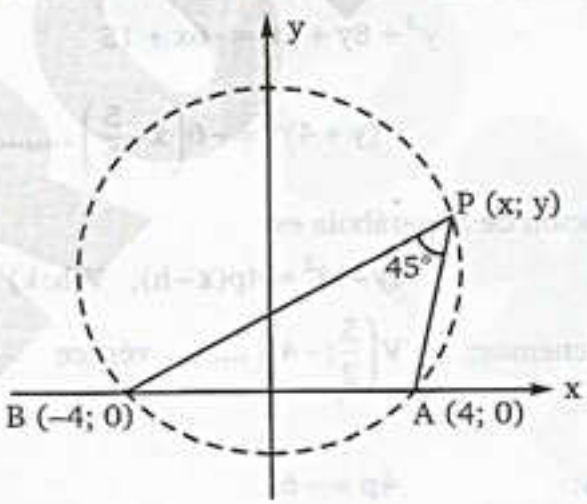
Hallamos "$r_2$"

$$r_2 = \frac{\left|3(3) - 4\left(-\frac{2}{7}\right) - 18\right|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \Rightarrow r_2 = \frac{11}{7}$$

$$\therefore \quad \mathscr{C}_2: (x-3)^2 + \left(y + \frac{2}{7}\right)^2 = \frac{121}{49}$$

**PROBLEMA 10** ¿Qué lugar geométrico describe un móvil P(x; y) si las rectas que lo unen a dos puntos A(4; 0) y B(–4; 0) forman un ángulo que mide 45°?

**Resolución:**




Sea P(x; y) un punto del lugar geométrico.

Sea: $m_1 = m_{BP}$

$$m_1 = \frac{y}{x+4} \quad \text{.....(1)}$$

Sea: $m_2 = m_{AP}$

$$m_2 = \frac{y}{x-4} \quad \text{.....(2)}$$

Aplicando "ángulo entre dos rectas"

$$\tan 45^\circ = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

Usando (1) y (2) tenemos:

$$1=\frac{\frac{y}{x-4}-\frac{y}{x+4}}{1+\left(\frac{y}{x-4}\right)\left(\frac{y}{x+4}\right)}$$

Reduciendo tenemos:

$$x^2+y^2-8y-16=0$$

$$(x-0)^2+(y-4)^2=32$$

**Por lo tanto el lugar geométrico es una circunferencia de centro C(0; 4) y radio $r=4\sqrt{2}$**

**PROBLEMA 11** Dada la parábola que tiene por ecuación:

$$y^2+6x+8y+1=0$$

Encuentre las coordenadas del vértice, el foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto

**Resolución:**

$$\mathcal{P}:\ y^2+6x+8y+1=0$$

Completando cuadrados para hallar la forma ordinaria:

$$y^2+8y+16=-6x+15$$

$$(y+4)^2=-6\left(x-\frac{5}{2}\right) \ldots\ldots (*)$$

La ecuación de la parábola es:

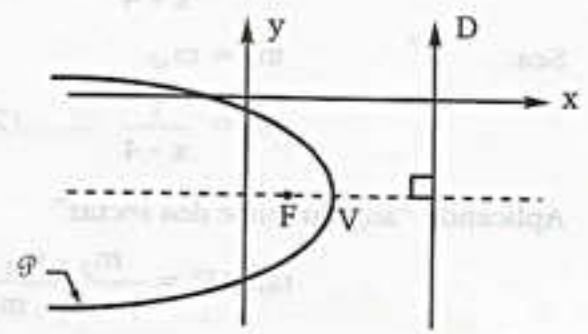
$$(y-k)^2=4p(x-h);\quad V(h;k)$$

De (*) tenemos: $V\left(\frac{5}{2};-4\right)$ ..... vértice

Además: $4p=-6$

$$p=-\frac{3}{2}$$

(*) es una parábola con vértice $V\left(\frac{5}{2};-4\right)$ y se abre hacia la izquierda.



team CALAPENSHKO


Foco: $F\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2};-4\right)=F(1;-4)$

Longitud del lado recto:

$$LR=|4p|=\left|4\left(-\frac{3}{2}\right)\right|=6$$

Ecuación de la directriz:

$$x=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=4}$$

**PROBLEMA 12** Determine la ecuación de las rectas tangentes a la parábola $y = x^2 + 2x + 25$ que pasan por el origen.

**Resolución:** Las rectas que pasan por el origen tienen la forma: $y = mx$
Luego resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} y = mx & \ldots\ldots (1) \\ y = x^2 + 2x + 25 & \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

(1) en (2): $mx = x^2 + 2x + 25$

$$x^2 + (2-m)x + 25 = 0$$

Aplicando el criterio de tangencia, el discriminante de esta ecuación debe ser cero:

$$(2-m)^2 - 4(1)(25) = 0$$

$$(2-m)^2 = 100$$

$$2 - m = \pm 10 \Rightarrow \begin{cases} m = -8 \\ m = 12 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \textbf{las rectas son: } \mathbf{y = -8x \ \wedge \ y = 12x}$$

**PROBLEMA 13** Determine las coordenadas del punto medio determinado por los puntos de intersección de las parábolas:

$$\mathcal{P}_1: x^2 - 6x - y + 11 = 0 \ \wedge \ \mathcal{P}_2: x^2 - 10x + y + 19 = 0$$

**Resolución:** Para hallar los puntos de intersección de $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 6x - y + 11 = 0 & \ldots\ldots\ldots (1) \\ x^2 - 10x + y + 19 = 0 & \ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

(1) – (2): $4x - 2y - 8 = 0$

$y = 2x - 4$ ..... (3)

(3) en (1): $x^2 - 6x - (2x - 4) + 11 = 0$

$x^2 - 8x + 15 = 0$

$(x - 5)(x - 3) = 0$

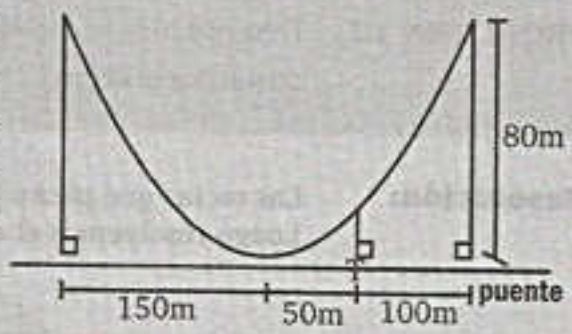
Si: x = 5 en (3): $y = 2(5) - 4 = 6$

Si: x = 3 en (3): $y = 2(3) - 4 = 2$

∴ **Los puntos de intersección son (5; 6) y (3; 2)**

**PROBLEMA 14** La figura representa dos torres de suspensión de un puente colgante que distan entre sí 300m y se extienden verticalmente 80 m por encima de la calzada. Si el cable que une las torres toma la forma de una parábola y M es punto de tangencia, calcule TQ.

**ADMISIÓN UNMSM 2017 - I**




**Resolución:**

Nos piden TQ = b.

Dibujamos el plano cartesiano de origen M y la calzada en el eje X.

Ahora el cable tiene por ecuación $\mathscr{P}$: $x^2 = 4py$.

Como $A \in \mathscr{P}$, reemplazamos:

→ $(159)^2 = 4p(80)$ ...(I)

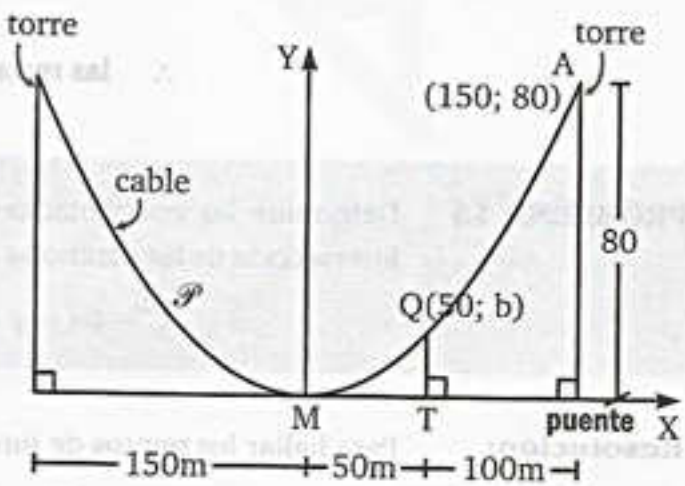
También $Q \in P$

→ $(50)^2 = 4p(b)$ ...(II)

Dividimos (I) y (II):

$$\frac{(150)^2}{(50)^2} = \frac{80}{b}$$

$$\therefore \quad b = \frac{80}{9}\,m$$



team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 15** La entrada de una iglesia tiene la forma de parábola de 9 m de alto y 12 m de base. Toda la parte superior es una ventana de vidrio cuya base es paralela al piso y mide 8 m. ¿Cuál es la altura de la ventana?

**Resolución:** La ecuación del arco parabólico es

$$\mathcal{P}: x^2 = 4p(y-9);\ p < 0$$

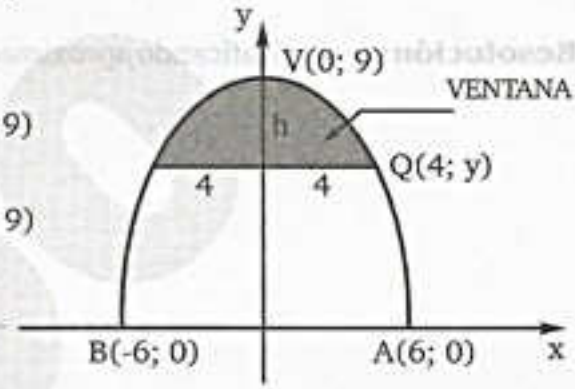
$$A \in \mathcal{P} \Rightarrow 6^2 = 4p(0-9)$$

$$p = -1$$

$$\mathcal{P}: x^2 = -4(y-9)$$

$$Q \in \mathcal{P} \Rightarrow 4^2 = -4(y-9)$$

$$y = 5$$




Luego la altura de la ventana es:

$$h = 9 - 5$$

$$\therefore \quad \mathbf{h = 4}$$

**PROBLEMA 16** Si los puntos A(3; a) y B(b; –4) pertenecen a la parábola $x^2 + 9y = 0$. Determine la mayor longitud del segmento $\overline{AB}$.

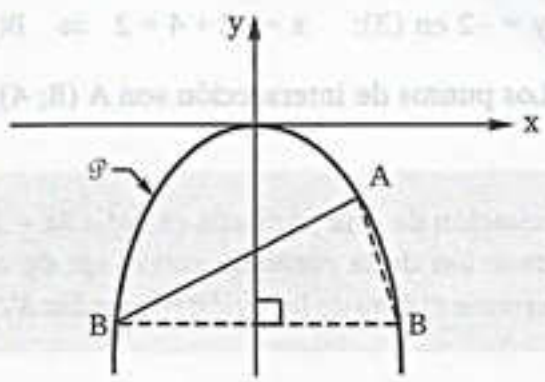
**Resolución:**

$$\mathcal{P}: x^2 = -9y \quad \ldots\ldots\ldots\ (*)$$

Como A y B pertenecen a la parábola deben cumplir la ecuación (*)

$$A(3; a) \Rightarrow 3^2 = -9a \quad \Rightarrow a = -1 \Rightarrow A(3; -1)$$

$$B(b; -4) \Rightarrow b^2 = -9(-4) \Rightarrow b^2 = 36 \Rightarrow b = \pm 6$$




**1.er Caso:** $A(3; -1) \wedge B(6; -4) \in$ IVC

$$AB = \sqrt{(3-6)^2 + (-1-(-4))^2}$$

$$\mathbf{AB = 3\sqrt{2}}$$

**2.° Caso:** $A(3; -1) \wedge B(-6; -4) \in IIIC$

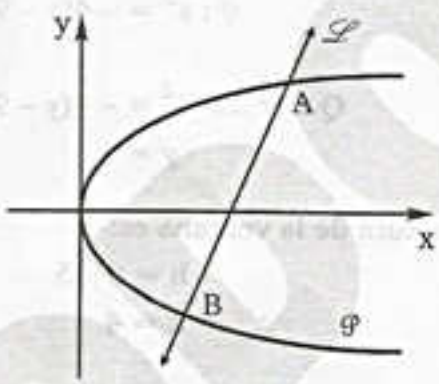
$$AB = \sqrt{(3-(-6))^2 + (-1-(-4))^2}$$

$$AB = 3\sqrt{10}$$

$\therefore$ **La mayor longitud es $3\sqrt{10}$ u**

**PROBLEMA 17** Determine los puntos de intersección de la recta $x - y - 4 = 0$ y la parábola $y^2 = 2x$.

**Resolución:** Graficando aproximadamente la recta $\mathscr{L}: x - y - 4 = 0$ y la parábola $\mathscr{P}: y^2 = 2x$




Para hallar los puntos A y B, resolvemos:

$$\begin{cases} y^2 = 2x & \ldots\ldots (1) \\ x - y - 4 = 0 & \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

De (2): $x = y + 4$ ..... (3)

(3) en (1): $y^2 = 2(y+4) \Rightarrow y^2 - 2y - 8 = 0$

$(y-4)(y+2) = 0$

$y = 4 \vee y = -2$

Si: $y = 4$ en (3): $x = 4 + 4 = 8 \Rightarrow A(8; 4)$

Si: $y = -2$ en (3): $x = -2 + 4 = 2 \Rightarrow B(2; -2)$

$\therefore$ **Los puntos de intersección son A (8; 4) y B(2; – 2)**

**PROBLEMA 18** La ecuación de una parábola es: $x^2 - 2x - 2y - 3 = 0$, siendo A y B los puntos de intersección de la parábola con el eje de abscisas y V el vértice de la parábola. Determine el área de la región triangular AVB.

**Resolución:**

$\mathscr{P}: x^2 - 2x - 2y - 3 = 0$ ..... Ecuación general

Llevando a la forma ordinaria:

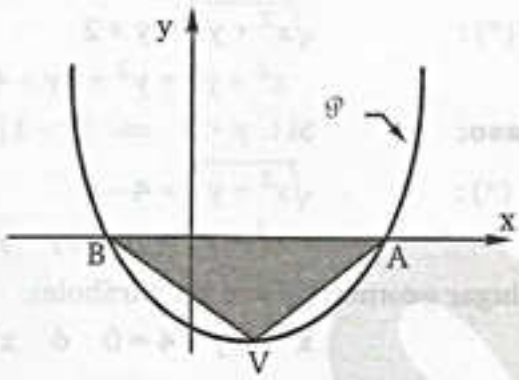
$$x^2 - 2x + 1 - 2y - 4 = 0$$

team CALAPENSHKO


$$(x-1)^2 = 2y+4$$
$$(x-1)^2 = 2(y+2)$$

Vértice : $V(1;-2)$

$p = \frac{1}{2}$ ..... La parábola se abre hacia arriba

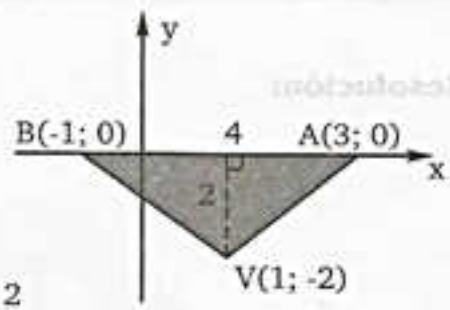



Para hallar A y B hacemos que $y = 0$ en la ecuación general de la parábola:

$$x^2 - 2x - 2(0) - 3 = 0$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$(x-3)(x\ \ 1) = 0$$

Si $x = 3$: $A(3; 0)$

Si $x = -1$: $B(-1; 0)$

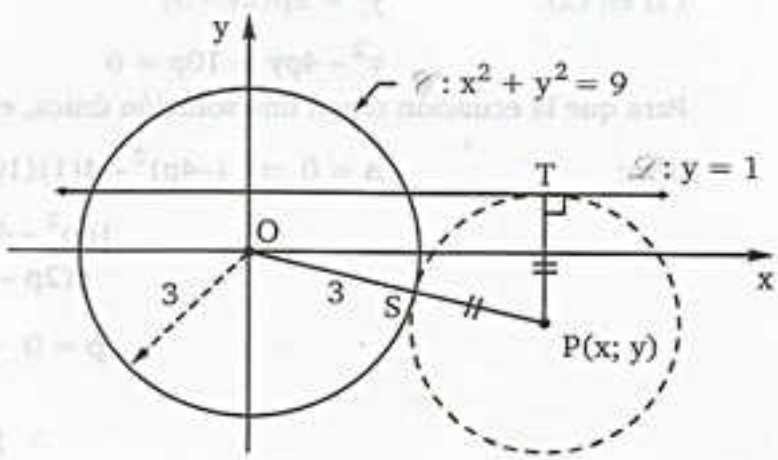



$$S_{\Delta ABV} = \frac{\text{base . altura}}{2} = \frac{4 \,.\, 2}{2}$$

$\therefore\ S_{\Delta ABV} = 4\ u^2$

**PROBLEMA 19** Determine el lugar geométrico del centro de una circunferencia que es tangente a la recta $\mathcal{L}: y = 1$ y a la circunferencia $\mathcal{C}: x^2 + y^2 = 9$.

**Resolución:**



Sea P(x; y) el lugar geométrico:

Del gráfico: $PT = |y-1| = PS$

Además: $PO = PS + SO$

$$\sqrt{x^2+y^2} = |y-1| + 3 \quad \ldots\ldots\ldots (*)$$

**1.er Caso:** Si: $y > 1 \Rightarrow |y-1| = y-1 \ldots\ldots\ldots (1)$

(1) en (*): $\sqrt{x^2+y^2} = y+2 \Rightarrow x^2+y^2 = (y+2)^2$

$$x^2+y^2 = y^2+4y+4 \Rightarrow x^2-4y-4=0$$

**2.° Caso:** Si: $y < 1 \Rightarrow |y-1| = 1-y \ldots\ldots\ldots (2)$

(2) en (*): $\sqrt{x^2+y^2} = 4-y \Rightarrow x^2+y^2 = (4-y)^2$

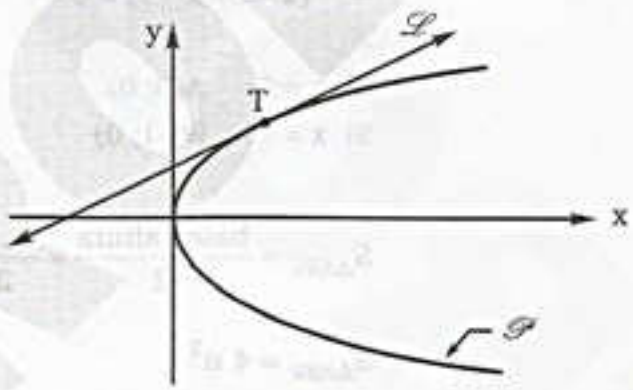
$$x^2+y^2 = 16-8y+y^2 \Rightarrow x^2+8y-16=0$$

$\therefore$ El lugar geométrico son las parábolas:

$$\mathbf{x^2-4y-4=0 \quad ó \quad x^2+8y-16=0}$$

**PROBLEMA 20** Si la recta $\mathscr{L}: x-2y+5=0$ es tangente a la parábola $\mathscr{P}: y^2 = 2px$. Calcular: "p"

**Resolución:**




El punto T es la intersección entre la Parábola y la recta, luego resolvemos:

$$\begin{cases} x-2y+5=0 & \ldots\ldots(1) \\ y^2 = 2px & \ldots\ldots(2) \end{cases}$$

De (1): $x = 2y-5 \ldots\ldots(3)$

(3) en (2): $y^2 = 2p(2y-5)$

$$y^2-4py+10p=0$$

Para que la ecuación tenga una solución única, el discriminante tiene que ser cero:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (-4p)^2-4(1)(10p)=0$$

$$16p^2-40p=0$$

$$p(2p-5)=0$$

$$p=0 \vee p=\frac{5}{2}$$

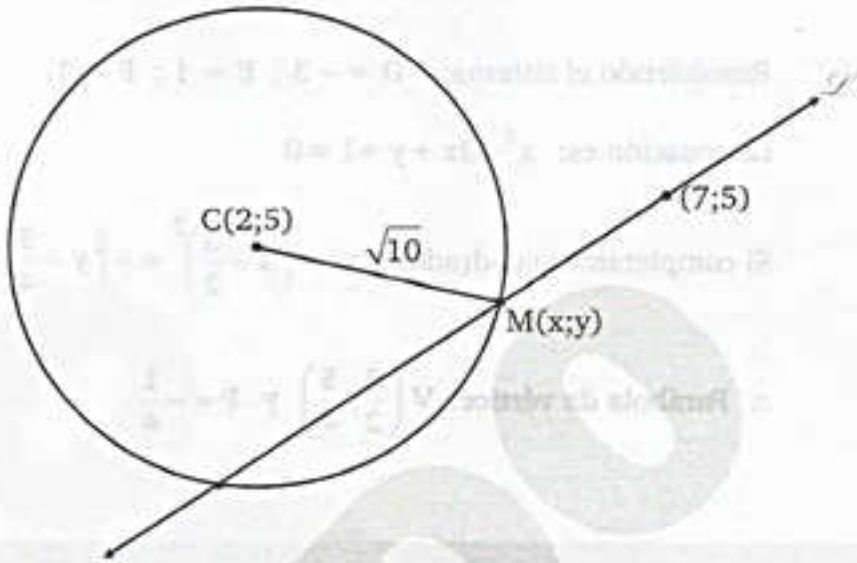
$$\therefore \mathbf{p = 2{,}5}$$

team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 21** Un punto M=( x;y) dista de un punto C (2;5), $\sqrt{10}$ unidades. La pendiente de la recta que pasa por M y A (7;5) es 1/2. Determine el punto M de mayor abscisa

**Resolución:**




Ecuación de la recta:

$$\mathscr{L}: y-5=\frac{1}{2}(x-7) \Rightarrow y=\frac{x+3}{2} \quad \ldots\ldots (1)$$

Ecuación de la circunferencia:

$$\mathscr{C}: (x-2)^2+(y-5)^2=\sqrt{10}^2 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Resolviendo el sistema:

(1) en (2): $(x-2)^2+\frac{(x-7)^2}{4}=10$

Desarrollando: $x=5 \Rightarrow y=4 \quad \therefore M(5;4)$

$x=1 \Rightarrow y=2 \quad \therefore M(1;2)$

$\therefore$ **Punto "M" de mayor abscisa M (5;4)**

**PROBLEMA 22** Determine la ecuación de la parábola, cuyo eje principal es paralelo al eje "Y" y pasa por los puntos $P_1=(1;1)$, $P_2=(-2;-11)$ y $P_3=(3;-1)$.

**Resolución:** La ecuación general de una parábola de eje paralelo al eje Y es la forma:

$$\boxed{x^2+Dx+Ey+F=0}$$

Reemplazando las coordenadas de $P_1=(1;1)$, $P_2(-2;-11)$ y $P_3=(3;-1)$

Se obtiene el sistema:

$$1+D+E+F=0$$

$$4-2D-11E+F=0$$

$$9+3D-E+F=0$$

Resolviendo el sistema: $D=-3\ ;\ E=1\ ;\ F=1$

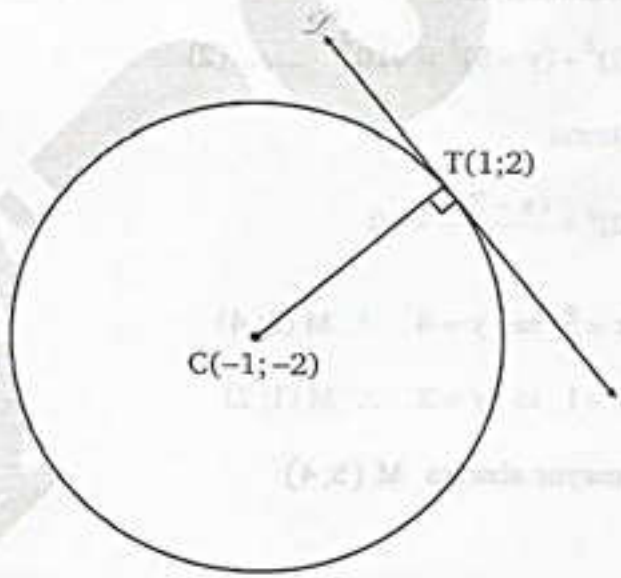
La ecuación es: $x^2-3x+y+1=0$

Si completamos cuadrados será: $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=-\left(y-\frac{5}{4}\right)$

∴ **Parábola de vértice:** $V\left(\frac{3}{2};\frac{5}{4}\right)$ y $P=-\frac{1}{4}$

**PROBLEMA 23** Determine la ecuación de una recta tangente a la circunferencia cuya ecuación es: $x^2+y^2+2x+4y=15$ y pasa por el punto P (1;2). El punto de tangencia es (1;2)

**Resolución:**




De la ecuación:

$$(x+1)^2+(y+2)^2=20$$

$$\Rightarrow C\ (-1;-2)$$

Entonces de la pendiente de la recta que pasa por C y T es 2.

La pendiente de la recta $\mathscr{L}$ será:

$$m\ (2)=-1\Rightarrow m=-\frac{1}{2}$$

En consecuencia la ecuación será:

$$\mathscr{L}: x+2y-5=0$$

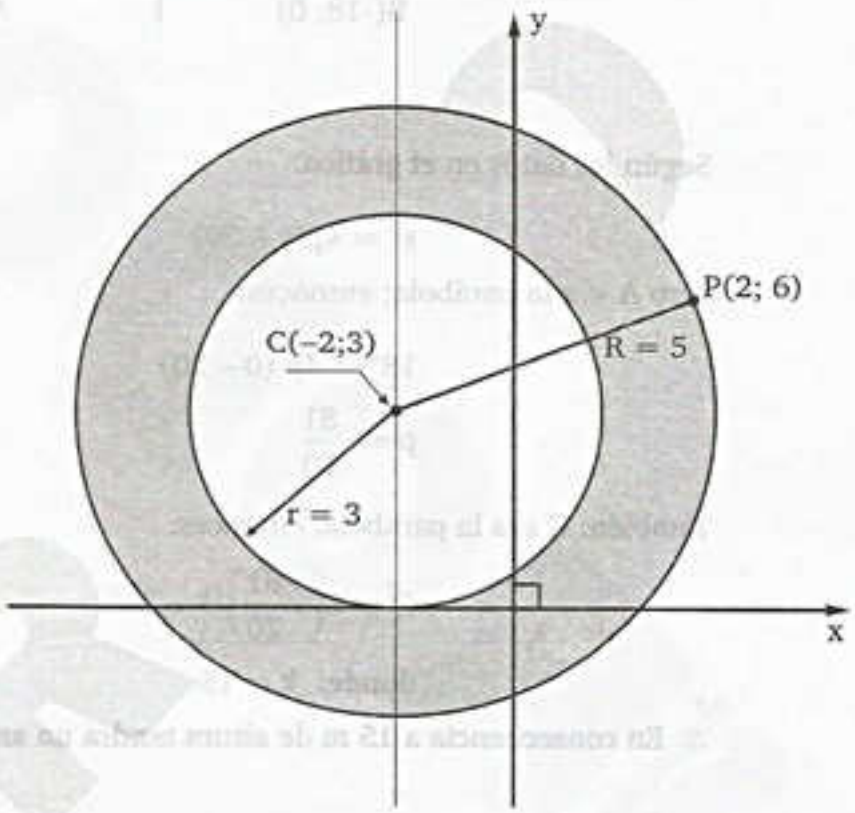
team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 24** Hallar la medida del área de la región comprendida entre la curva de ecuación: $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$ y la circunferencia que pasa por el punto P(2; 6); que es concéntrica con la curva anterior

**Resolución:** Dato: $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$

$\mathcal{C}_1: (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$




Área sombreada $= \pi R^2 - \pi r^2$

Área sombreada $= \pi (5)^2 - \pi (3)^2$

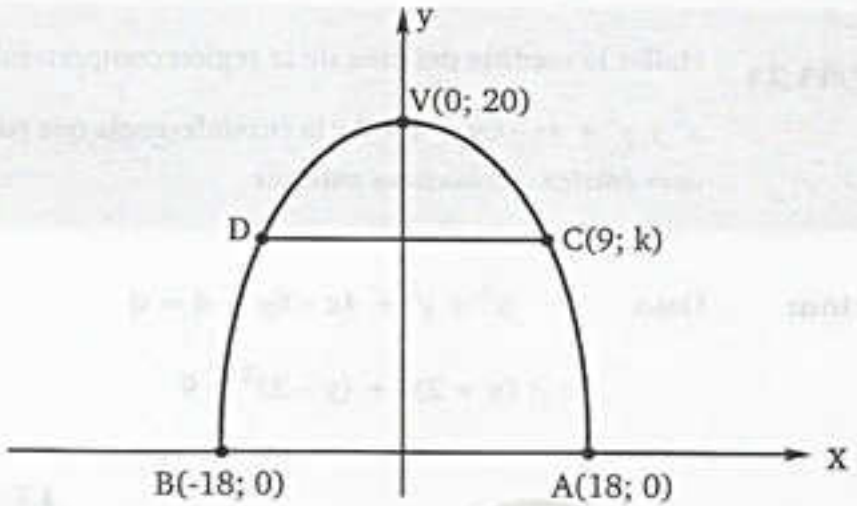
**Área sombreada $= 16\pi u^2$**

**PROBLEMA 25** La sección transversal de un túnel tiene la forma de un arco parabólico, su altura es de 20 m y el ancho de la base es de 36 m. ¿A qué altura, la medida de su ancho es 18 m?

team CALAPENSHKO



**Resolución:**




Según los datos en el gráfico:

$$x^2 = 4p(y - 20)$$

Pero A $\in$ a la parábola; entonces:

$$18^2 = 4p\,(0 - 20)$$

$$p = -\frac{81}{20}$$

También: C $\in$ a la parábola, entonces:

$$9^2 = 4\left(-\frac{81}{20}\right)(k - 20)$$

donde: $k = 15$

$\therefore$ **En consecuencia a 15 m de altura tendrá un ancho de 18 m.**

team CALAPENSHKO


## PROBLEMAS PROPUESTOS

**1.** Respecto a la ecuación de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0$$

Se puede afirmar:

I. El radio mide 3.

II. El centro es un punto en el eje de abscisas.

III. La suma de las coordenadas del centro es 3.

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y II E) II y III

**2.** La ecuación de una circunferencia es:

$$x + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$$

hallar las coordenadas del centro. Dar como respuesta la suma de los mismos.

A) –1 B) –2 C) –3
D) –4 E) 2

**3.** Hallar la longitud de la circunferencia, cuya ecuación es:

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$$

A) $2\pi u$ B) $3\pi u$ C) $4\pi u$
D) $5\pi u$ E) $6\pi u$

**4.** El diámetro de una circunferencia tiene por extremos a los puntos A(2; 3) y B(-4; 5). Hallar la ecuación de la misma.

A) $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 10$
B) $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 100$
C) $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 100$
D) $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 10$
E) $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 10$

**5.** Hallar el valor de "m" para que la ecuación:

$$x^2 + y^2 - 8x + 10y + m = 0$$

represente una circunferencia de radio 4.

A) 16 B) 20 C) 25
D) 30 E) 32

**6.** Si la ecuación:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Representar una circunferencia de radio 3 y centro (-2; -1), calcular:

$$A + B + C$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

**7.** Las coordenadas del centro de una circunferencia se ubican sobre las rectas:

$\mathscr{L}_1$: $x + y - 12 = 0$ ..... (i)
$\mathscr{L}_2$: $2x - y + 3 = 0$ ..... (ii)

Si el radio mide $\sqrt{5}$, hallar la ecuación de dicha curva

A) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 85 = 0$
B) $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 85 = 0$
C) $x^2 + y^2 - 6x - 18y + 85 = 0$
D) $x^2 + y^2 + 6x - 18y + 85 = 0$
E) $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 85 = 0$

**8.** Hallar la ecuación de la circunferencia de centro C(3; -6) y que es tangente al eje Y.

A) $x^2 + y^2 - 6x + 12y + 36 = 0$
B) $x^2 + y^2 + 6x - 12y + 36 = 0$
C) $x^2 + y^2 - 6x - 12y + 36 = 0$
D) $x^2 + y^2 + 6x + 12y - 36 = 0$
E) $x^2 + y^2 - 6x - 12y - 36 = 0$

**9.** Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el origen del plano cartesiano y además es tangente a la recta:

$$x - y + 4 = 0$$

A) $x^2 + y^2 = 2$
B) $x^2 + y^2 = 4$
C) $x^2 + y^2 = 8$
D) $x^2 + y^2 = 12$
E) $x^2 + y^2 = 16$

**10.** Hallar la ecuación de la circunferencia con centro (5; 2) que es tangente a la circunferencia:

$$\mathcal{C}_1: x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$$

A) $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 = 0$
B) $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 13 = 0$
C) $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 25 = 0$
D) $x^2 + y^2 - 10x - 4y - 25 = 0$
E) $x^2 + y^2 + 10x - 4y - 25 = 0$

**11.** Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene como diámetro la porción de recta.

$$\mathcal{L}: 2x - 3y + 12 = 0$$

Comprendido en el segundo cuadrante.

A) $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 13$
B) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$
C) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$
D) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 13$
E) $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 13$

**12.** Hallar la ecuación de una circunferencia que pasa por los puntos (2; 3) y (4; 1), además tiene su centro en la recta:

$$3x - 4y = 0$$

A) $(x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 4$
B) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$
C) $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 4$
D) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$
E) $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$

**13.** Determinar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo determinado por los puntos A(1; 1); B(1; -1) y C(2; 0)

A) $(x + 1)^2 + y^2 = 1$
B) $(x - 1)^2 + y^2 = 1$
C) $x^2 + (y - 1)^2 = 1$
D) $x^2 + (y + 1)^2 = 1$
E) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$

**14.** Hallar la longitud de la tangente trazada desde el punto (7; 2) a la circunferencia cuya ecuación es:

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

**15.** Como son las circunferencias:

$$\mathcal{C}_1: x^2 + y^2 + 4y + 6y - 23 = 0$$
$$\mathcal{C}_2: x^2 + y^2 - 8x - 10y + 25 = 0$$

A) Secante
B) Concéntricas
C) Exteriores
D) Tangentes Interiores
E) Tangentes Exteriores

**16.** El punto C(3; -1) es el centro de una circunferencia, si se tiene una cuerda cuya ecuación es $2x - 5y + 18 = 0$, la misma que tiene una longitud de 6 unidades. Hallar la ecuación de dicha circunferencia.

A) $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 28 = 0$
B) $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 18 = 0$
C) $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 38 = 0$
D) $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 18 = 0$
E) $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 28 = 0$

**17.** Se tiene la ecuación de una circunferencia dada por $\mathcal{C}: x^2 + y^2 - 6y + 4x - 17 = 0$ en donde el diámetro es perpendicular a la recta $\mathcal{L}: 5x - 2y - 13 = 0$.

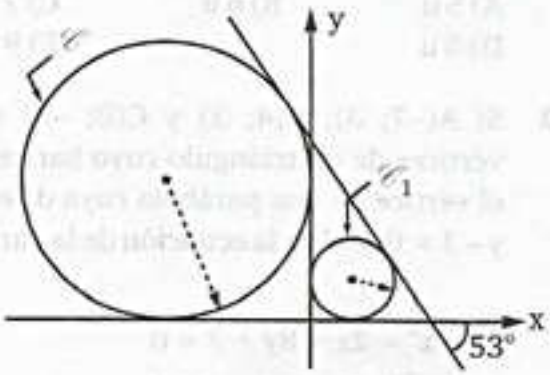
Hallar la ecuación de la recta que contiene a dicho diámetro.

A) $2x + 5y - 10 = 0$
B) $3x + 5y - 11 = 0$
C) $2x + 5y - 11 = 0$
D) $3x + 5y + 11 = 0$
E) $3x + 2y - 5 = 0$

team CALAPENSHKO

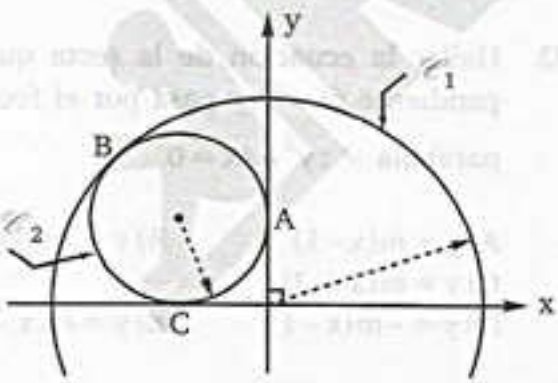

**18.** Del gráfico, hallar la ecuación de la circunferencia $\mathscr{C}$ si la ecuación de

$$\mathscr{C}_1: x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$$




A) $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 4 = 0$
B) $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 4 = 0$
C) $x^2 + y^2 + 3x + 3y - 6 = 0$
D) $x^2 + y^2 - 6x + 6y + 9 = 0$
E) $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$

**19.** En la figura, la ecuación de la circunferencia $\mathscr{C}_1$ es: $x^2 + y^2 = 3 + 2\sqrt{2}$. Halle la ecuación de la circunferencia $\mathscr{C}_2$ (A, B, C son puntos de tangencia)




A) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = \sqrt{2}$
B) $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$
C) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$
D) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
E) $(x + \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 2$

**20.** Hallar la ecuación de la circunferencia tangente al eje x, con centro en la recta $\mathscr{L}: x + y - 7 = 0$ y que pasa por el punto A(5; 4)

A) $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 25 = 0$
B) $x^2 + y^2 + 6x + 20y + 9 = 0$
C) $x^2 + y^2 + 4x - 10x + 25 = 0$
D) $x^2 + y^2 + 6x - 20y + 9 = 0$
E) Hay dos respuestas

**21.** Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por P(2; 3), es tangente a la recta $\mathscr{L}_1: x + y - 7 = 0$, y con centro en $\mathscr{L}_2: 3x - y - 7 = 0$

A) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 2$
B) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 10$
C) $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 50$
D) $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 30$
E) Hay dos respuestas

**22.** Hallar la ecuación de la circunferencia inscrita al triangulo cuyos lados son:

$\mathscr{L}_1: 24x - 7y = 30$
$\mathscr{L}_2: 5x - 12y = 70$
$\mathscr{L}_3: 3x + 4y = 24$

A) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 8 = 0$
B) $x^2 + y^2 - 6x + 3y + 12 = 0$
C) $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 16 = 0$
D) $x^2 + y^2 - 10x + 5y + 20 = 0$
E) $x^2 + y^2 - 12x + 6y + 24 = 0$

**23.** Una parábola tiene por ecuación: $y^2 + 8x = 0$. Indicar verdadero (V) o falso (F) a cada proposición:

( ) Su eje de simetría está sobre el eje X
( ) La ecuación de la directriz es: $x + 2 = 0$
( ) El lado recto mide 10 u.

A) VVV B) VVF C) VFF
D) FVV E) FFV

**24.** La ecuación de la parábola de Foco (–3; 2) y directriz $x-1=0$ es:

A) $(y+2)^2=8(x-1)$
B) $(y-2)^2=8(x+1)$
C) $(y-2)^2=-8(x+1)$
D) $(y+1)^2=8(x-1)$
E) $(y-1)^2=-8(x-1)$

**25.** Hallar la ecuación de una parábola cuyo vértice y foco son V(–4; 3) y F(–1; 3) respectivamente.

A) $y^2-6y+12x-39=0$
B) $y^2-6y+12x+39=0$
C) $y^2+6y+12x-39=0$
D) $y^2+6y+12x+39=0$
E) $y^2-6y-12x-39=0$

**26.** La suma de las coordenadas del vértice de la parábola $\mathcal{P}: x^2-4x-4y=0$ es:

A) –3 B) 3 C) –1
D) 1 E) 2

**27.** ¿Cuál es el valor de $k \neq 0$ para que las coordenadas del vértice de la parábola $\mathcal{P}: x^2-4kx-2y=0$ sumen cero?

A) 5 B) 4 C) 3
D) 2 E) 1

**28.** Hallar las coordenadas del foco de la parábola $\mathcal{P}: ax^2+2x+2y=0$ cuyo vértice pertenece a la recta $\mathcal{L}: 4x-1=0$

A) $\left(\frac{1}{2};1\right)$ B) $\left(\frac{1}{2};0\right)$ C) $\left(\frac{1}{4};1\right)$
D) $\left(\frac{1}{4};0\right)$ E) $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

**29.** Hallar la longitud del foco de la parábola $\mathcal{P}: y^2+4x+2y-19=0$ a un punto de ella con ordenada igual a 3.

A) 5 u B) 6 u C) 7 u
D) 8 u E) 9 u

**30.** Si A(–7; 3), B(4; 3) y C(0; –3) son los vértices de un triángulo cuyo baricentro es el vértice de una parábola cuya directriz es $y-3=0$. Hallar la ecuación de la parábola.

A) $x^2-2x+8y+7=0$
B) $x^2+2x+8y-7=0$
C) $x^2+2x-8y-7=0$
D) $x^2-8x+2y+7=0$
E) $x^2+8x-2y-7=0$

**31.** Hallar la longitud del segmento que une el foco de la parábola $\mathcal{P}: y^2+9x=0$ con el punto de intersección de esta con la recta $\mathcal{L}: 3x+4y-12=0$

A) 25/4 B) 29/4 C) 21/4
D) 27/4 E) 23/4

**32.** Hallar la ecuación de la recta que tiene pendiente $m \neq 0$ y pasa por el foco de la parábola $\mathcal{P}: y^2-4x=0$

A) $y=m(x-1)$ B) $y=-m(x+1)$
C) $y=m(x+2)$
D) $y=-m(x-1)$ E) $y=m(x-2)$

**33.** Hallar la ecuación de la recta que pasa por la intersección de las parábolas:

$$\mathcal{P}_1: x^2=4y \ \wedge \ \mathcal{P}_2: y^2=4x$$

A) $x-y=0$ B) $x+y=0$
C) $2x-y=0$
D) $x-2y=0$ E) $2x+y=0$

team CALAPENSHKO


**34.** Una recta $\mathscr{L}$ paralela a la recta $4x + 3y - 25 = 0$ determina en la parábola $y^2 - 8x - 6y + 25 = 0$, una cuerda focal cuya longitud es:

A) 11 u B) 12 u C) 12,5 u
D) 13 u E) 13,5 u

**35.** Siendo P(–2; –4) punto medio de una cuerda de la parábola

$$\mathscr{P}: y^2 + 6x + 10y + 19 = 0$$

hallar la ecuación de dicha cuerda.

A) $3x + y + 10 = 0$ B) $3x + y + 5 = 0$
C) $3x + y + 12 = 0$
D) $3x + y + 8 = 0$ E) $3x + y + 16 = 0$

**36.** A en un punto de la parábola $\mathscr{P}: x^2 - 16y = 0$ cuya distancia a la recta $\mathscr{L}: x + y + 3 = 0$, es igual a $4\sqrt{2}$. Hallar la suma de las coordenadas del punto A.

A) –5 B) 5 C) –4
D) 4 E) –3

**37.** Hallar la ecuación de la recta que pasa por el foco de la parábola $\mathscr{P}: x^2 - 8y = 0$ la cual forma con los ejes coordenados un triángulo y el área de su región triangular mide $16\,u^2$.

A) $y = 2x \pm 8$ B) $4y = 8 \pm x$ C) $y = x \pm 4$
D) $8y = 16 \pm x$ E) $y = x \pm 8$

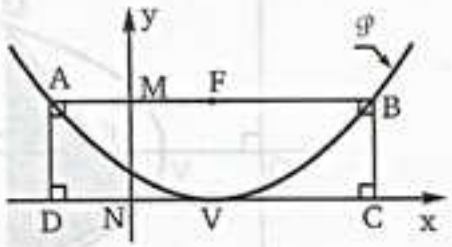
**38.** Hallar la ecuación de la parábola con vértice en el origen que tiene por lado recto la cuerda común a las circunferencias.

$$\mathscr{C}_1: x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$$
$$\mathscr{C}_2: x^2 + y^2 - 12x + 27 = 0$$

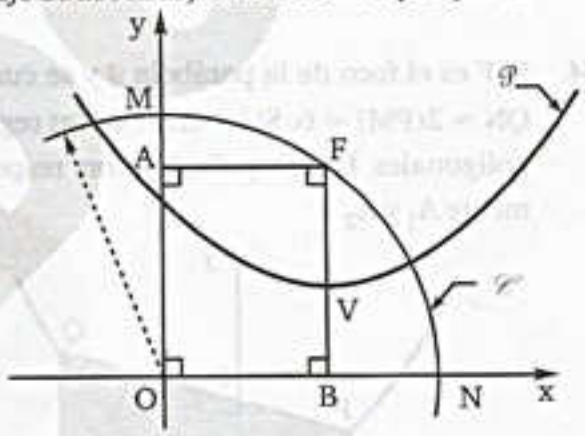
A) $y^2 = 8\sqrt{5}x$ B) $y^2 = 4x$
C) $y^2 = 2\sqrt{5}x$
D) $y^2 = -8\sqrt{5}x$ E) $y^2 = -2\sqrt{5}x$

**39.** La gráfica muestra una parábola cuya ecuación es $\mathscr{P}: x^2 - 8x - 16y + 16 = 0$; si F es el foco de la parábola. Hallar DN.

A) $\sqrt{19}$
B) $\sqrt{17}$
C) $\sqrt{15}$
D) $\sqrt{13}$
E) $\sqrt{11}$




**40.** En un gráfico mostrado, hallar la ecuación de la parábola $\mathscr{P}$ de foco F y cuya directriz es el eje de abscisas; siendo BN = 2(AM) = 2.




A) $x^2 - 6x + 8y + 25 = 0$
B) $x^2 + 6x + 8y - 25 = 0$
C) $x^2 + 6x - 8y + 25 = 0$
D) $x^2 - 6x + 8y - 25 = 0$
E) $x^2 - 6x - 8y + 25 = 0$

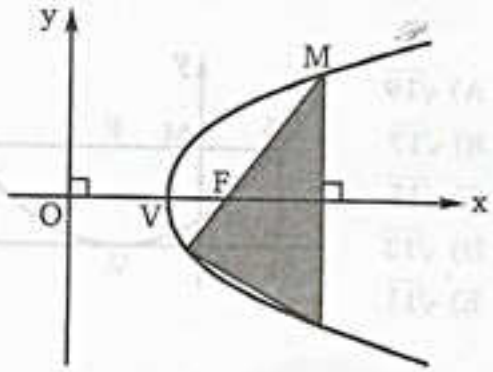
**41.** Hallar la suma de las pendientes de las rectas tangentes a la parábola $\mathscr{P}: x^2 + 2x - y = 25$; sabiendo que estas pasan por el origen.

A) 3 B) 4 C) 0
D) 1 E) 2

**42.** La ecuación de la recta tangente a la parábola $\mathscr{P}: x^2 + 4x + 12y - 8 = 0$, paralela a la recta $\mathscr{L}: 4x + 12y = 0$ es:

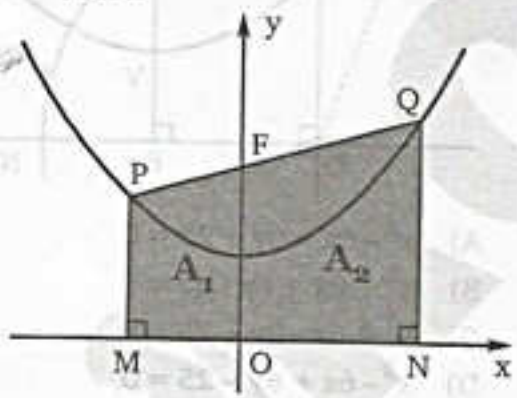
A) $x + 3y - 2 = 0$ B) $x + 3y + 2 = 0$
C) $x + 3y - 6 = 0$
D) $x + 3y + 3 = 0$ E) $x + 3y - 1 = 0$

**43.** Según la figura, V y F son el vértice y el foco de la parábola $\mathcal{P}$. Si $OV = VF = 1$ y $MF = 5$; halle el área de la región triangular.




A) $10\,u^2$ B) $15\,u^2$ C) $20\,u^2$
D) $25\,u^2$ E) $30\,u^2$

**44.** Si F es el foco de la parábola $\mathcal{P}$ y se cumple: $QN = 2(PM) = 6$. Si las áreas de las regiones poligonales MPFO y OQFN son respectivamente $A_1$ y $A_2$




A) $\frac{12}{7}$ B) $\frac{15}{7}$ C) $\frac{16}{7}$
D) $\frac{17}{7}$ E) $\frac{20}{7}$

**45.** El agua, fluye de un grifo horizontal que está a 16 m del piso, describe una curva parabólica con vértice en el grifo. Si a 12 m del piso el flujo del agua se ha alejado 4 m de la recta vertical que pasa por el grifo, ¿a qué distancia de esta vertical tocará el agua al suelo?

A) 16 m B) 14 m C) 12 m
D) 10 m E) 8 m

**46.** Si las circunferencias:

$$\mathcal{C}_1: x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$$
$$\mathcal{C}_2: x^2 + y^2 + 6x - 2y + a = 0$$

son ortogonales, entonces el valor de "a" es:

A) $-13$ B) $-11$ C) $-7$
D) $-3$ E) 3

**47.** El centro de una circunferencia es el punto $C(3;-1)$, la recta $2x - 5y + 18 = 0$ interseca a dicha circunferencia determinando una cuerda de 6 u. Halle la ecuación de esta circunferencia.

A) $(x-3)^2+(y-1)^2=38$
B) $(x+3)^2+(y+1)^2=38$
C) $(x+3)^2+(y-1)^2=38$
D) $(x-3)^2+(y+1)^2=38$
E) $(x-3)^2+(y+1)^2=36$

**48.** Determine la ecuación de una parábola cuyo foco es el centro de la circunferencia: $x^2 + y^2 = 81$, sabiendo que ella determina en el diámetro que está en el eje x, tres segmentos congruentes.

A) $6(y+3) = x^2$ B) $6(y-3) = x^2$
C) $6\left(y+\frac{3}{2}\right) = x^2$
D) $3\left(y+\frac{3}{2}\right) = x^2$ E) $6\left(y-\frac{3}{2}\right) = x^2$

**49.** Se tienen dos parábolas con el mismo lado recto pero vértices diferentes. Calcule la medida del ángulo que forman las rectas tangentes a cada una de las parábolas en su punto de intersección.

A) 60° B) 45° C) 30°
D) 90° E) No se sabe

**50.** El eje "X" es la directriz de una parábola cuyo foco F se encuentra en el primer cuadrante. Si la parábola corta al eje "Y" en P y a OF en Q, tal que $OQ=5$ y $QF=3$, calcule PF. (O: Origen de coordenadas).

A) 20/3 B) 64/5 C) 72/5
D) 124/5 E) 136/5

**A todo el público en general:**

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

**Este libro no debe ser prostituito monetariamente**, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

**28 de agosto del 2020**

team CALAPENSHKO

Capítulo 19

# Elipse e Hipérbola

**CAPACIDADES**

- Reconocer la ecuación de una elipse e hipérbola.
- Trazar lugares geométricos relativos a la elipse e hipérbola.
- Resolver problemas entre recta, elipse e hipérbola.

## LAS CÓNICAS DE APOLONIO

Durante más de ciento cincuenta años, las curvas introducidas por Menecmo se llamarían a partir de la descripción trivial de la forma cómo habían sido descubiertas, es decir, mediante las perífrasis: sección (perpendicular a una generatriz) de cono acutángulo, rectángulo y obtusángulo para la elipse, parábola e hipérbola, respectivamente.

Fue Apolonio en Las Cónicas quien no sólo demostró que de un cono único pueden obtenerse los tres tipos de secciones, variando la inclinación del plano que corta al cono, lo cual era un paso importante en el proceso de unificar el estudio de los tres tipos de curvas, sino que demostró que el cono no necesita ser recto y consideró, asimismo, el cono con dos hojas, con lo que identifica las dos ramas de la hipérbola.

ILUSTRACIONES DE LAS CÓNICAS DE APOLONIO EDICIÓN DE I. BARROW

Según Apolonio, las cónicas pueden ser:
**PARÁBOLA:** el plano de corte es paralelo a una sola generatriz.
**ELIPSE:** el plano de corte no es paralelo a ninguna generatriz.
**HIPÉRBOLA:** el plano de corte es paralelo a dos de sus generatrices.

Además, siguiendo probablemente una sugerencia de Arquímedes, Apolonio acuñó para la posteridad los nombres de elipse, parábola e hipérbola para las secciones cónicas. A lo largo de la Historia de la Matemática, los conceptos han sido siempre más importantes que la terminología utilizada, pero en este caso el cambio de nombre de las secciones cónicas debido a Apolonio, tiene una importancia más allá de lo meramente nominalista.

Los términos adoptados en realidad no eran nuevos, sino que procedían, como sabemos, del lenguaje pitagórico de la solución de ecuaciones cuadráticas del método de Aplicación de las Areas. Elipse significa deficiencia; Hipérbola significa exceso (en el lenguaje ordinario una hipérbole es una exageración); y por ultimo Parábola significa equiparación.

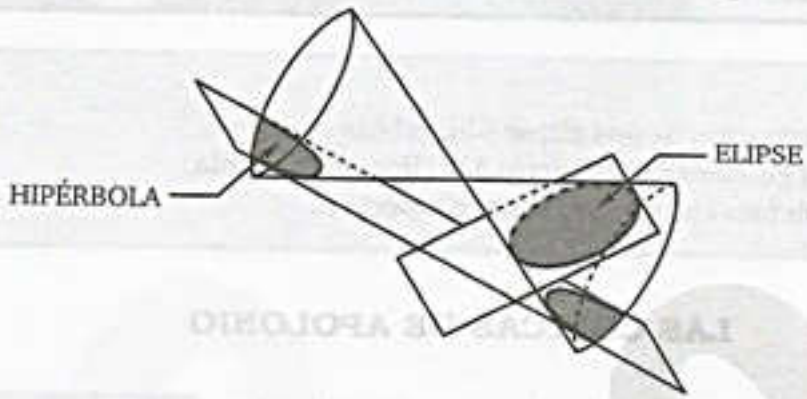
El cambio de nomenclatura envolvía un cambio conceptual, toda vez que las cónicas ya no serían descritas constructivamente, sino a través de relaciones de áreas y longitudes, que daban en cada caso la propiedad característica de definición de la curva y expresaban sus propiedades intrínsecas. Por ejemplo, la conocida ecuación de la parábola con vértice en el origen es $y2=lx$, donde l es el latus rectum o parámetro doble que se representa por 2p.

team CALAPENSHKO



## INTRODUCCIÓN

Las cónicas poseen una rica tracción histórica, que desde los primeros matemáticos griegos. Inicialmente, el interés sobre las cónicas, estaba relacionado con problemas de construcción arquitectónica: con la llegada del método científico en el siglo XVII, se comprobó la importancia de las cónicas. En particular, las cónicas jugaron un papel relevante en los primeros desarrollos del cálculo infinitesimal.

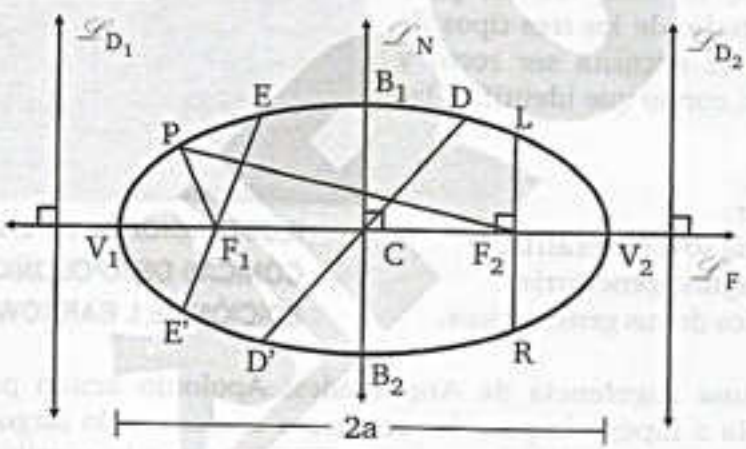



# LA ELIPSE

## DEFINICIÓN

Es el lugar geométrico de un punto "P" que se mueve en un plano, de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos $F_1$ y $F_2$ llamados focos es, siempre igual a una constante positiva "2a".

## ELEMENTOS

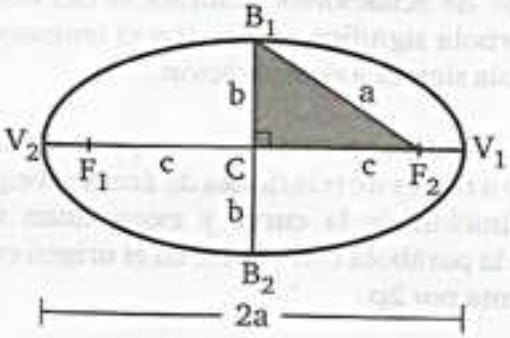



$PF_1 + PF_2 = 2a$

| | | |
|---|---|---|
| $\mathscr{L}_{D_1}$ y $\mathscr{L}_{D_2}$ | : | Directriz |
| $\mathscr{L}_F$ | : | Eje focal |
| $\mathscr{L}_N$ | : | Eje normal |
| C | : | Centro |
| $V_1$ y $V_2$ | : | Vértices |
| $F_1$ y $F_2$ | : | Focos |
| LR | : | Lado recto |
| EE' | : | Cuerda focal |
| DD' | : | Diámetro |
| $PF_1$ y $PF_2$ | : | Radio vector |
| $V_1V_2$ | : | Eje mayor |
| $B_1B_2$ | : | Eje menor |
| $F_1F_2$ | : | Segmento focal |

## RELACIONES FUNDAMENTALES

De la siguiente elipse:



team CALAPENSHKO



Se cumple las siguientes relaciones:

$$V_1V_2 = 2a \qquad B_1B_2 = 2b \qquad F_1F_2 = 2c$$

La relación entre: a, b y c es: $a^2 = b^2 + c^2$

## EXCENTRICIDAD

Se representa por "e" y se define así:

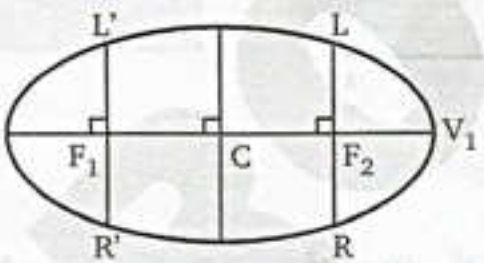
$$e = \frac{c}{a}$$

Como: $c < a \rightarrow \frac{c}{a} < 1$

Luego: $e < 1$

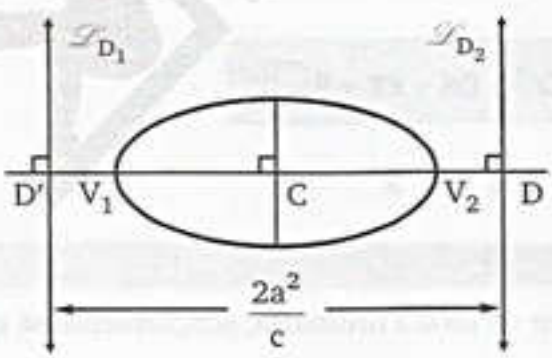
twitter.com/calapenshko

## LONGITUD DEL LADO RECTO




$$LR = L'R' = \frac{2b^2}{a}$$

## DISTANCIA ENTRE LAS RECTAS DIRECTRICES




$$DD' = \frac{2a^2}{c} = \frac{2a}{e}$$

## ECUACIONES DE LA ELIPSE

Se clasifican en:

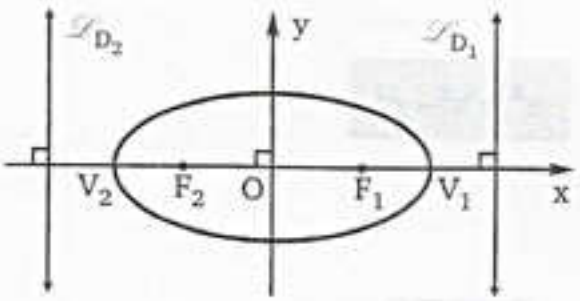
### I. EJE FOCAL PARALELO AL EJE X

A la vez tiene tres formas:

### A) FORMA CANÓNICA

Es una elipse de centro en el origen y cuyo eje focal coincide con el eje "x".

**Gráficamente:**



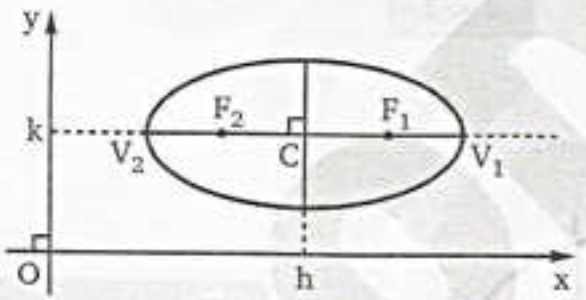

Su ecuación es:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

### B) FORMA ORDINARIA

Es una elipse con centro en (h; k) y cuyo eje focal es paralelo al eje "x".

**Gráficamente:**




Su ecuación es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

### C) FORMA GENERAL:

Si desarrollamos la ecuación ordinaria:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Eliminando los denominadores, ordenando términos y haciendo cambio de variables obtenemos:

$$AX^2+CY^2+DX+EY+F=0$$

Siendo: $A>0$ y $C>0$; además: D, E y F $\in \mathbb{R}$

**NOTA**

Para obtener la ecuación de una elipse en su forma ordinaria, simplemente se completa cuadrados a la forma general.

## II. EJE FOCAL PARALELO AL EJE Y

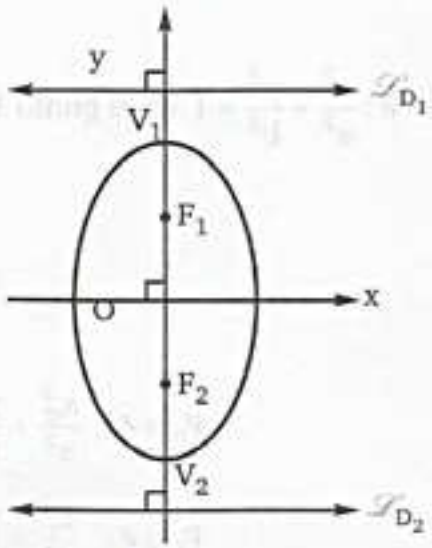
A la vez tiene tres formas:

### A) FORMA CANÓNICA

Es una elipse de centro en el origen y cuyo eje focal coincide con el eje "y".

team CALAPENSHKO


Gráficamente:



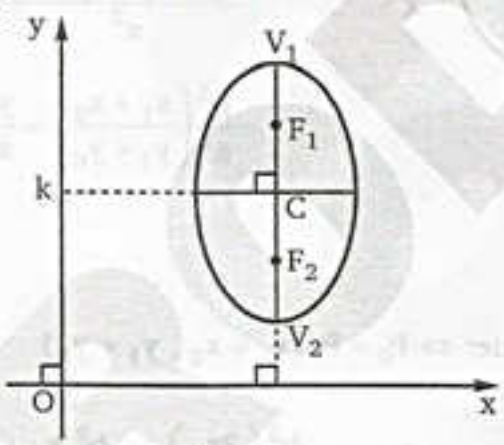

Su ecuación es:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

**B) FORMA ORDINARIA**

Es una elipse con centro en (h; k) y cuyo eje focal es paralelo al eje "y".

Gráficamente:




Su ecuación es:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

**C) FORMA GENERAL**

Si desarrollamos la ecuación ordinaria:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Eliminando los denominadores ordenando términos y haciendo cambio de variables obtenemos:

$$AX^2+CY^2+DX+EY+F=0$$

Siendo: $A>0$ y $C>0$; además: D, E y F $\in \mathbb{R}$

**OBSERVACIÓN**

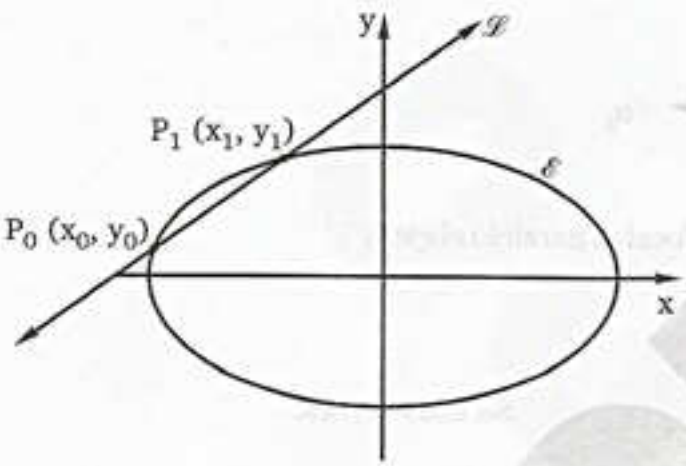
Se observa que la ecuación de una elipse en su forma general con eje focal paralelo al eje "x" y eje focal paralelo al eje "y" son coincidentes en su escritura.
Si nos dan como dato la ecuación de una elipse en su forma general, tenemos que completar cuadrados para afirmar si su eje focal es paralelo al eje "x" o al eje "y".

**PROPIEDAD**

La ecuación de la recta tangente a la elipse. $\mathscr{E}: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ en el punto $P(x_0; y_0)$ es

$$\mathscr{L}_T: \frac{x x_0}{a^2}+\frac{y y_0}{b^2}=1$$

**DEMOSTRACIÓN:**




$$P_0 \in \mathscr{E}: \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$$

$$P_1 \in \mathscr{E}: \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$$

Restando las igualdades:

$$\frac{(x_0-x_1)(x_0+x_1)}{a^2}+\frac{(y_0-y_1)(y_0+y_1)}{a^2}=0$$

$$\Rightarrow -\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{x_1+x_0}{y_1+y_0}\right)=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=m_{\mathscr{L}}$$

Ahora:

$\mathscr{L}$ es tangente: $\Leftrightarrow P_0 = P_1\ (x_1 = x_0,\ y_1 = y_0)$

$$\rightarrow m_{\mathscr{L}}=-\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{2x_0}{2y_0}\right)=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}$$

Ecuación punto – pendiente:

$$\rightarrow \mathscr{L}_T: y-y_0=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$$

$$\mathscr{L}_T: \frac{y y_0-y_0^2}{b^2}=-\frac{1}{a^2}(x x_0-x_0^2)$$

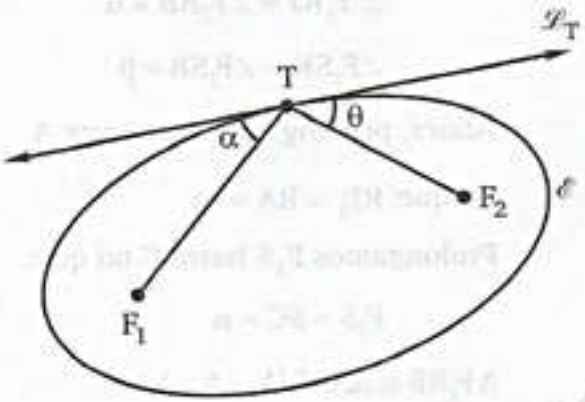
$$\rightarrow \mathscr{L}_T: \frac{x x_0}{a^2}+\frac{y y_0}{b^2}=\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{x_0^2}{a^2}$$

Debido a que $P_0 \in \mathscr{E}$: $\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{x_0^2}{a^2}=1$

$$\therefore \mathscr{L}_T: \frac{x x_0}{a^2}+\frac{y y_0}{b^2}=1$$

team CALAPENSHKO


**PROPIEDAD**




Sea:

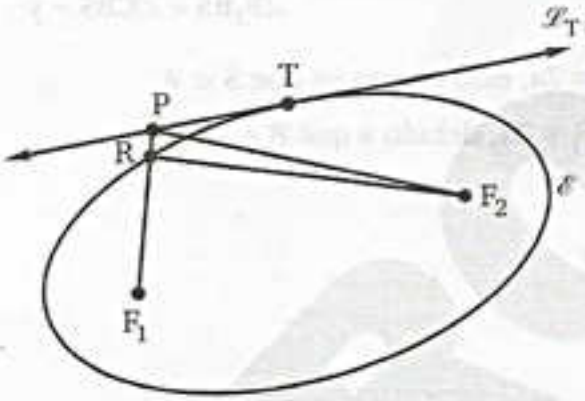
T: punto de tangencia.

$F_1$, $F_2$: focos de la elipse $\mathscr{E}$.

Se cumple:

$$\boxed{\alpha = \theta}$$

**DEMOSTRACIÓN:**




Consideremos un punto P distinto a T.

$$F_1P + F_2P = F_1R + RP + F_2P$$

En el $\Delta RPF_2$ :

$$RP + PF_2 > RF_2$$

$$\rightarrow F_1P + F_2P > F_1R + F_2R$$

Debido a que $R \in \mathscr{E}$:

$$F_1R + F_2R = 2a$$

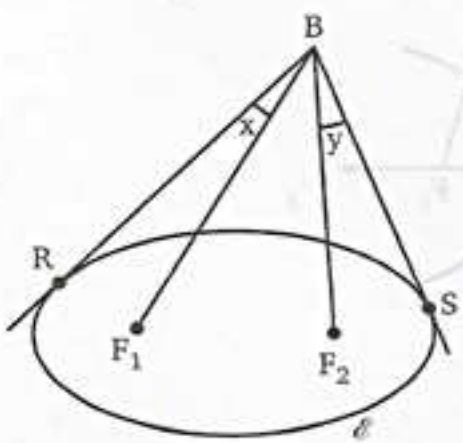
$$\rightarrow F_1P + F_2P > 2a\,,\ \forall P \neq T \text{ y } P \in \mathscr{E}$$

Pero : $F_1T + F_2T = 2a$

Siendo $x \in \mathscr{T}_T$: $(F_1x + F_2x)$ es mínimo cuando $x = T$. Por propiedad del capítulo 16 (Pag. 573)

$$\therefore\ \alpha = \theta$$

**PROPIEDAD**




Sean:

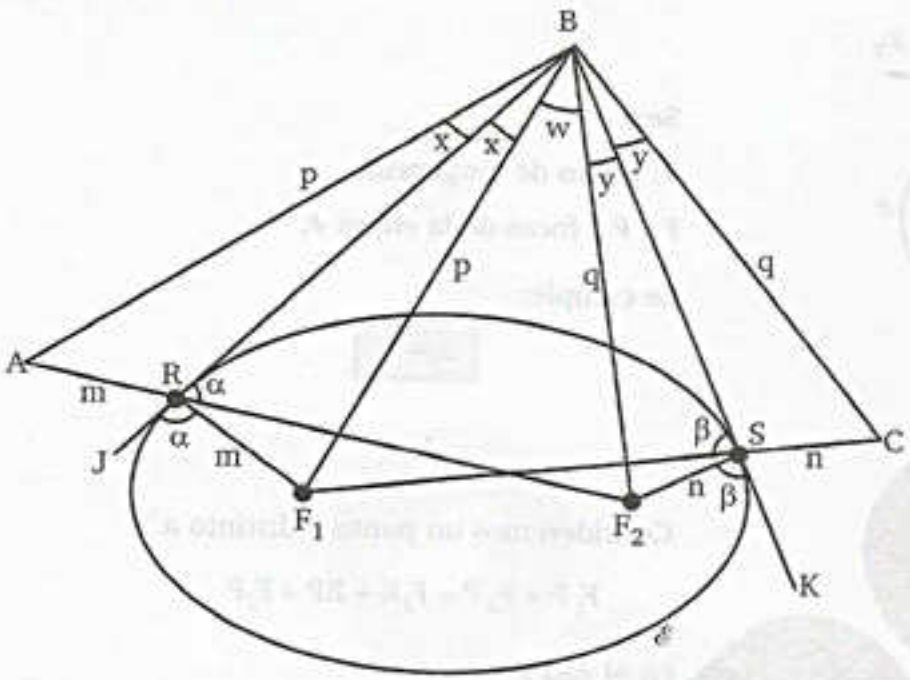
R, S: puntos de tangencia.

$F_1$, $F_2$: focos de la elipse E.

Se cumple:

$$\boxed{x = y}$$

**DEMOSTRACIÓN:**




Por la propiedad anterior:

$$\angle F_1RJ = \angle F_2RB = \alpha$$

$$\angle F_2SK = \angle F_1SB = \beta$$

Ahora, prolongamos $F_2R$ hasta A tal que: $RF_1 = RA = m$

Prolongamos $F_1S$ hasta C tal que:

$$F_2S = SC = n$$

$$\Delta F_1RB \cong \Delta ARB (L - A - L)$$

$$\Rightarrow F_1B = AB = p \ \wedge$$

$$\angle F_1BR = \angle ABR = x$$

$$\Delta F_2SB \cong \Delta CSB (L - A - L)$$

$$\Rightarrow F_2B = CB = q \ \wedge$$

$$\angle F_2BS = \angle CBS = y$$

Observamos que: *) $F_1C = F_1S + SC = F_1S + F_2S = 2a$, esto último ya que $S \in \ell$

*) $F_2A = F_2R + RA = F_2R + RF_1 = 2a$, debido a que $R \in \ell$

Finalmente: $\Delta ABF_2 \cong \Delta F_1BC \ (L - L - L)$

$$\Rightarrow 2x + w = w + 2y$$

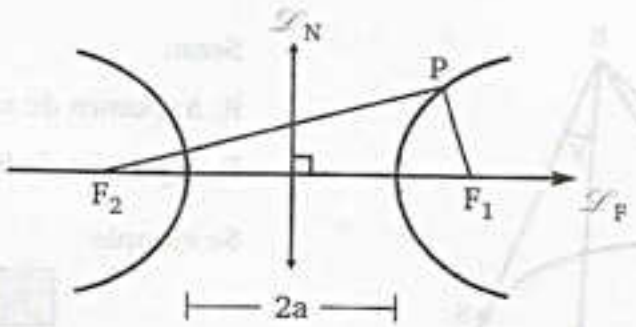
$$\therefore \ x = y$$

## LA HIPÉRBOLA

### DEFINICIÓN

Es el lugar geométrico de un punto "P" que se mueve en un plano, de tal manera que la diferencia de sus distancias, a dos puntos fijos $F_1$ y $F_2$ llamados focos es siempre igual a una constante positiva: 2a.

### GRÁFICAMENTE

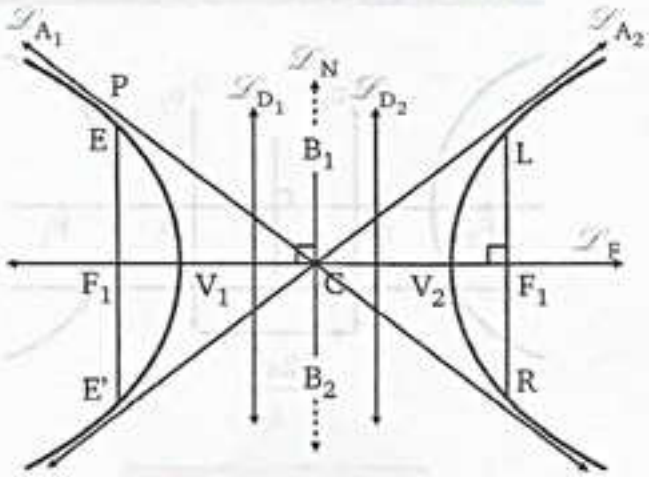



$$PF_2 - PF_1 = 2a$$

team CALAPENSHKO



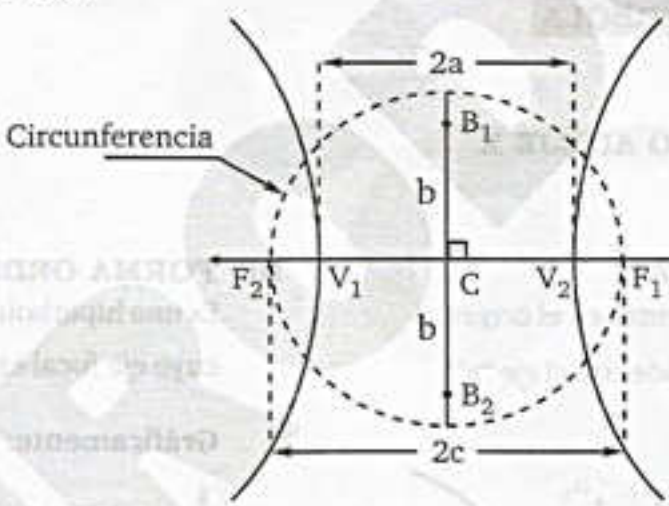
## ELEMENTOS




| | | |
|---|---|---|
| $\mathscr{L}_{D_1}$ y $\mathscr{L}_{D_2}$ | : | Directriz |
| $\mathscr{L}_F$ | : | Eje focal |
| $\mathscr{L}_N$ | : | Eje normal |
| $\mathscr{L}_{A_1}$ y $\mathscr{L}_{A_2}$ | : | Asíntotas |
| C | : | Centro |
| $V_1$ y $V_2$ | : | Vértices |
| $F_1$ y $F_2$ | : | Focos |
| LR | : | Lado recto |
| EE' | : | Cuerda focal |
| $V_1V_2$ | : | Eje transverso |
| $B_1B_2$ | : | Eje conjugado |
| $F_1F_2$ | : | Segmento focal |

## RELACIONES FUNDAMENTALES

De la siguiente hipérbola:




Se cumple las siguientes relaciones:

$$V_1V_2 = 2a \qquad B_1B_2 = 2b \qquad F_1F_2 = 2c$$

La relación entre: a, b y c es: $c^2 = a^2 + b^2$

## EXCENTRICIDAD

Se representa por "e" y se define así:

$$e = \frac{c}{a}$$

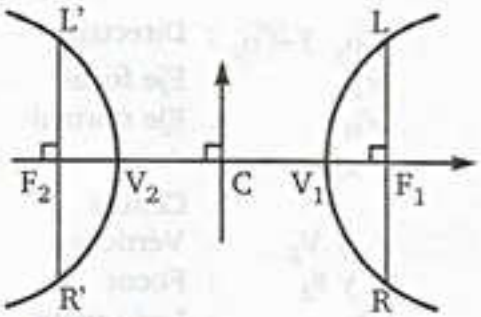
Como: $c > a \rightarrow \frac{c}{a} > 1$

Luego: $e > 1$

team CALAPENSHKO

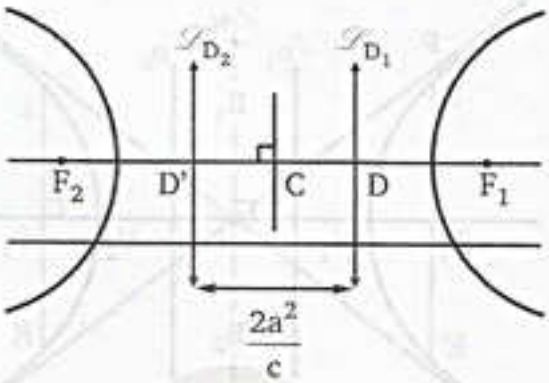


## LONGITUD DEL LADO RECTO




$$LR = L'R' = \frac{2b^2}{a}$$

## DISTANCIA ENTRE LAS RECTAS DIRECTRICES




$$DD' = \frac{2a^2}{c} = \frac{2a}{e}$$

## ECUACIONES DE LA HIPÉRBOLA

Se clasifican en:

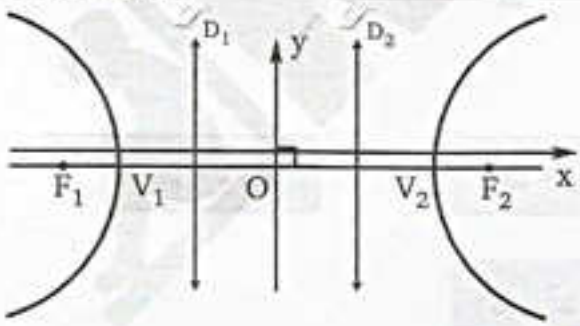
### I. EJE FOCAL PARALELO AL EJE X

A la vez tiene tres formas:

#### A) FORMA CANÓNICA

Es una hipérbola de centro en el origen y cuyo eje focal coincide con el eje "x".

**Gráficamente:**




Su ecuación es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

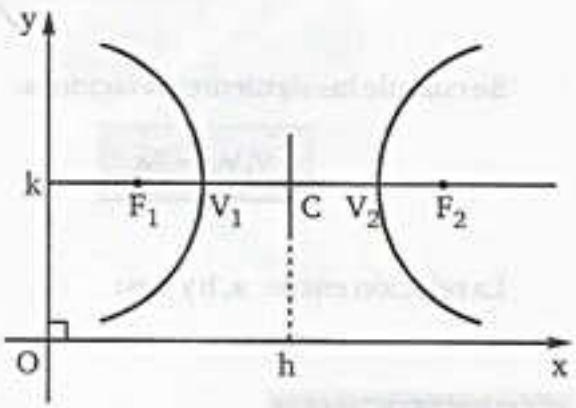
Donde se puede cumplir que:

$a > b$ ó $a = b$ ó $a < b$

#### B) FORMA ORDINARIA

Es una hipérbola con centro en (h; k) y cuyo eje focal es paralelo al eje "x".

**Gráficamente:**




Su ecuación es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Donde se puede cumplir que:

$a > b$ ó $a = b$ ó $a < b$

team CALAPENSHKO


**C) FORMA GENERAL:**

Si desarrollamos la ecuación ordinaria:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Eliminando los denominadores, ordenando términos y haciendo cambio de variables obtenemos:

$$AX^2+CY^2+DX+EY+F=0$$

Siendo: $A>0$ y $C<0$; además: D, E y F $\in \mathbb{R}$

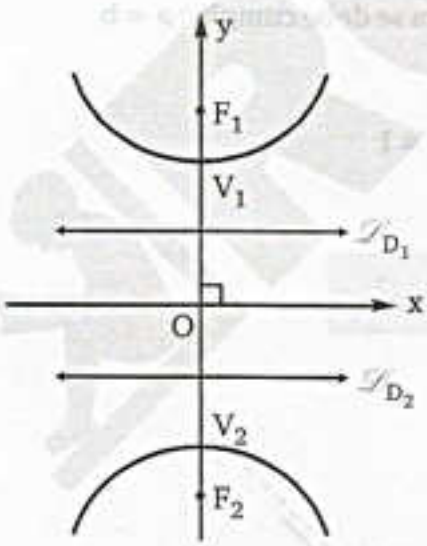
## II. EJE FOCAL PARALELO AL EJE Y

A la vez tiene tres formas:

**A) FORMA CANÓNICA**

Es una hipérbola de centro en el origen y cuyo eje focal coincide con el eje "y".

**Gráficamente:**




Su ecuación es:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

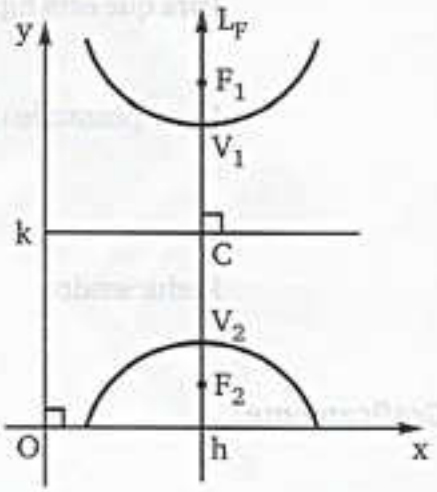
Donde se puede cumplir que:

$a>b$ ó $a=b$ ó $a<b$

**B) FORMA ORDINARIA**

Es una elipse con centro en (h; k) y cuyo eje focal es paralelo al eje "y".

**Gráficamente:**




Su ecuación es:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

Donde se puede cumplir que:

$a>b$ ó $a=b$ ó $a<b$

team CALAPENSHKO


**C) FORMA GENERAL**

Si desarrollamos la ecuación ordinaria:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-k)^2}{b^2}=1$$

Eliminando los denominadores ordenando términos y haciendo cambio de variables obtenemos:

$$AX^2+CY^2+DX+EY+F=0$$

Siendo: $A<0$ y $C>0$; además: D, E y F $\in \mathbb{R}$

## HIPÉRBOLA EQUILÁTERA

Llamado también rectangular, es aquella hipérbola donde la longitud del eje transverso es igual a la longitud del eje conjugado.

**Ejemplo:** Se tiene la ecuación canónica de una hipérbola:

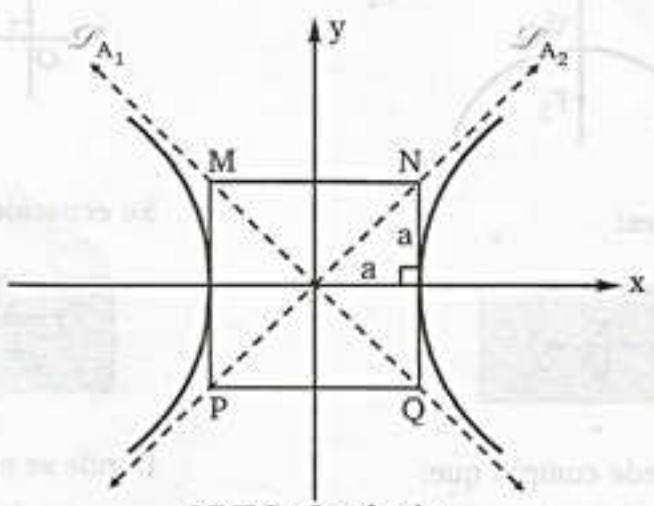
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Para que esta hipérbola sea equilátera se debe cumplir: $a = b$

Reemplazando queda: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$

Reduciendo: $x^2-y^2=a^2$

**Gráficamente:**



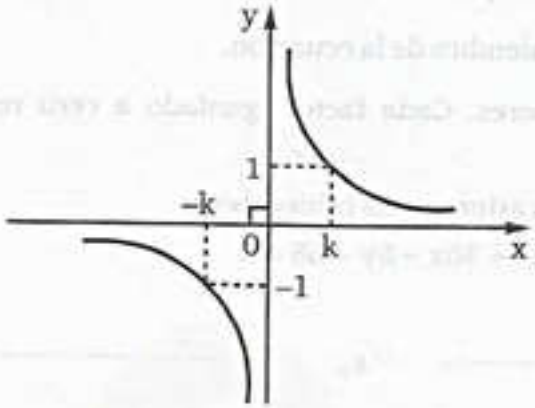

MNPQ: Cuadrado

team CALAPENSHKO



## OBSERVACIÓN

Del gráfico anterior a las asíntotas le hacemos rotar 45°, de tal manera que coincidan con los ejes "x" e "y" quedando el gráfico así:




Cuya ecuación es:

$$xy = k$$

Si y sólo si $k \in \mathbb{R} - \{0\}$

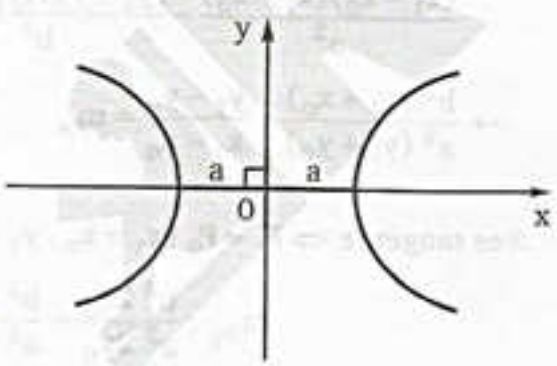
## HIPÉRBOLAS CONJUGADAS

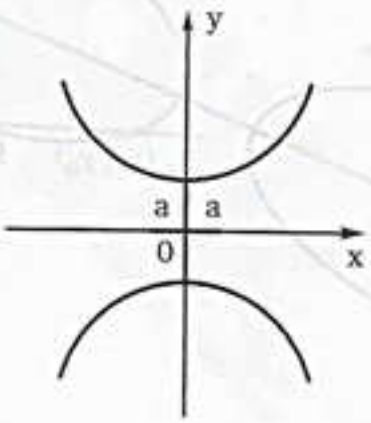
Dos hipérbolas son conjugadas cuando la longitud de eje transverso de una es idéntica a la longitud del eje conjugado del otro.

Dos hipérbolas conjugadas tienen el mismo centro y las mismas asíntotas.

**Ejemplo:** Las hipérbolas: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \wedge \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ son conjugadas.

**Gráficamente:**




## NOTA

Para obtener la hipérbola conjugada de una hipérbola dada, se cambia el signo del primer miembro de su ecuación ordinaria.

**Ejemplo:** Dada la hipérbola: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

su conjugada será: $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

## ASÍNTOTAS DE UNA HIPÉRBOLA

Para obtener las ecuaciones de las asíntotas de una hipérbola se procede de la siguiente manera:

**1.er PASO:** Se expresa la ecuación de la hipérbola en la forma ordinaria.

**2.° PASO:** Se iguala a cero el primer miembro de la ecuación.

**3.er PASO:** Luego se expresa en factores. Cada factor igualado a cero representa a una asíntota.

**Ejemplo:** Hallar las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola:

$$4x^2 - 9x^2 + 36x - 8y - 68 = 0$$

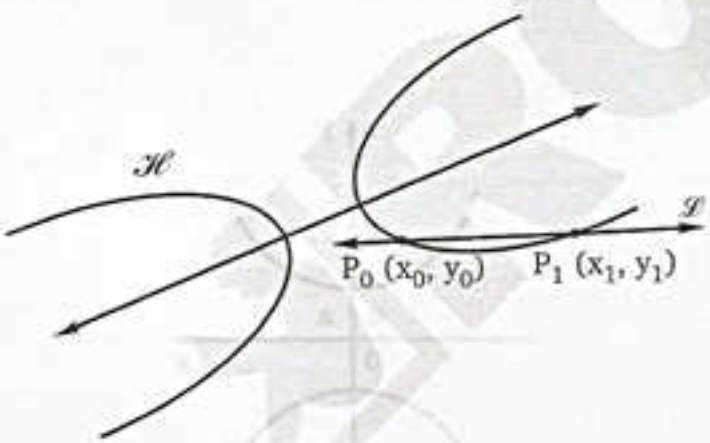
**Rpta:** $\mathscr{L}_{A_1}$ : ..... $\mathscr{L}_{A_2}$ : .....

## PROPIEDAD

La ecuación de la recta tangente a la hipérbola $\mathscr{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ en el punto $P(x_0, y_0)$ es

$$\mathscr{L}_T: \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

**DEMOSTRACIÓN:**




$$P_0 \in H: \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \qquad P_1 \in H: \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

Restando:

$$\frac{(x_1 - x_0)(x_1 + x_0)}{a^2} - \frac{(y_1 + y_0)(y_1 - y_0)}{b^2} = 0$$

$$\rightarrow \frac{b^2}{a^2}\frac{(x_1 + x_0)}{(y_1 + y_0)} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = m_{\mathscr{L}}$$

$\mathscr{L}$ es tangente $\Leftrightarrow P_1 = P_0\ (x_1 = x_0, y_1 = y_0)$

$$m_{\mathscr{L}_T}: \frac{b^2}{a^2}\frac{2x_0}{2y_0} = \frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}$$

Ecuación punto – pendiente: $\rightarrow \mathscr{L}_T: y - y_0 = \frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}(x - x_0) \quad \rightarrow \mathscr{L}_T: \frac{yy_0 - y_0^2}{b^2} = \frac{xx_0 - x_0^2}{a^2}$

$$\rightarrow \mathscr{L}_T: \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}$$

Como $P_0 \in \mathscr{H}$: $\Rightarrow \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$

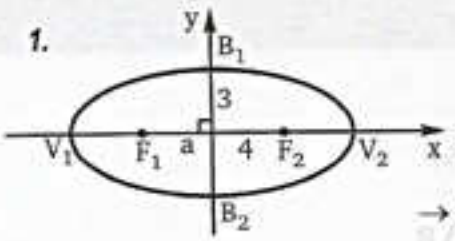
$$\therefore \mathscr{L}_T: \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

team CALAPENSHKO


## EJERCICIOS DE APLICACIÓN

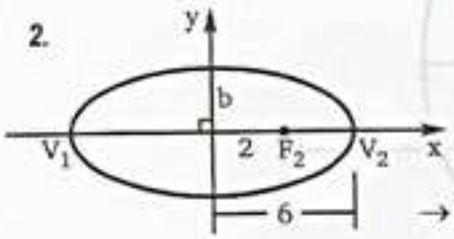
Para cada gráfico; determine los parámetros a, b y c.

**1.**



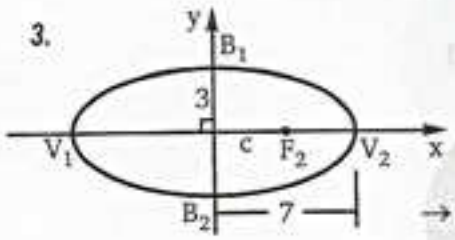

→ a = [ ]

**2.**




→ b = [ ]

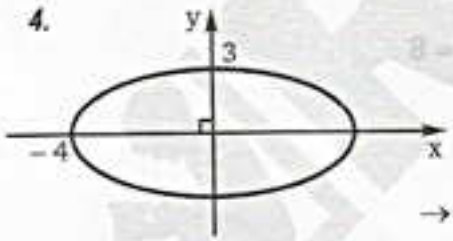
**3.**




→ c = [ ]

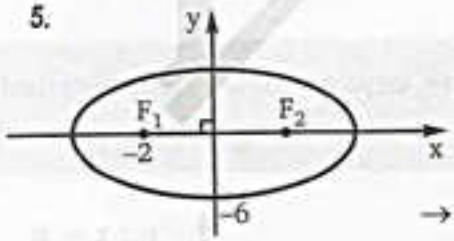
Para cada gráfico; determine la ecuación:

**4.**



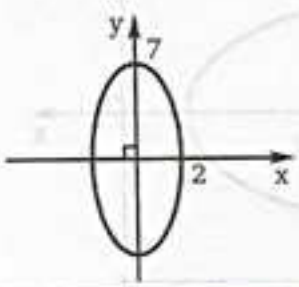

→ $\mathcal{E}$ = [ ]

**5.**




→ $\mathcal{E}$ = [ ]

**6.**




→ $\mathcal{E}$ = [ ]

Dado el conjunto de elipses; se pide calcular la excentricidad:

**7.** $\mathcal{E}: 9x^2 + 25y^2 = 25$ → e = [ ]

**8.** $\mathcal{E}: x^2 + 4y^2 = 4$ → e = [ ]

**9.** $\mathcal{E}: x^2 + 4y^2 - 6x + 32y + 69$ → e = [ ]

Dada las siguientes ecuaciones de hipérbolas, determine su lado recto:

**10.** $\mathcal{H}: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ → LR = [ ]

**11.** $\mathcal{H}: \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{25} = 1$ → LR = [ ]

**12.** $\mathcal{H}: 9x^2 - 25y^2 = 225$ → LR = [ ]

**13.** $\mathcal{H}: 9y^2 - 16x^2 = 144$ → LR = [ ]

Dado las siguientes ecuaciones de hipérbolas, calcular su excentricidad.

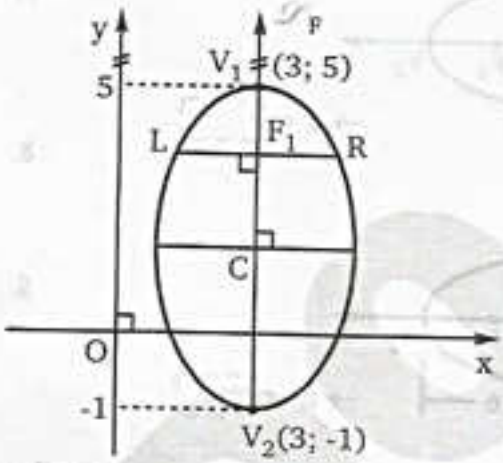
**14.** $\mathcal{H}: \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ → e = [ ]

**15.** $\mathcal{H}: 5x^2 - 20y^2 = 100$ → e = [ ]

## PROBLEMAS RESUELTOS

**PROBLEMA 1** Los vértices de una elipse son $V_1(3;5)$, $V_2(3;-1)$, además su excentricidad es 1/3. Determine la longitud del lado recto.

**Resolución:**




Del gráfico : $\overline{V_1V_2} = 2a = 6 \Rightarrow a = 3$

Excentricidad : $e = \dfrac{c}{a}$

$\dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{3}$

Como : $a = 3 \Rightarrow c = 1$

Sabemos : $a^2 = b^2 + c^2$

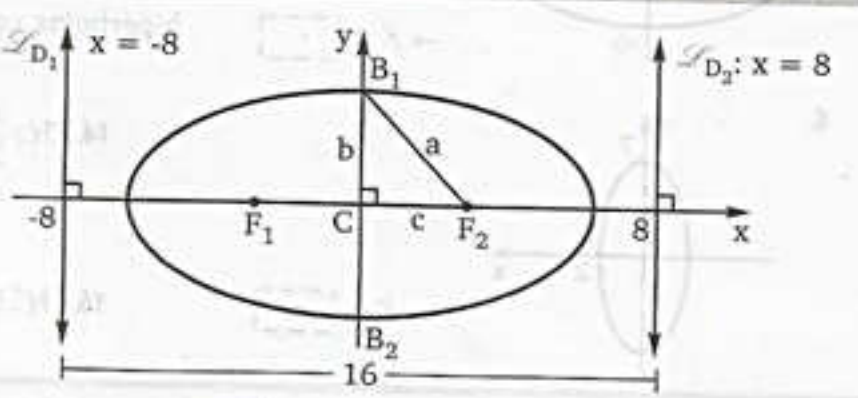
$3^2 = b^2 + 1^2 \Rightarrow b^2 = 8$

Lo pedido : $LR = \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2(8)}{3}$

$\therefore \quad \mathbf{LR = \dfrac{16}{3}}$

**PROBLEMA 2** Las rectas $x = \pm 8$ son directrices de una elipse, cuyo eje menor tiene longitud 8. Determine la ecuación de la elipse.

**Resolución:** Graficando:



El eje menor : $\overline{B_1B_2} = 2b = 8$

$$b = 4 \quad .....(1)$$

La distancia entre las rectas directriceses $\frac{2a^2}{c}$

$$\frac{2a^2}{c} = 16 \Rightarrow a^2 = 8c \quad .....(2)$$

Sabemos : $a^2 = b^2 + c^2$ .....(3)

Reemplazando(1),(2)en(3):

$$8c = (4)^2 + c^2$$

$$c^2 - 8c + 4^2 = 0$$

$$(c-4)^2 = 0 \Rightarrow c = 4$$

$$a^2 = 32$$

Luego la ecuación de la elipse:

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore \mathcal{E}: \frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{16} = 1$$

**PROBLEMA 3** Determine la ecuación de la elipse con excentricidad $e = \frac{2}{3}$, centro en el origen y cuyas directrices son: $y = \pm 9$.

**Resolución:** Como las ecuaciones de las rectas directrices son $y = 9 \wedge y = -9$, la distancia entre las rectas directrices es 18.

Luego : $\frac{2a^2}{c} = 18 \Rightarrow \frac{a^2}{c} = 9$ .....(1)

La excentricidad : $e = \frac{2}{3}$

$$\frac{c}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow c = \frac{2}{3}a \quad .....(2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$a^2 = 9 \cdot \frac{2}{3}a \Rightarrow a = 6$$

$$\Rightarrow c = 4$$

Luego sabemos : $a^2 = b^2 + c^2$

$$36 = b^2 + 16$$

$$b^2 = 20$$

Finalmente la ecuación de la elipse es:

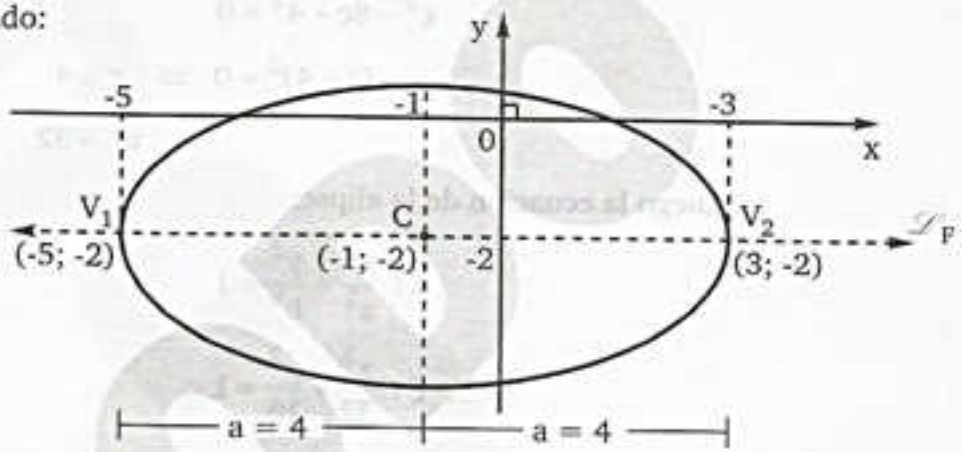
$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{36}=1$$

$$\therefore\ \mathcal{E}: 9x^2+5y^2=180$$

**PROBLEMA 4** Una elipse cuya excentricidad es 0,75 tiene de vértices los puntos: (–5; –2) y (3; –2). Determine la ecuación de la elipse.

**Resolución:** Graficando:




$$C: \left(\frac{-5+3}{2}; \frac{-2-2}{2}\right)$$

$$C: (-1; -2)$$

Como: $e=\frac{3}{4}=\frac{c}{a}$

Reemplazando $a=4$: $c=3$

Sabemos: $a^2=b^2+c^2$

$$4^2=b^2+3^2 \Rightarrow b^2=7$$

Además $\mathcal{L}_F$ es paralelo al eje "x"

Luego la ecuación de la elipse:

$$\mathcal{E}: \frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$$\therefore\ \mathcal{E}: \frac{(x+1)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{7}=1$$

team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 5** Determine la ecuación de la elipse cuyas vértices son (6; –8) y (6; 14) y la longitud de su lado recto es 10 u.

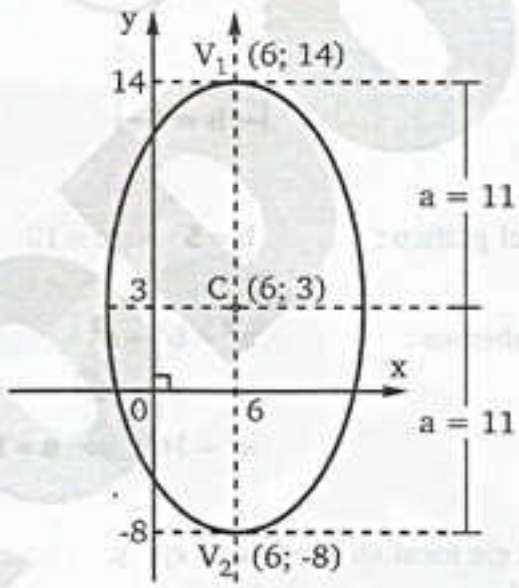
**Resolución:** Del gráfico:

$$a = 11$$

Lado recto es igual a 10:

$$\frac{2b^2}{a} = 10$$

$$\frac{b^2}{11} = 5 \Rightarrow b^2 = 55$$




Luego la ecuación de la elipse:

$$\mathcal{E} : \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

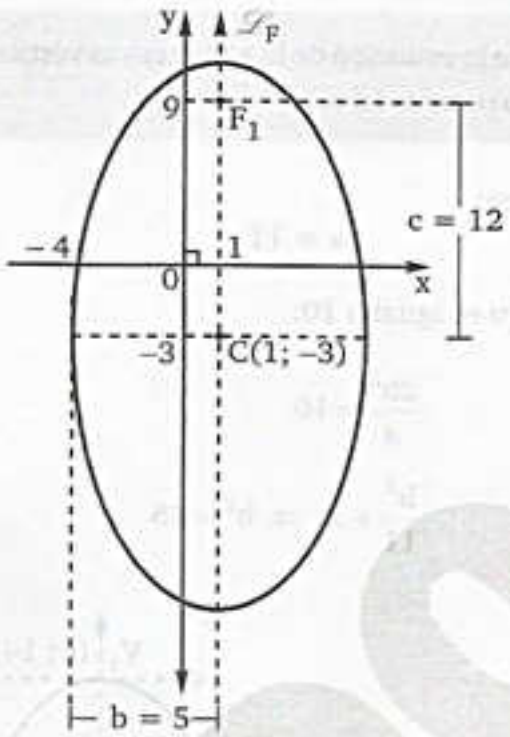
$$\therefore \quad \mathcal{E} : \frac{(x-6)^2}{55} + \frac{(y-3)^2}{121} = 1$$

**PROBLEMA 6** El centro de una elipse es (1; –3) un foco es (1; 9) y un extremo del eje menor es (–4; –3). Determine la ecuación de la elipse.

**Resolución:** Datos : Centro : C(1; – 3)

Foco : $F_1(1;\ 9)$

Un extremo del eje menor : (–4; – 3)




Del gráfico : $b = 5 \ \wedge \ c = 12$

Sabemos : $a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 = 5^2 + 12^2$

$a^2 = 169 \Rightarrow a = 13$

El eje focal es paralelo al eje y.

Luego la ecuación de la elipse:

$$\mathcal{E} : \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

$$\therefore \ \mathcal{E} : \frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{169} = 1$$

**PROBLEMA 7** En una elipse de ecuación:

$$5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$$

Determine las coordenadas de su centro.

**Resolución:** La ecuación de la elipse en su forma general:

$$\mathcal{E} : \ 5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$$

team CALAPENSHKO


Completando cuadrados para "x" e "y" y llevarlo a su forma ordinaria:

$$\mathcal{E}: 5x^2 - 30x + 9y^2 + 18y + 9 = 0$$

$$\mathcal{E}: 5(x^2 - 6x + 3^2 - 3^2) + 9(y^2 + 2y + 1^2 - 1^2) + 9 = 0$$

$$\mathcal{E}: 5(x-3)^2 - 45 + 9(y+1)^2 - 9 + 9 = 0$$

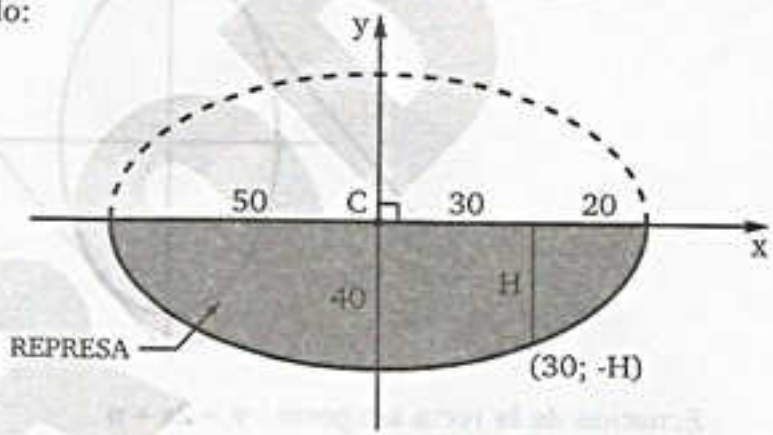
$$\mathcal{E}: 5(x-3)^2 + 9(y+1)^2 = 45$$

$$\mathcal{E}: \frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{5} = 1$$

∴ **El centro de la elipse es C: (3; −1)**

**PROBLEMA 8** Una represa de sección vertical semielíptica tiene una profundidad máxima de 40m y un ancho de 100 m en la parte superior. ¿Qué profundidad tiene la represa a una distancia de 30 m de su centro?

**Resolución:** Graficando:




C: Centro

H: Profundidad a 30 metros del centro

Eligiendo el sistema adecuado C: (0; 0)

El eje mayor es 100 y el eje menor 80:

$$\begin{cases} 2a = 100 \Rightarrow a = 50 \\ 2b = 80 \Rightarrow b = 40 \end{cases}$$

Luego la ecuación de la elipse:

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{(50)^2} + \frac{y^2}{(40)^2} = 1$$

Además: $(30; -H) \in \mathcal{E}$

Reemplazando : $\dfrac{(30)^2}{(50)^2}+\dfrac{(-H)^2}{(40)^2}=1$

$$\frac{H^2}{1600}=1-\frac{9}{25}$$

$$\frac{H^2}{1600}=\frac{16}{25}$$

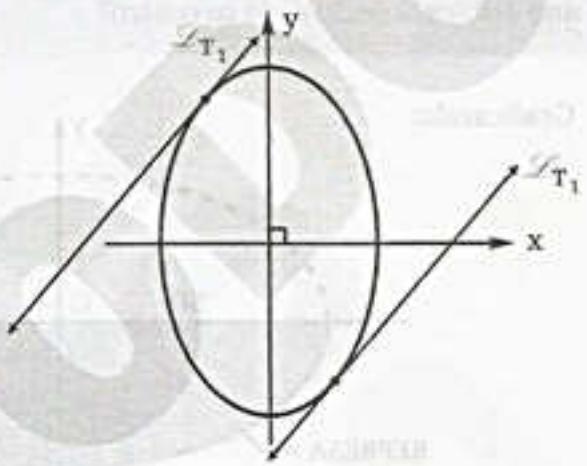
$$H^2=16^2\times 4$$

$$\therefore\ \mathbf{H=32}$$

**PROBLEMA 9** Determinar "n" para que la recta $y=2x+n$ sea tangente a la elipse.

$$\mathcal{E}:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

**Resolución:** Graficando:




Ecuación de la recta tangente : $y=2x+n$

Ecuación de la elipse : $\mathcal{E}: 9x^2+4y^2=36$

Para hallar los puntos de intersección se igualan las ecuaciones:

$$y=2x+n \quad \text{.....(1)}$$

$$9x^2+4y^2=36 \quad \text{.....(2)}$$

(1) en (2) : $9x^2+4(2x+n)^2=36$

$$25x^2+16nx+(4n^2-36)=0$$

Como lo corta en un punto entonces discriminante igual a cero:

$$(16n)^2-4\times 25(4n^2-36)=0$$

$$16^2\,.\,n^2-4\times 4\times 25(n^2-9)=0$$

$$16n^2-25(n^2-9)=0$$

$$n^2=25$$

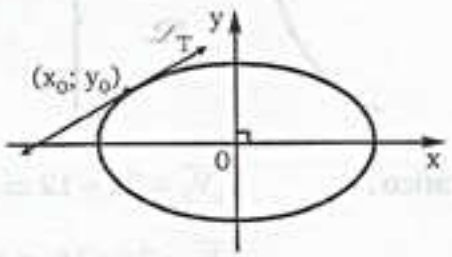
$$\therefore\ \mathbf{n=\pm 5}$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 10** Hallar le ecuación de la recta tangente a la elipse $\mathcal{E}: x^2 + 2y^2 = 8$ en el punto $(\sqrt{6}\,;\,-1)$

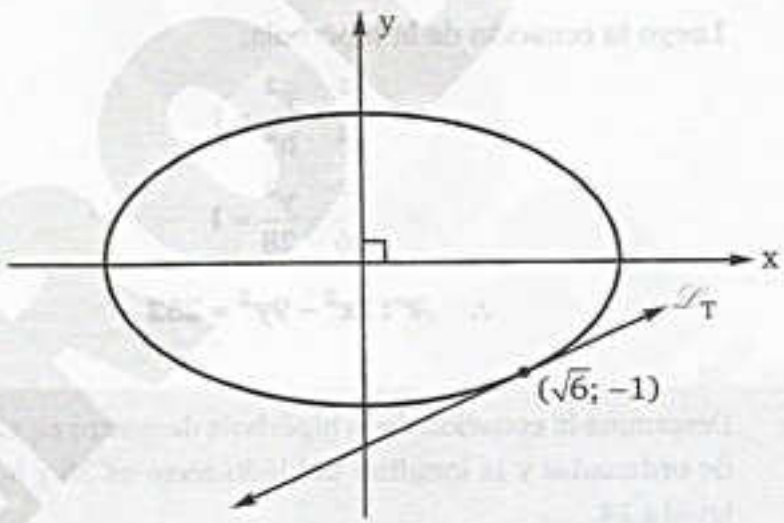
**Resolución:**

**Propiedad:**




$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\mathcal{L}_T: \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$




En el prolema : $\mathcal{E}: x^2 + 2y^2 = 8$

Luego : $\mathcal{L}_T: x_0 x + 2y_0 y = 8$

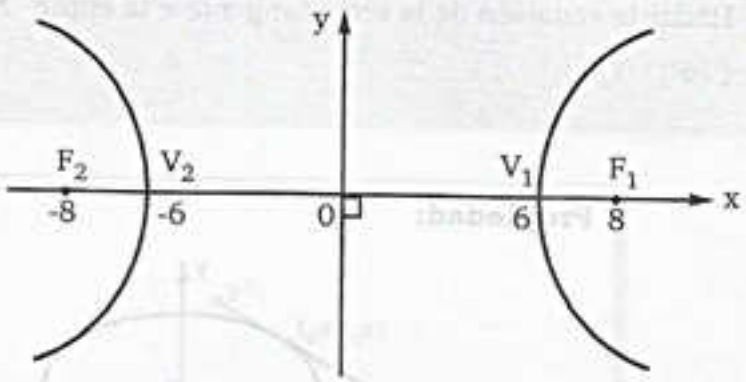
$\mathcal{L}_T: \sqrt{6}x + 2(-1)y = 8$

$\mathcal{L}_T: \sqrt{6}x - 2y - 8 = 0$

**PROBLEMA 11** Determine la ecuación de la hipérbola que satisface la condición siguiente: Centro(0; 0), un foco (8; 0), un vértice (6; 0)

team CALAPENSHKO


**Resolución:** Graficando a la hipérbola:




Del gráfico : $\overline{V_1V_2} = 2a = 12 \Rightarrow a = 6$

$\overline{F_1F_2} = 2c = 16 \Rightarrow c = 8$

Además eje focal // al eje x

$c^2 = a^2 + b^2$

$64 = 36 + b^2 \Rightarrow b^2 = 28$

Luego la ecuación de la hipérbola:

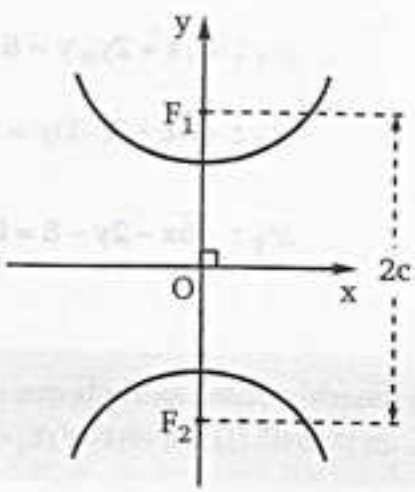
$\mathscr{H}: \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$\mathscr{H}: \dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{28} = 1$

$\therefore \quad \mathscr{H}: 7x^2 - 9y^2 = 252$

**PROBLEMA 12** Determine la ecuación de la hipérbola de centro en el origen, eje focal sobre el eje de ordenadas y la longitud del lado recto es 36 y la distancia entre los focos es igual a 24.

**Resolución:** Graficando: C(0; 0)



team CALAPENSHKO


Eje focal paralelo al eje y

Lado recto : $\frac{2b^2}{a} = 36 \Rightarrow b^2 = 18a$

Eje focal : $\overline{F_1F_2} = 2c \Rightarrow 2c = 24 \Rightarrow c = 12$

Sabemos : $c^2 = a^2 + b^2$

$12^2 = a^2 + 18a$

$a^2 + 18a - 144 = 0$

$a \quad -6 \Rightarrow a - 6 = 0$

$a \quad 24 \qquad a = 6$

Luego : $a = 6 \ \wedge \ b^2 = 108$

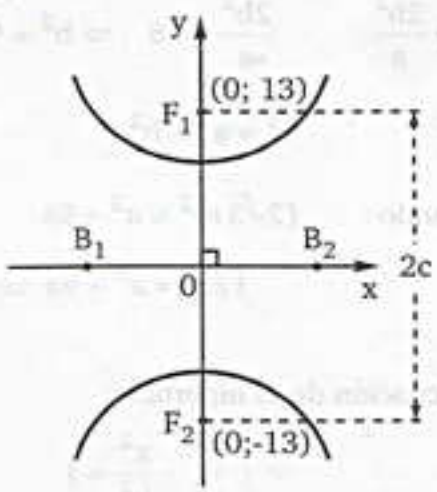
Finalmente la ecuación de la hipérbola:

$$\mathscr{H}: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore \ \mathscr{H}: \frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{108} = 1$$

**PROBLEMA 13** Determine la ecuación de la hipérbola que satisfaga la condición siguiente:
Eje normal 24; Focos $(0; \pm 13)$

**Resolución:** Graficando la hipérbola, centro: C(0; 0)




Eje focal : $\overline{F_1F_2}$

$2c = 26 \Rightarrow c = 13$

Eje normal : $\overline{B_1B_2}$

$2b = 24 \Rightarrow b = 12$

Sabemos: $c^2 = a^2 + b^2$

$13^2 = a^2 + 12^2$

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$

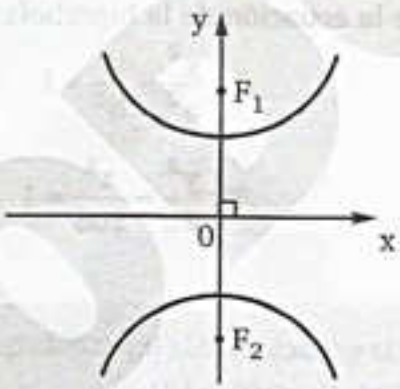
Finalmente la ecuación de la hipérbola:

$$\mathscr{H} = \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore \mathscr{H} = \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1$$

**PROBLEMA 14** Determine la ecuación de la hipérbola de centro en el origen, el eje focal sobre el eje de ordenadas y excentricidad $2\sqrt{3}$ y longitud del lado recto mide 18.

**Resolución:** Graficando la hipérbola, centro: C(0; 0)




Excentricidad "e": $e = \frac{c}{a} = 2\sqrt{3} \Rightarrow c = 2\sqrt{3}\,a$

Lado recto $\frac{2b^2}{a}$: $\frac{2b^2}{a} = 18 \Rightarrow b^2 = 9a$

Sabemos: $c^2 = a^2 + b^2$

Reemplazando: $(2\sqrt{3}\,a)^2 = a^2 + 9a$

$$12a^2 = a^2 + 9a \Rightarrow a = \frac{9}{11} \wedge b^2 = \frac{81}{11}$$

Luego la ecuación de la hipérbola:

$$\mathscr{H}: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

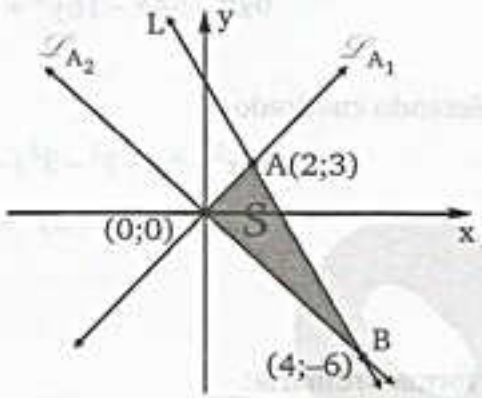
$$\mathscr{H}: \frac{y^2}{\frac{81}{121}} - \frac{x^2}{\frac{81}{11}} = 1$$

$$\therefore \mathscr{H}: 121y^2 - 11x^2 = 81$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 15** Determine el área de la región triangular limitada por las asíntotas de la hipérbola: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ y de la recta $9x+2y-24=0$

**Resolución:** Graficando las asíntotas de la hipérbola y la recta "$\mathscr{L}$"




Para hallar las ecuaciones de las asíntotas:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{y}{3}\right)^2=0$$

$$\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)=0$$

- $\mathscr{L}_{A_1}:\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=0 \Rightarrow \mathscr{L}_{A_1}: 3x=2y$
- $\mathscr{L}_{A_2}:\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=0 \Rightarrow \mathscr{L}_{A_2}: -3x=2y$

$\mathscr{L}: 9x+2y-24=0$

Para hallar las coordenadas de:

i) A: $\mathscr{L}_{A_1}: 3x=2y$

$\mathscr{L}: 9x+2y-24=0$

Desarrollando las dos ecuaciones:

$x=2 \ \wedge \ y=3$

ii) B: $\mathscr{L}_{A_2}: -3x=2y$

$\mathscr{L}: 9x+2y-24=0$

Desarrollando las dos ecuaciones:

$x=4 \ \wedge \ y=-6$

Luego: "S"

$$\begin{array}{r|cc|l} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 4 & -6 & 12 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ \hline I=-12 & 0 & 0 & D=12 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad S=\frac{|D-I|}{2}$$

$\therefore \ \mathbf{S=12\ u^2}$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 16** Siendo e la excentricidad de la hipérbola: $9x^2-16y^2-54x+64y-559=0$ y $e_1$ es la excentricidad de su conjugado. Calcular el valor de: $e+e_1$

**Resolución:** La ecuación de la hipérbola en su forma general:

$$9x^2-54x-16y^2+64y-559=0$$

Completando cuadrados:

$$9(x^2-6x+3^2-3^2)-16(y^2-4y+2^2-2^2)-559=0$$
$$9(x-3)^2-81-16(y-2)^2+64-559=0$$
$$9(x-3)^2-16(y-2)^2=576$$

En su forma ordinaria:

$$\frac{(x-3)^2}{64}-\frac{(y-2)^2}{36}=1$$

Luego: $a^2=64 \Rightarrow a=8$

$b^2=36 \Rightarrow b=6$

Sabemos: $c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c=10$

Además: $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$

La hipérbola conjugada:

$$\mathcal{H}_1: \frac{(y-2)^2}{36}-\frac{(x-3)^2}{64}=1$$

$a^2=36 \Rightarrow a=6$

$b^2=64 \Rightarrow b=8$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c=10$

Además: $e_1=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$

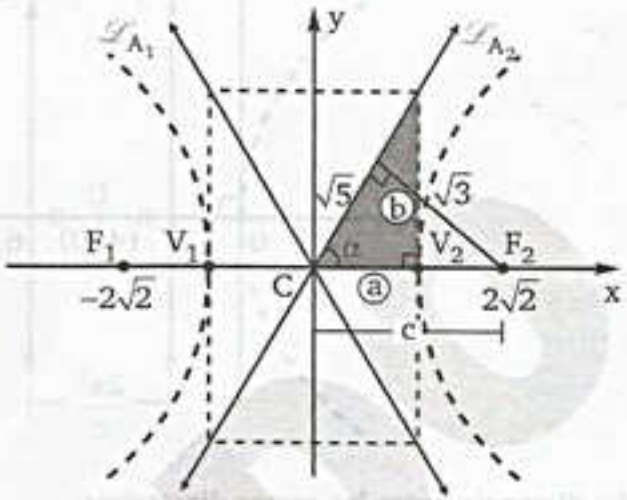
Piden: $e+e_1=\frac{5}{4}+\frac{5}{3}$

$$\therefore \quad e+e_1=\frac{35}{12}$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 17** En una hipérbola, con centro en el origen y eje transverso contenido en el eje de las abscisas, la distancia del foco $F(2\sqrt{2}; 0)$ a una de sus asíntotas es $\sqrt{3}$, determine la ecuación de dicha hipérbola.

**Resolución:** Graficando la hipérbola: C(0; 0)




Eje focal $\overline{F_1F_2}$ : $2c = 4\sqrt{2}$

$$c = 2\sqrt{2}$$

La distancia de $F_2$ a la recta $\mathcal{L}_{A_2}$ es $\sqrt{3}$

Del gráfico igualando:

$$\tan\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = \sqrt{3}k \\ a = \sqrt{5}k \end{cases}$$

Sabemos : $c^2 = a^2 + b^2$

$$(2\sqrt{2})^2 = (\sqrt{5}k)^2 + (\sqrt{3}k)^2$$

$$8 = 8k^2 \Rightarrow k = 1$$

Entonces : $a = \sqrt{5} \wedge b = \sqrt{3}$

La ecuación de la hipérbola:

$$\mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

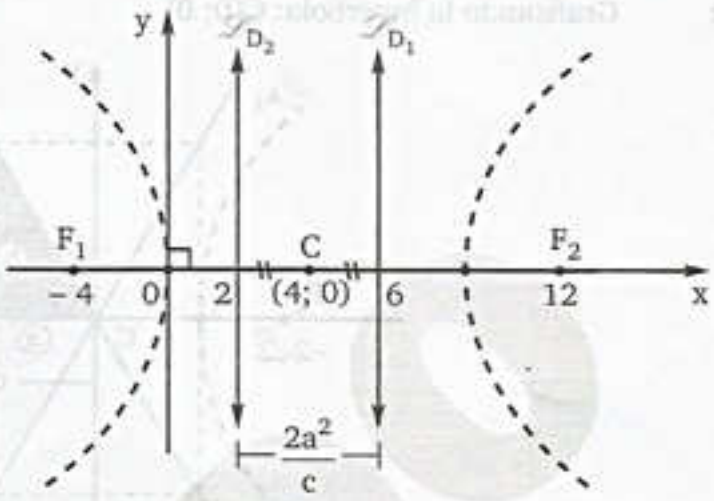
$$\therefore \mathcal{H}: \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{3} = 1$$

team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 18** Determine la ecuación de la hipérbola. Cuyas directrices son: $x = 2$ y $x = 6$ y uno de sus focos es $F(12; 0)$

**Resolución:** Graficando la hipérbola:




La distancia entre las rectas directrices:

$$\frac{2a^2}{c} = 4$$

$$a^2 = 2c \quad \text{.....(1)}$$

La distancia del centro a $F_2$ es:

$$c = 8 \quad \text{.....(2)}$$

Reemplazando (2) en (1):

$$a^2 = 2(8)$$

$$a = 4$$

Sabemos: $c^2 = a^2 + b^2$

$$8^2 = 4^2 + b^2$$

$$b^2 = 48$$

La ecuación de la hipérbola:

$$\mathscr{H}: \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\mathscr{H} = \frac{(x-4)^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1$$

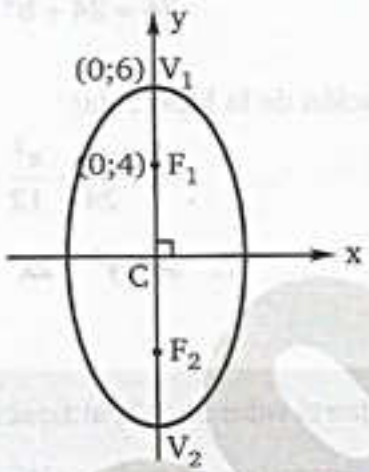
$$\therefore \quad \mathscr{H} = 3(x-4)^2 - y^2 = 48$$

twitter.com/calapenshko

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 19** Determine la ecuación de la hipérbola cuyos focos están en los vértices de la elipse $9x^2 + 5y^2 = 180$ y las directrices pasan por los focos de la elipse.

**Resolución:** Graficando la elipse:




$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{36} = 1 \; ; \quad C: (0; 0)$$

$$a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$$

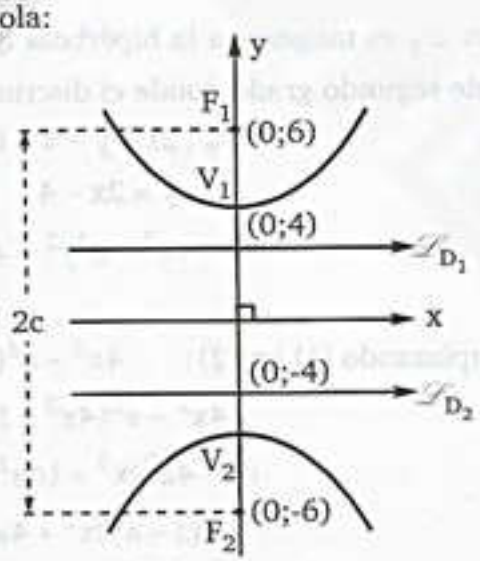
$$b^2 = 20 \Rightarrow b = 2\sqrt{5}$$

En la elipse sabemos que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$6^2 = (2\sqrt{5})^2 + c^2 \Rightarrow c = 4$$

Graficando la hipérbola:




La distancia entre las rectas directrices:

$$\frac{2a^2}{c} = 8 \Rightarrow a^2 = 4c \; \ldots\ldots\ldots(1)$$

El eje focal $\overline{F_1F_2}$ : $2c = 12 \Rightarrow c = 6$ $\ldots\ldots\ldots(2)$

Reeplazando (2) en (1):

$$a^2 = 24 \qquad \Rightarrow a = 2\sqrt{6}$$

Sabemos: $c^2 = a^2 + b^2$

$$36 = 24 + b^2 \Rightarrow b^2 = 12$$

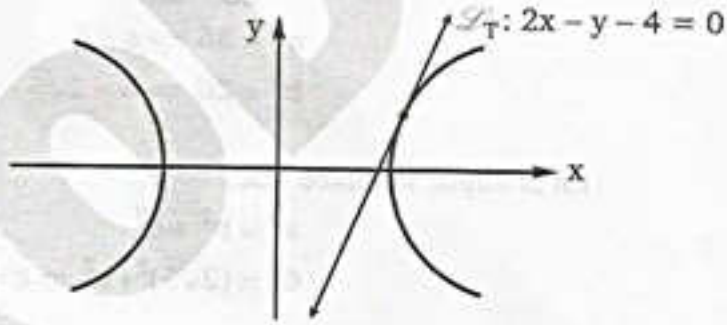
La ecuación de la hipérbola:

$$\mathscr{H}: \frac{y^2}{24} - \frac{x^2}{12} = 1$$

$$\therefore \quad \mathscr{H}: \mathbf{y^2 - 2x^2 = 24}$$

**PROBLEMA 20** Determine el valor de "a" para que la recta: $2x - y - 4 = 0$ Sea tangente a la hipérbola: $4x^2 - a^2y^2 = 4a^2$

**Resolución:** Graficando:




Como $\mathscr{L}_T$ es tangente a la hipérbola igualamos las dos ecuaciones y se forma una de segundo grado donde el discriminante es igual a 0

$$\mathscr{L}_T: 2x - y - 4 = 0$$

$$\mathscr{L}_T: y = 2x - 4 \qquad \text{.....(1)}$$

$$\mathscr{H}: 4x^2 - a^2y^2 = 4a^2 \qquad \text{.....(2)}$$

Reemplazando (1) en (2): $4x^2 - a^2(2x-4)^2 = 4a^2$

$$4x^2 - a^2(4x^2 - 16x + 16) = 4a^2$$

$$(4 - 4a^2)x^2 + 16a^2x - 20a^2 = 0$$

$$(1 - a^2)x^2 + 4a^2x - 5a^2 = 0 \quad (\Delta \text{ igual a cero})$$

$$(4a^2)^2 - 4(1 - a^2)(-5a^2) = 0$$

Efectuando: $a^2 = 5$

$$\therefore \quad \mathbf{a = \pm\sqrt{5}}$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 21** Calcular las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbolas:

$$4y^2 - 9x^2 + 36x - 8y - 68 = 0$$

**Resolución:** De : $4y^2 - 9x^2 + 36x - 8y - 68 = 0$

Lo expresamos en forma ordinaria:

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$$

Igualamos a cero el primer miembro:

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{4} = 0$$

Factorizamos: $\left(\frac{y-1}{3} + \frac{x-2}{2}\right)\left(\frac{y-1}{3} - \frac{x-2}{2}\right) = 0$

Cada factor igualando a cero:

$$\mathscr{L}_A = \frac{y-1}{3} + \frac{x-2}{2} = 0$$

$$\therefore \ \mathscr{L}_A = 3x + 2y - 8 = 0$$

$$\mathscr{L}'_A = \frac{y-1}{3} - \frac{x-2}{2} = 0$$

$$\therefore \ \mathscr{L}'_A = 3x - 2y - 4 = 0$$

**PROBLEMA 22** Determine la ecuación de la hipérbola cuyos focos están en los vértices de la elipse: $9x^2 + 5y^2 = 180$
y las directrices pasan por los focos de la elipse.

**Resolución:**

$$9x^2 + 5y^2 = 180$$

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{36} = 1$$

Tiene la forma : $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

Entonces : $b^2 = 20$ y $a^2 = 36$

**A todo el público en general:**

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

**Este libro no debe ser prostituito monetariamente**, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

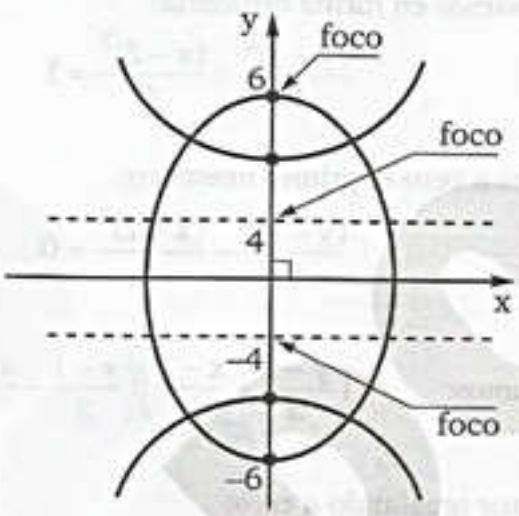
Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

**28 de agosto del 2020**

team CALAPENSHKO


Pero :
$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c^2 = 36 - 20$$
$$c^2 = 16$$
$$\rightarrow \quad c = \pm 4$$

Esto determina que los focos de la elipse están en el eje "y".




La hipérbola tiene por ecuación de la forma:
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Donde :
$$c = 6$$

Del gráfico, la distancia entre las directrices es:
$$\frac{2a^2}{c} = 8$$
$$a^2 = 4(6)$$
$$\rightarrow \quad a^2 = 24$$

Pero :
$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$\rightarrow \quad b^2 = c^2 - a^2$$
$$b^2 = 36 - 24$$
$$b^2 = 12$$

Reemplazando en la ecuación de la hipérbola:
$$\frac{y^2}{24} - \frac{x^2}{12} = 1$$

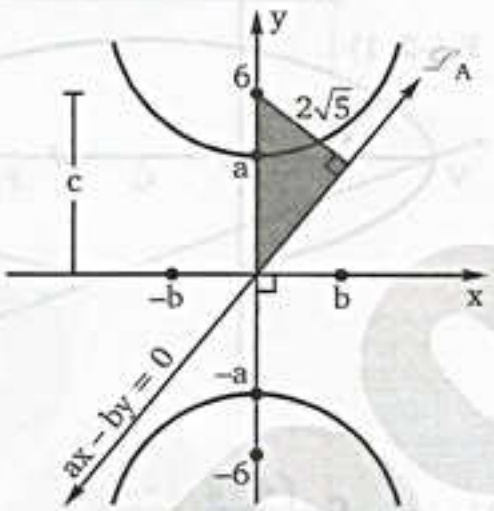
$$\therefore \quad \mathbf{y^2 - 2x^2 = 24}$$

team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 23** Determine la ecuación de la hipérbola con centro en el origen y eje conjugada sobre el eje x, si la distancia de uno de sus focos (0; 6) a cualquiera de sus asíntotas es $2\sqrt{5}$.

**Resolución:**




La ecuación es de la forma:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

Del gráfico : $c=6 \rightarrow c^2=36$

También :
$$2\sqrt{5}=\frac{|a(0)-b(6)|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$2\sqrt{5}.\underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{c}=6|b|$$

$$2\sqrt{5}.6=6|b|$$

$$|b|=2\sqrt{5}$$

$$b=\pm 2\sqrt{5} \rightarrow b^2=20$$

Además :
$$a^2+b^2=c^2$$

$$a^2=c^2-b^2$$

$$a^2=36-20 \rightarrow a^2=16$$

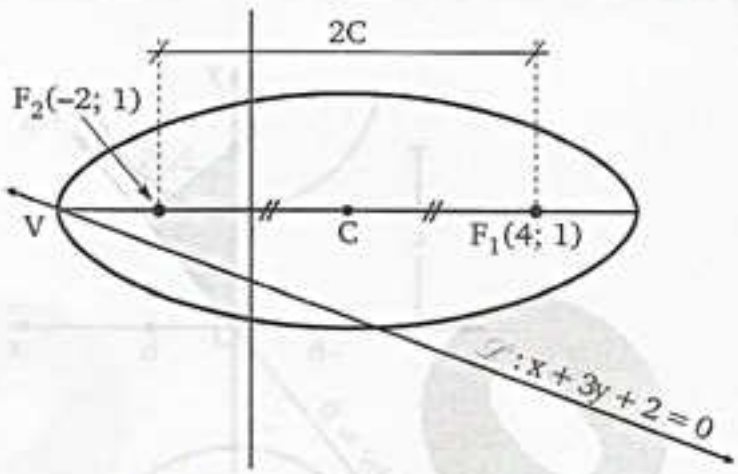
Reemplazando en la ecuación:

$$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{20}=1$$

$$\therefore \quad 5y^2-4x^2=80$$

**PROBLEMA 24** Los focos de una elipse son $F_1 = (4; 1)$ y $F_2(-2; 1)$. Determine la ecuación de la elipse si uno de sus vértices está en la recta $\mathscr{L}: x + 3y + 2 = 0$

**Resolución:**




Del gráfico : $C = \left(\frac{4-2}{2}; \frac{1+1}{2}\right)$

$C = (1; 1)$

$\Rightarrow (h; k) = (1; 1) \quad \begin{cases} h = 1 \\ k = 1 \end{cases}$

También : $2c = |4 - (-2)|$

$2c = |6| \quad \rightarrow c = 3$

La ecuación de la elipse es de la forma :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

El vértice : $V = (h; 1) \in \mathscr{L}$

$\Rightarrow h + 3(1) + 2 = 0 \rightarrow h = -5$

Luego : $V = (-5; 1)$

Reemplazamos en la ecuación de la elipse :

$$\frac{(-5-1)^2}{a^2} + \frac{(1-1)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{36}{a^2} + \frac{0}{b^2} = 1 \rightarrow a^2 = 36 \quad \text{.....(1)}$$

Además: $a^2 = b^2 + 3^2 \rightarrow b^2 = 27 \quad \text{.....(2)}$

$$\therefore \mathcal{E} = \frac{(x-1)^2}{36} + \frac{(y-1)^2}{27} = 1$$

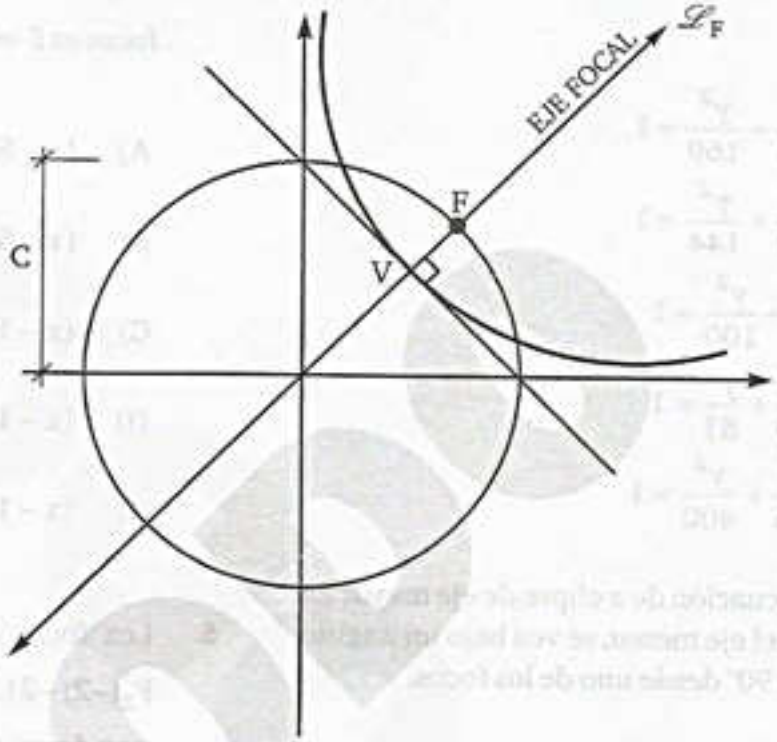
team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 25** Siendo la ecuación de la hipérbola:

$$xy = 20$$

Determine la distancia entre los focos.

**Resolución:**




Coordenadas del vértice: V(a;a)

Pero : $a^2 = 20 \quad \rightarrow \quad a = 2\sqrt{5} \quad \therefore \quad V = (2\sqrt{5}; 2\sqrt{5})$

Recta perpendicular al eje focal con V:

$$y = -x + 4\sqrt{5}$$

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 4\sqrt{5}$$

Pero : $Y = C = 4\sqrt{5}$

$$\therefore \quad 2C = 8\sqrt{5}$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS

**1.** Deducir la ecuación de una elipse con centro en el origen de coordenadas, que tiene un vértice en (13; 0) y un foco en (5; 0).

A) $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{169}=1$

B) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$

C) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{100}=1$

D) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{81}=1$

E) $\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{400}=1$

**2.** Halle la ecuación de a elipse de eje mayor 2a en la que el eje menor, se vea bajo un ángulo que mide 90° desde uno de los focos.

A) $x^2+y^2=a^2$

B) $2y^2+x^2=a^2$

C) $4y^2+x^2=a^2$

D) $x^2+2y^2=2a^2$

E) $4y^2+x^2=2a^2$

**3.** Los focos de una elipse son los puntos (–2; 3) y (6; 3) y uno de sus vértices es el punto (8; 3), halle su ecuación.

A) $\frac{(x+2)^2}{36}+\frac{(y-3)^2}{20}=1$

B) $\frac{(x-2)^2}{36}+\frac{(y+3)^2}{20}=1$

C) $\frac{(x+2)^2}{36}+\frac{(y-3)^2}{20}=1$

D) $\frac{(x-2)^2}{20}+\frac{(y+3)^2}{36}=1$

E) $\frac{(x-2)^2}{20}+\frac{(y-3)^2}{36}=1$

**4.** Halle la ecuación y la excentricidad de la elipse cuyas directrices son las rectas $\mathscr{L}_1: x-1=0$ y $\mathscr{L}_2: x-9=0$, uno de sus focos es F = (7; 0).

A) $(x-5)^2+2y^2=8$ ; $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$

B) $(x-5)^2+2(y-1)^2=8$ ; $e=\frac{\sqrt{2}}{4}$

C) $(x-1)^2+2y^2=1$ ; $e=\frac{\sqrt{2}}{8}$

D) $(x-1)^2+2(y-1)^2=1$ ; $e=\frac{\sqrt{2}}{3}$

E) $(x-1)^2+2(y+1)^2=1$ ; $e=\frac{\sqrt{2}}{5}$

**5.** Los focos de una elipse son $F_1(4; -2)$ y $F_2(-2; -2)$. Halle la ecuación de la elipse si uno de sus vértices está sobre la recta:

$\mathscr{L}: x-y-8=0$

A) $\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{16}=1$

B) $\frac{(x+1)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{25}=1$

C) $\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$

D) $\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$

E) $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$

**6.** En la elipse de ecuación $9x^2+16y^2=576$ se inscribe un cuadrado, halle la suma de las coordenadas de uno de sus vértices del cuadrado.

A) –15 B) –12,5 C) –9,6
D) –8,4 E) –4,5

team CALAPENSHKO


**7.** Desde el punto (0; 9) se traza una recta tangente a la elipse $2x^2 + y^2 = 9$. Halle la intersección de esta recta tangente con la parte positiva del eje x.

A) $\frac{7}{4}$ B) $\frac{9}{4}$ C) 2
D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{5}{3}$

**8.** Sea la elipse cuya ecuación es: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Halle el área de la región cuadrada inscrita a la elipse.

A) $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ B) $\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$ C) $\frac{3a^2b}{a^2+b^2}$
D) $\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$ E) $\frac{6a^2b^2}{a^2+b^2}$

**9.** Determine la distancia de la recta $4x + 3y - 12 = 0$ al foco mas cercano de la elipse $9y^2 + 13x^2 = 13$.

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2
D) $\frac{5}{2}$ E) 3

**10.** Sea la ecuación de la elipse $x^2 + 4y^2 = 20$ y la recta $\mathscr{L}$: $2x - 2y - 13 = 0$. Halle las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse y perpendiculares a la recta $\mathscr{L}$.

A) $x + y + 5 = 0$, $x + y - 5 = 0$
B) $x + y + 7 = 0$, $x + y - 7 = 0$
C) $x - y + 5 = 0$, $x - y - 5 = 0$
D) $x - y + 7 = 0$, $x - y - 7 = 0$
E) $x + y + 9 = 0$, $x + y - 9 = 0$

**11.** Se tiene un triángulo rectángulo ABC recto en B en el cual $m\angle CAB = 30°$. Si A(2; 5); B(8; 5) hallar la ecuación de la elipse cuyos focos son A y B y pasa por C.

A) $\frac{(x-5)^2}{3} + \frac{(y-5)^2}{2} = 1$
B) $\frac{(x-2)^2}{27} + \frac{(y-5)^2}{9} = 1$
C) $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-5)^2}{9} = 1$
D) $\frac{(x-5)^2}{18} + \frac{(y-5)^2}{27} = 1$
E) $\frac{(x-5)^2}{27} + \frac{(y-5)^2}{18} = 1$

**12.** Sobre la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{81} = 1$ se ubica el punto P cuya distancia al centro es 5. Hallar la diferencia entre las distancias de P a los focos.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 8

**13.** Hallar la longitud de la mayor cuerda de la elipse:

$$4x^2 + 9y^2 - 8x + 18y = 23$$

A) 3 B) 4 C) 8
D) 9 E) 12

**14.** Hallar la excentricidad de la elipse que pasa por el punto $\left(3; \frac{6\sqrt{6}}{5}\right)$ y cuyos focos son los puntos (–2; 0) y (6; 0)

A) 0,6 B) 0,8 C) 0,75
D) 0,4 E) 0,5

**A todo el público en general:**

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

**Este libro no debe ser prostituito monetariamente**, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

**28 de agosto del 2020**

**15.** Se tienen dos elipses que tienen los mismos focos, los cuales están sobre el eje x. Si la diferencia entre sus ejes menores es 14 y sus excentricidades son 0,6 y 0,8 hallar el eje mayor de una de las elipses.

A) 20 B) 10 C) 60
D) 45 E) 40

**16.** Hallar la ecuación de la elipse que tiene por focos a los puntos (2; 8), (10; 8) y es tangente a la recta $x + y = 20$.

A) $\frac{(x-3)^2}{13} + \frac{(y-4)^2}{5} = 1$

B) $\frac{(x-6)^2}{26} + \frac{(y-8)^2}{10} = 1$

C) $\frac{(x-6)^2}{13} + \frac{(y-8)^2}{5} = 1$

D) $\frac{(x-6)^2}{39} + \frac{(y-8)^2}{23} = 1$

E) $\frac{(x-6)^2}{10} + \frac{(y-8)^2}{26} = 1$

**17.** Sea (a; b) un punto sobre la elipse $x^2 + 5y^2 = 20$, desde el cual se ve al segmento que une los focos bajo un ángulo recto. Calcular el valor de: $a^2 + 2b^2$.

A) 24 B) 22 C) 29
D) 31 E) 37

**18.** Hallar la suma de las ordenadas de todos los puntos de la elipse $x^2 + 5y^2 = 16$ desde los cuales se ve al segmento que une a los focos bajo un ángulo que mide 80°.

A) –8 B) –4 C) 0
D) 4 E) 2

**19.** Hallar la ordenada de uno de los puntos de la elipse $x^2 + 4y^2 = 1$ desde el cual se ve al segmento que une los focos bajo un ángulo que mide 60°.

A) $\frac{2}{3}$ B) –2 C) $\frac{4}{3}$
D) $\frac{5}{3}$ E) $-\frac{4}{3}$

**20.** Hallar el área de la región interior a la elipse $4x^2 + 7y^2 = 84$ y exterior a la máxima circunferencia inscrita en dicha elipse.

A) $3\pi(\sqrt{7} - 2)$ B) $8\pi$
C) $6\pi(\sqrt{7} - 2)$
D) $3\pi(\sqrt{7} + 1)$ E) $6\pi$

**21.** Hallar el área de la región interior a una elipse que está inscrita en un rectángulo de área S.

A) $\pi S$ B) $\frac{\pi}{4}S$ C) $\frac{\pi}{2}S$
D) $\frac{\pi}{8}S$ E) $\frac{\pi}{3}S$

**22.** Hallar la ecuación de la elipse que tiene por vértices a los puntos (–a; 0), (0; a) y cuyo lado recto mide 2b.

A) $ax^2 + by^2 = a^2b^2$
B) $bx^2 + ay^2 = ab$
C) $ax^2 + b^2y^2 = ab$
D) $ax^2 + by^2 = a^2b$
E) $bx^2 + ay^2 = a^2b$

**23.** Halle la ecuación de la hipérbola que pasa por los puntos A(3; –2) y B(7; –6), tiene su centro en el origen y el eje transverso coincide con el eje x.

A) $\frac{x^2}{4} - \frac{5y^2}{16} = 1$ B) $\frac{x^2}{4} - \frac{16^2}{5} = 1$

C) $\frac{x^4}{4} - \frac{3y^2}{16} = 1$

D) $\frac{x^2}{25} - \frac{2y^2}{144} = 1$ E) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$

**24.** Los focos de una hipérbola son (–3; 0) y (3; 0) teniendo sus vértices las coordenadas de (–2; 0) y (2; 0), halle la ecuación de su asíntota cuya pendiente es positiva.

A) $y=\frac{\sqrt{5}}{3}x$ B) $y=\frac{\sqrt{5}}{2}x$ C) $y=\frac{2}{\sqrt{5}}x$
D) $y=\frac{2}{3}x$ E) $y=\frac{3}{2}x$

**25.** Halle las ecuaciones de las asíntotas de la curva $144x^2-25y^2=3600$.

A) $2x\pm15y=0$ B) $5x\pm12y=0$
C) $12x\pm5y=0$
D) $12x\pm y=0$ E) $15x\pm7y=0$

**26.** Una asíntota de una hipérbola es $y=\frac{4}{3}x$, el eje focal es el eje "y" y un foco está en el punto (0 ; –10). Halle la ecuación cartesiana de esta hipérbola.

A) $9y^2-16x^2=576$
B) $16y^2-9x^2=576$
C) $8y^2-4x^2=228$
D) $9y^2-16x^2=584$
E) $12y^2-9x^2=636$

**27.** Halle la ecuación de la recta que es asíntota a $\mathcal{H}: 9x^2-4y^2=36$

A) $y=3x$ B) $y=-3x$ C) $2x=-3y$
D) $y=\frac{3}{2}x$ E) $3x=4y$

**28.** Un punto P(x; y) está a igual distancia del punto (4; 0) que de la circunferencia $x^2+y^2=4$, entonces P pertenece a una:

A) Recta B) Circunferencia
C) Parábola
D) Elipse E) Hipérbola

**29.** Halle la ecuación de una hipérbola cuyas asíntotas son $y=\pm\frac{5}{3}x$ y pasa por el punto (2; –5)

A) $\frac{3y^2}{5}-\frac{4x^2}{7}=1$ B) $\frac{9y^2}{125}-\frac{x^2}{4}=1$
C) $\frac{5y^2}{9}-\frac{x^2}{125}=1$
D) $\frac{9y^2}{125}-\frac{5y^2}{144}=1$ E) $\frac{9y^2}{125}-\frac{x^2}{5}=1$

**30.** Los focos de la elipse $\frac{(x-1)^2}{8}+\frac{(y-4)^2}{14}=1$, son los vértices de una hipérbola y a su vez los focos de ésta última coincide con los vértice de la elipse. Halle la ecuación de la hipérbola.

A) $\frac{(y-2)^2}{6}-\frac{(x-1)^2}{8}=1$
B) $\frac{(y-4)^2}{6}-\frac{(x-1)^2}{8}=1$
C) $\frac{(y-4)^2}{8}-\frac{(x-1)^2}{6}=1$
D) $\frac{(y-4)^2}{8}-\frac{(x+1)^2}{6}=1$
E) $\frac{(y-2)^2}{8}-\frac{(x-1)^2}{6}=1$

**31.** Halle la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ tiene excentricidad de $\frac{3}{2}$ y la directriz $x=\pm\frac{4}{3}$

A) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$ B) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}=1$
C) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$
D) $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$ E) $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{7}=1$

**32.** En una hipérbola, con centro en el origen y el eje transversal contenido en el eje de las abscisas, la distancia del foco $F(2\sqrt{3}; 0)$ a una de sus asíntotas es $\sqrt{3}$. Halle la ecuación de dicha hipérbola.

A) $3x^2-y^2=0$ B) $2x^2-3y^2=8$
C) $x^2-y^2=8$
D) $x^2-2y^2=8$ E) $x^2-3y^2=9$

**33.** Sea la hipérbola cuya ecuación es: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Halle la distancia del foco de la hipérbola a una de las rectas asíntotas.

A) a B) b C) c
D) $\frac{bc}{a}$ E) $\frac{ab}{c}$

**34.** La ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ tiene excentricidad de $\frac{3}{2}$ y directriz $x=\pm\frac{4}{3}$ Hallar el valor de $a^2+b^2$.

A) 4 B) 5 C) 7
D) 9 E) 11

**35.** Halle la ecuación de una hipérbola con centro en el origen de coordenadas, focos sobre el eje y, lado recto de $\frac{16}{3}$ y la pendiente de una de sus asíntotas es $\frac{3}{4}$.

A) $16y^2-9x^2=36$
B) $9y^2-3x^2=36$
C) $16x^2-9y^2=36$
D) $9x^2-3y^2=36$
E) $16x^2-3y^2=36$

**36.** Dado el punto M(a; 10) de la hipérbola $-\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{80}=1$ hallar la ecuación de la recta que contiene a un radio focal del punto M. $(a<0)$

A) $x+y+1=0$ B) $\sqrt{5}x+y+10=0$
C) $2\sqrt{5}x-y+8=0$
D) $y=5$ E) $y-10=0$

**37.** Determinar un punto en la hipérbola $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ cuya distancia al foco derecho es 2,25.

A) (4; 2,25) B) (5; 2,25) C) (4,5; 5)
D) (10; 4,5) E) (10; 9)

**38.** Hallar la ecuación de la hipérbola cuyos focos coinciden con los focos de la elipse $\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{18}=1$ si su excentricidad es $e=2$.

A) $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{24}=1$ B) $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{9}=1$
C) $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{36}=1$
D) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{24}=1$ E) $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{16}=1$

**39.** Hallar la ecuación de la hipérbola, si se conoce su excentricidad $e=\frac{5}{3}$, el foco F(0; 20) y la ecuación de la directriz correspondiente $5y-36=0$.

A) $\frac{x^2}{254}-\frac{y^2}{144}=1$ B) $\frac{x^2}{128}-\frac{y^2}{72}=-1$
C) $\frac{x^2}{256}-\frac{y^2}{144}=-1$
D) $\frac{x^2}{256}-\frac{y^2}{144}=1$ E) $\frac{x^2}{256}-\frac{y^2}{169}$

team CALAPENSHKO



**40.** Hallar la ecuación de uno de los lados de cuadrilátero determinado por los puntos de intersección de las curvas

$$\frac{x^2}{80}+\frac{y^2}{20}=1 \text{ y } \frac{x^2}{48}-\frac{y^2}{12}=1$$

A) $x=1$ B) $x=4$ C) $x=-8$
D) $x=3$ E) $x=6$

**41.** Se da la hipérbola $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$ y una tangente cualquiera a ella; P es el punto de intersección de la tangente y el eje x; M es la proyección del punto de tangencia sobre el mismo eje. Calcular el valor de: $OM \times OP$

A) 25 B) 20 C) 32
D) 50 E) 16

**42.** La distancia desde un foco de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{36}=1$ a una recta tangente es 4; Hallar la distancia desde el otro foco a la misma recta.

A) 8 B) 12 C) 9
D) 16 E) 6

**43.** La recta $2x-y-2=0$ es tangente a una hipérbola cuyos focos son $\left(-\frac{3}{2};0\right)$ y $\left(\frac{3}{2};0\right)$

Hallar la ecuación de esta hipérbola.

A) $\frac{4x^2}{5}-y^2=1$ B) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

C) $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{5}=1$

D) $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$ E) $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{10}=1$

**44.** Hallar la ecuación de la hipérbola cuyos focos están situados en el eje de abscisas y son simétricos con respecto al origen si se sabe que es tangente a la recta $15x+16y-18=0$ y la distancia entre sus vértices es 4.

A) $\frac{x^2}{4}-\frac{4y^2}{9}=1$ B) $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=1$

C) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$

D) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ E) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$

**45.** Se tienen una hipérbola y una elipse que tienen los mismos focos. hallar el valor del ángulo de las rectas tangentes a estas curvas en uno de sus puntos de intersección.

A) 45° B) 120° C) 90°
D) 150° E) 105°

**46.** Sea L la longitud de la elipse:

$$16x^2+144y^2=9$$

Calcular $[\![L]\!]$

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

**47.** Hallar el área de la región exterior a la elipse $x^2+9y^2=1$ e interior a la menor circunferencia circunscrita a dicha elipse.

A) $5\pi$ B) $6\pi$ C) $7\pi$
D) $8\pi$ E) $9\pi$

**48.** Sea L la longitud de la elipse $3x^2+4y^2=12$, hallar el primer dígito de la parte entera de L.

A) 3 B) 2 C) 1
D) 0 E) 4

team CALAPENSHKO



**49.** Sea F el foco de una hipérbola, $\mathscr{L}$ la directriz correspondiente y M un punto cualquiera de la curva. Por M se traza una paralela a una de las asíntotas, esta paralela interseca a $\mathscr{L}$ en B. Si FM = 4, hallar el valor de: BM.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

**50.** Sea C el centro de una hipérbola, por un punto A de la curva se trazan las rectas $\overrightarrow{m}$ y $\overleftarrow{n}$ paralelas a las asíntotas. Un diámetro cualquiera de la hipérbola interseca a la curva en P y P', y a las recta $\overrightarrow{m}$ y $\overrightarrow{n}$ en A y D. Si: CA = 4 y CD = 9, hallar el valor de: CP.

A) 0 B) 9 C) 3
D) 12 E) 6

team CALAPENSHKO

Capítulo 20

# Números Complejos Aplicados a la Trigonometría

**CAPACIDADES**

- Establecer la correspondencia entre los números complejos y pares ordenados.
- Representar gráficamente los números complejos en el plano.
- Efectuar operaciones y demostraciones usando números complejos

## BOMBELLI Y SU ESTUDIO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Rafael Bombelli nació en enero de 1526 en Bolonia (Italia), no recibió una educación universitaria, sino que adquirió su formación con el ingeniero y arquitecto Pier Francesco Clementi. El propio Bombelli eligió la profesión de ingeniero y arquitecto, trabajando para Rufini, un noble romano que llegaría a obispo de Melfi. No se sabe exactamente como adquirió Bombelli su interés por las matemáticas, probablemente el motivo fue que vivía en la región de Italia donde se desarrollaban los desafíos matemáticos entre Cardano , Tartaglia y otros , con el fin de resolver ecuaciones.

BOMBELLI, PRECURSOR DE LA TEORÍA DE COMPLEJOS

En una de sus visitas a Roma , Bombelli hizo una gran descubrimiento matemático. Antonio María Pazzi, profesor de matemáticas en la universidad de Roma, le enseñó a Bombelli un manuscrito de la Aritmética de Diofanto y los dos decidieron hacer conjuntamente una traducción del mismo. A pesar de que nunca llegaron a completar la traducción, Bombelli, a la luz del texto de Diofanto comenzó a revisar sus conocimientos de álgebra.

La obra de Bombelli titulada "Álgebra" está dividida en cinco libros. Los tres primeros fueron publicados en 1572, y anunciaba que los libros IV y V , dedicados a la geometría, aparecerían seguidamente. Desgraciadamente Bombelli nunca llegó a publicar estos volúmenes porque la muerte se lo impidió. Además de una versión manuscrita de los tres libros ya publicados, había un manuscrito inconcluso de los otros dos libros. La geometría incompleta de Bombelli fue publicada en 1929, y en ella se aprecia una influencia de los procedimientos geométricos de Omar Khayyam.

En el Álgebra de Bombelli se dan las reglas de los signos, que aún hoy dan tantos problemas a los estudiantes, para operar con números positivos y negativos. Además fue el primero que escribió las reglas para la suma, resta y multiplicación de los números complejos. Además demostró que usando el cálculo de los números complejos podían resolverse ecuaciones. Bombelli usó una notación muy sofisticada para su tiempo. Es justo reconocer a Bombelli como el inventor de los números complejos y su Algebra tuvo una influencia capital en Leibniz.

Bombelli, un ingeniero, hizo un uso práctico de los números complejos porque dichos números le daban resultados útiles. El Álgebra de Bombelli es uno de los más importantes trabajos matemáticos del siglo XVI, y fue el único que dio importancia a los números complejos cuándo aún nadie se la daba.

team CALAPENSHKO



## INTRODUCCIÓN

Los números complejos por sí solo tienen gran importancia como tema de estudio en las matemáticas modernas, así por ejemplo, si queremos resolver la ecuación: $x^2 + 9 = 0$ nos lleva a encontrar raíces que no son reales, por lo cuál el estudio de dichas raíces corresponden al campo de los números complejos.

# NÚMEROS COMPLEJOS APLICADOS A LA TRIGONOMETRÍA

## DEFINICIÓN

Un número complejo Z es el par ordenado (a; b) de componentes reales a y b, donde:

a: Parte real del número complejo Z ($a = \mathbb{R}e\ (Z)$).

b: Parte imaginaria del número complejo Z ($b = \mathbb{I}m\ (Z)$)

Considerando a los números complejos

$Z_1 = (a; b) \wedge Z_2 = (c; d)$

Se verifica: $Z_1 + Z_2 = (a; b) + (c; d) = (a + c; b + d)$

$Z_1 \cdot Z_2 = (a; b) \cdot (c; d) = (ac - bd; ad + bc)$

**NOTA**

(x; 0): es un número real.
(0; y): es un número imaginario puro si $y \neq 0$.

En un caso particular:

Sea $i = (0; 1)$

$\Rightarrow \quad i \cdot i = (0; 1) \cdot (0; 1) = (-1; 0)$

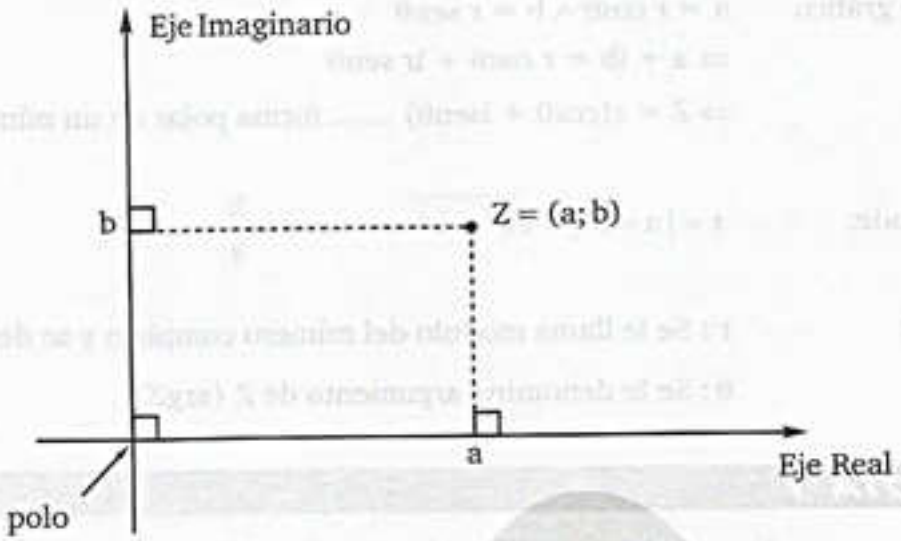
$\therefore \quad i^2 = -1$

A "i" se le denomina unidad imaginaria y convencionalmente: $i = \sqrt{-1}$

## REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Sea Z = (a; b), éste representa un punto, llamado afijo, en el plano complejo (también llamado plano de Gauss), así.

team CALAPENSHKO

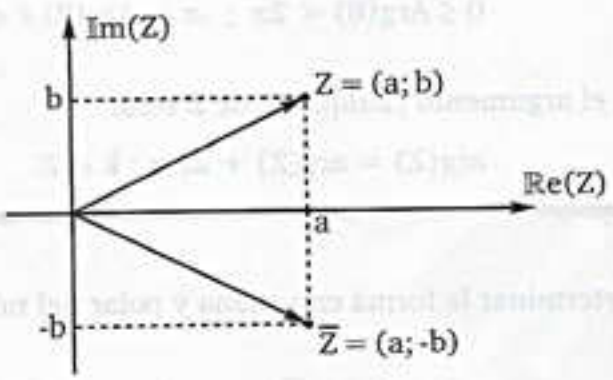




Luego: $Z = (a; b) = \underbrace{a + bi}$

Representación cartesiano de un número complejo.

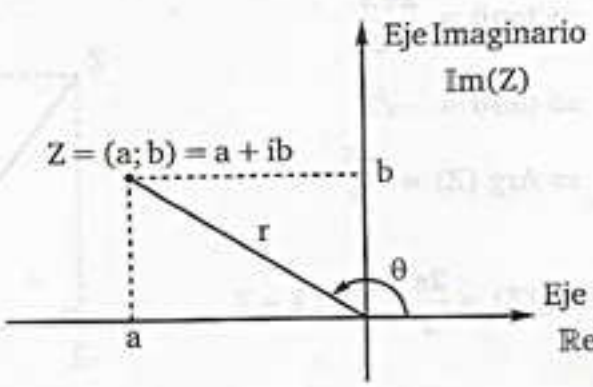
**NOTA**

Al conjugado de un número complejo $Z = (a; b) = a + ib$ se denota por $\overline{Z}$ y se define por $\overline{Z} = (a; -b) = a - ib$ que geométricamente representa el punto simétrico de Z respecto al eje real.




## FORMA POLAR O TRIGONOMÉTRICA DE UN NÚMERO COMPLEJO

Considerando el complejo $Z = (a; b) / Z \neq 0$, tenemos:



team CALAPENSHKO


Del gráfico $a = r\cos\theta \wedge b = r\,\text{sen}\theta$

$\Rightarrow a + ib = r\cos\theta + ir\,\text{sen}\theta$

$\Rightarrow Z = r(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$ ..... forma polar de un número complejo

Donde: $r = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} \wedge \tan\theta = \dfrac{b}{a}$

Así:

r : Se le llama modulo del número complejo y se denota por mod(Z) ó $|Z|$

θ : Se le denomina argumento de Z (argZ)

**NOTA 1**

La notación: $Z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta)$

es frecuente expresarla por: $Z = r\,\text{cis}\theta$

**NOTA 2**

El valor del ángulo θ asociado al número Z no es único, porque al sumarle $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), el ángulo de valor $\theta + 2k\pi$ también será argumento de Z, luego consideramos al argumento principal de Z a Arg(Z) así:

$$0 \le \text{Arg}(\theta) < 2\pi \;;\; -\pi < \text{Arg}(Z) \le \pi$$

En consecuencia, el argumento cualquiera de Z será:

$$\arg(Z) = \arg(Z) + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$$

**Ejemplo:** Determinar la forma cartesiana y polar del número complejo $Z = (-2; 2\sqrt{3})$

**Resolución:** $Z = -2 + 2\sqrt{3}\,i$ ..... forma cartesiana

$\Rightarrow r = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$

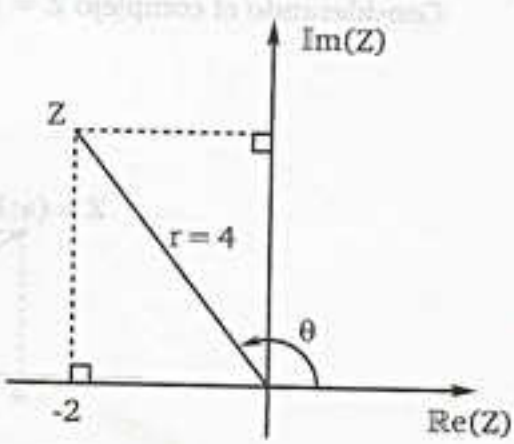
Sea θ el argumento de Z

$\Rightarrow \tan\theta = \dfrac{2\sqrt{3}}{-2}$

$\Rightarrow \tan\theta = -\sqrt{3}$

$\Rightarrow \text{Arg}(Z) = \dfrac{2\pi}{3}$

En general: $\arg(Z) = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi;\; k \in \mathbb{Z}$



team CALAPENSHKO


Finalmente: $Z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$

También: $Z = 4\text{cis}\frac{2\pi}{3}$

## FORMA EXPONENCIAL DE UN NÚMERO COMPLEJO

El matemático EULER expreso al número complejo $Z = r(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$

Así: $\boxed{Z = r\,e^{i\theta}}$ ..... forma exponencial

Donde $e = 2{,}71828$ ..... base de los logaritmos naturales

Entonces: $Z = \underbrace{re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\text{sen}\theta)}$

$$\Rightarrow e^{i\theta} = \cos\theta + i\text{sen}\theta \ldots\ldots(*)$$

Por leyes de exponentes sabemos:

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

Luego usando (*) tenemos:

$$\boxed{(\cos\theta + i\text{sen}\theta)^n = \cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta)} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Esta última igualdad se conoce como el teorema de De Moivre, nombrada así por Abraham de De Moivre

**OBSERVACIÓN**

En la actualidad la fórmula mostrada anteriormente es válida para cualquier entero "n".

**Ejemplo:** Hallar la parte real e imaginaria de:

$$Z = (3\sqrt{3} + 3i)^5$$

**Resolución:** Sea $w = 3\sqrt{3} + 3i$

$$\Rightarrow r = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 3^2} \ \wedge \ \text{tg}\theta = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow r = 6 \ \wedge \ \theta = \frac{\pi}{6}$$

Luego: $w = 6\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$

**A todo el público en general:**

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

**Este libro no debe ser prostituito monetariamente**, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

**28 de agosto del 2020**

$$\Rightarrow Z = w^5$$

$$Z = 6^5\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)^5$$

Usando el teorema de Demoivre:

$$Z = 6^5\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$Z = 6^5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\ \text{Re}(Z) = -3888\sqrt{3}\ \wedge\ \text{Im}(Z) = 3888$$

## GRAFICO DE REGIONES

Sea $Z = x + iy$, expresando en su forma polar tenemos:

$$Z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta)\ ;\ Z \neq 0$$

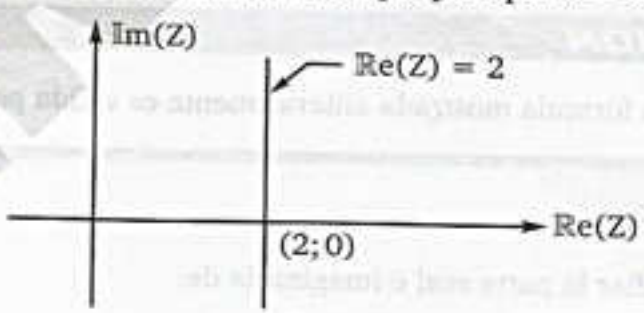
Así: $x = \text{Re}(Z)\ ;\ y = \text{Im}(Z)$

Graficar las regiones:

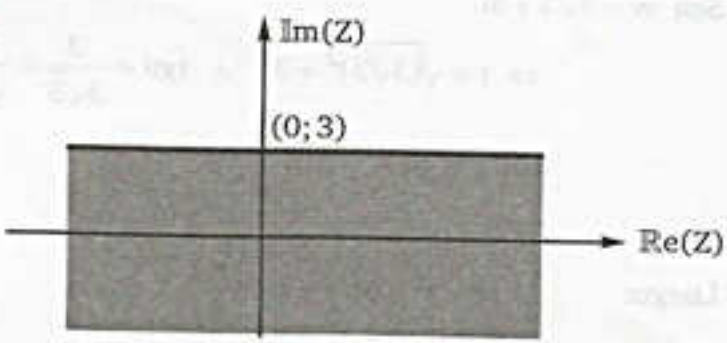
a) $\text{Re}(Z) = 2$ c) $|Z| = 4$ e) $0 \leq \text{Arg}(Z) \leq \frac{\pi}{3}$

b) $\text{Im}(Z) \leq 3$ d) $|Z| > 9$ f) $|\text{Re}(Z)| + |\text{Im}(Z)| \leq 1$

**Resolución:** a) $x = 2$ .... Es una línea vertical que pasa por $x = 2$




b) $y \leq 3$ ..... Es la región por debajo de la línea horizontal $y = 3$

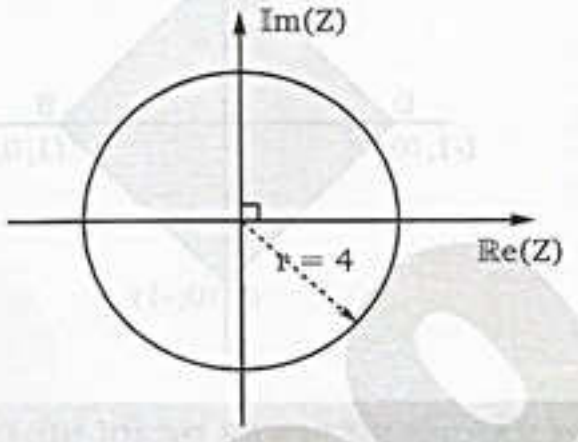


team CALAPENSHKO


c) $r = 4 \quad \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 4$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4^2$ .....

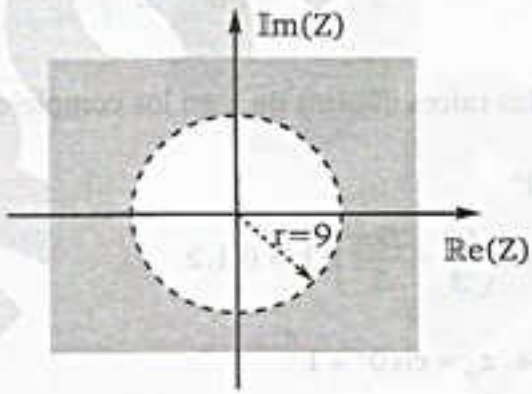
Es una circunferencia de centro en el origen y radio 4.




d) $r > 9 \quad \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} > 9$

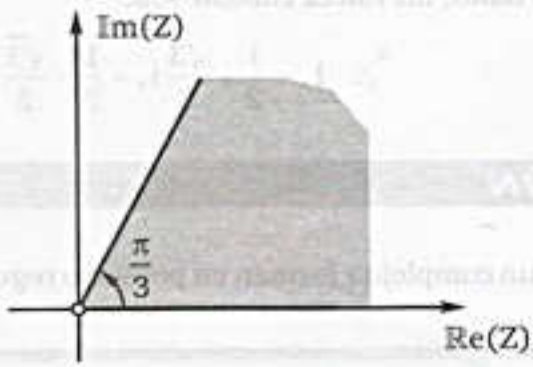
$\Rightarrow x^2 + y^2 > 9^2$ .....

Es la región externa de la circunferencia de centro en el origen y radio 9.

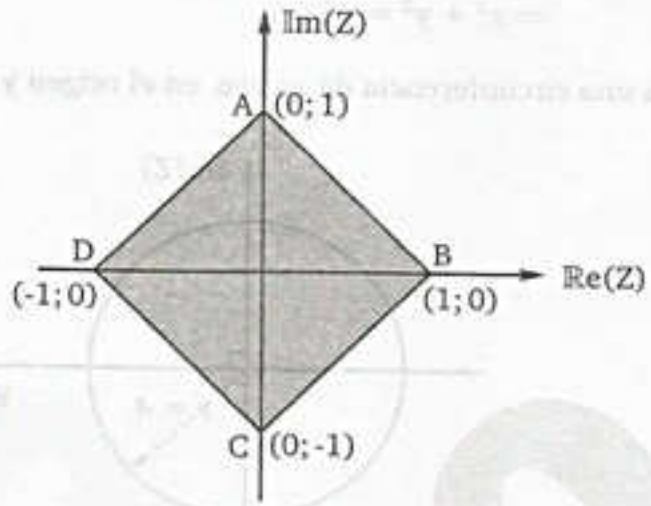



e) $0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$ ..... Es la región comprendida entre los ángulo 0 y $\frac{\pi}{3}$

(centro en origen de coordenadas)



f) $|x| + |y| \leq 1$ ..... Es la región interna del cuadrado ABCD




## OBTENCIÓN DE LAS RAÍCES N-ÉSIMAS DE UN NÚMERO COMPLEJO

Expresamos el número complejo z en su forma polar.

$$z = r\,\text{cis}\theta,\ 0 \leq \theta < 2\pi,\ r > 0$$

las raíces n-ésimas se obtienen de $\sqrt[n]{z}\Big]_k = \sqrt[n]{r}\,\text{cis}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)$ haciendo variar k de 0, 1, 2, ....., n – 1.

**EJEMPLO:** Hallar las raíces cúbicas de 1 en los complejos.

**SOLUCIÓN:**

$1 = \text{cis}\,0°$

$$\sqrt[3]{1}\Big]_k = \text{cis}\left(\frac{0°}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right),\ k = 0,1,2$$

$$k = 0 \rightarrow\ z_0 = \text{cis}\,0° = 1$$

$$k = 1 \rightarrow\ z_1 = \text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{2\pi}{3} \rightarrow z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 2 \rightarrow\ z_2 = \text{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\frac{4\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{4\pi}{3} \rightarrow z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Por lo tanto, las raíces cúbicas son:

$$\therefore\ 1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

### OBSERVACIÓN

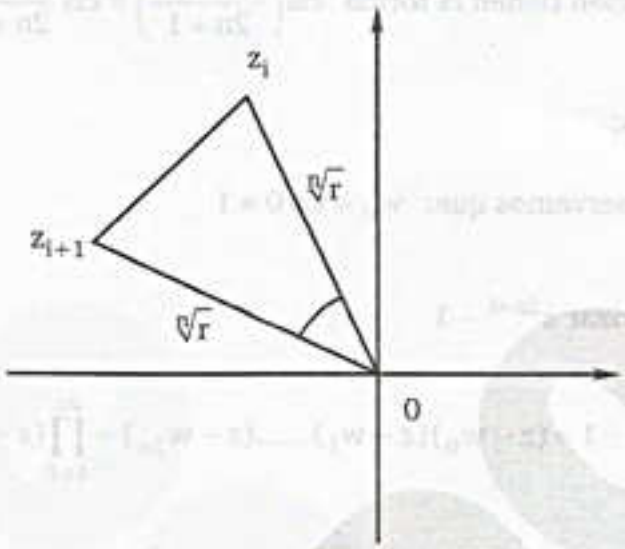
Las raíces n-ésimas de un complejo z forman un polígono regular de n lados.

team CALAPENSHKO


**DEMOSTRACIÓN:**

Sean las raíces $z_0, z_1, \ldots\ldots, z_{n-1}$ obtenidas variando k de 0 a n – 1.

Analizando 2 raíces consecutivas $z_i, z_{i+1}$




El ángulo formado por 2 raíces consecutivas es

$$\left(\frac{2(i+1)\pi}{n}+\frac{\theta}{n}\right)-\left(\frac{2i\pi}{n}+\frac{\theta}{n}\right)=\frac{2\pi}{n}$$

Finalmente, las n raíces forman n triángulos congruentes

con igual ángulo central igual a $\frac{2\pi}{n}$

$\therefore$ El polígono formado es un n-ágono regular.

## APLICACIONES DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

### OBSERVACIÓN

Sea $\alpha, \theta \in \mathbb{R}$, se cumple :

$$\operatorname{cis}\alpha.\operatorname{cis}\theta = \operatorname{cis}(\alpha+\theta)$$

$$\frac{\operatorname{cis}\alpha}{\operatorname{cis}\theta} = \operatorname{cis}(\alpha-\theta)$$

En el capítulo 11, enunciamos las dos siguientes identidades:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n+1}.\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2n+1}.\ldots\ldots.\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$$

$$\cos\frac{\pi}{2n+1}.\cos\frac{3\pi}{2n+1}.\ldots\ldots.\cos\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{1}{2^n},\ \forall n\in\mathbb{Z}^+$$

**DEMOSTRACIÓN**

Sea la ecuación: $z^{2n+1}-1=0 \rightarrow z^{2n+1}=1=\text{cis}\,0°$

Entonces las raíces de la ecuación tienen la forma $\text{cis}\left(\frac{0+2k\pi}{2n+1}\right)=\text{cis}\,\frac{2k\pi}{2n+1}$ con $k=0,1,.....,2n$

Nombremos las $(2n+1)$ raíces:

Sea : $w_k=\text{cis}\,\frac{2k\pi}{2n+1}$, observamos que: $w_0=\text{cis}\,0=1$

Entonces podemos factorizar $z^{2n+1}-1$

$$z^{2n+1}-1=(z-w_0)(z-w_1).....(z-w_{2n})=\prod_{t=0}^{2n}(z-w_t)$$

Como $w_0=1 \rightarrow \frac{z^{2n+1}-1}{z-1}=(z-w_1)(z-w_2).....(z-w_{2n})=\prod_{t=1}^{2n}(z-w_t)$ .....(1)

para todo $z\in\mathbb{C}-\{1\}$.

Observamos que cuando realizamos el producto:

$$(z-w_j)(z-w_{2n+1-j})=z^2-z(w_j+w_{2n+1-j})+w_jw_{2n+1-j}\ ;\ \text{para } j=1,2,.....,n$$

$$w_{2n+1-j}=\text{cis}\left(\frac{2(2n+1-j)\pi}{2n+1}\right)=\text{cis}\left(2\pi-\frac{2j\pi}{2n+1}\right) \rightarrow w_{2n+1-j}=\text{cis}\left(-\frac{2j\pi}{2n+1}\right)$$

$\rightarrow$ $w_j.w_{2n+1-j}=\text{cis}\left(\frac{2j\pi}{2n+1}\right)\text{cis}\left(-\frac{2j\pi}{2n+1}\right)=\text{cis}\,0=1$, esto debido a la observación anterior.

$\rightarrow$ $w_j+w_{2n+1-j}=\left(\cos\frac{2j\pi}{2n+1}+i\,\text{sen}\,\frac{2j\pi}{2n+1}\right)+\left(\cos\left(-\frac{2j\pi}{2n+1}\right)+i\,\text{sen}\left(-\frac{2j\pi}{2n+1}\right)\right)=2\cos\frac{2j\pi}{2n+1}$

Entonces: $(z-w_j)(z-w_{2n+1-j})=z^2-\left(2\cos\frac{2j\pi}{2n+1}\right)z+1$

Por lo tanto si agrupamos en parejas el producto de $(z-w_1)(z-w_2).....(z-w_{2n})$ obtenemos:

$$\prod_{j=1}^{n}\left(z^2-\left(2\cos\frac{2j\pi}{2n+1}\right)z+1\right)$$

En (1): $\underbrace{\frac{z^{2n+1}-1}{z-1}}=\prod_{j=1}^{n}\left(z^2-\left(2\cos\frac{2\pi j}{2n+1}\right)z+1\right)$ .....(2)

$$z^{2n}+z^{2n-1}+.....+z+1=\prod_{j=1}^{n}\left(z^2-\left(2\cos\frac{2\pi j}{2n+1}\right)z+1\right),\ \forall z\in\mathbb{C}$$

Haciendo $z=1$:

$$1^{2n}+1^{2n-1}+.....+1+1=\prod_{j=1}^{n}\left(1-2\cos\frac{2\pi j}{2n+1}+1\right)=\prod_{j=1}^{n}2\left(1-\cos\frac{2\pi j}{2n+1}\right)$$

$$\rightarrow 2n+1=\prod_{j=1}^{n}4\operatorname{sen}^2\frac{\pi j}{2n+1}=4^n\prod_{j=1}^{n}\operatorname{sen}^2\frac{\pi j}{2n+1}\ \rightarrow\ \frac{2n+1}{4^n}=\left(\prod_{j=1}^{n}\operatorname{sen}\frac{\pi j}{2n+1}\right)^2$$

Como $\prod_{j=1}^{n}\operatorname{sen}\frac{\pi j}{2n+1}$ es el producto de senos de ángulos que pertenecen al primer cuadrante, la productoria es positiva. Luego:

$$\boxed{\prod_{j=1}^{n}\operatorname{sen}\frac{\pi j}{2n+1}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}}$$

Haciendo $z=-1$ en (2):

$$\frac{(-1)^{2n+1}-1}{(-1)-1}=\prod_{j=1}^{n}\left((-1)^2-\left(2\cos\frac{2\pi j}{2n+1}\right)(-1)+1\right)=\prod_{j=1}^{n}2\left(1+\cos\frac{2\pi j}{2n+1}\right)$$

$$\rightarrow 1=\prod_{j=1}^{n}4\cos^2\frac{\pi j}{2n+1}=4^n\prod_{j=1}^{n}\cos^2\frac{\pi j}{2n+1}\ \rightarrow\ \frac{1}{4^n}=\left(\prod_{j=1}^{n}\cos\frac{\pi j}{2n+1}\right)^2$$

Como $\prod_{j=1}^{n}\cos\frac{\pi j}{2n+1}$ es el producto de cosenos de ángulos que pertenecen al primer cuadrante, la productoria es positiva. Luego:

$$\boxed{\prod_{j=1}^{n}\cos\frac{\pi j}{2n+1}=\frac{1}{2^n}}$$

team CALAPENSHKO


## EJERCICIOS DE APLICACIÓN

**1.** Si: $Z_1 = 2 + 3i$; $Z_2 = -4 + i$ y $Z_3 = 1 - i$

Determine:

a) $Z_1 - Z_3$ = _____

b) $Z_1 \cdot Z_2$ = _____

c) $\frac{Z_1 + Z_3}{Z_2}$ = _____

d) $Z_3^2 - Z_1$ = _____

e) $Z_1 - Z_2 + Z_3$ = _____

**2.** Si: $Z_1 = (2;3)$; $Z_2 = (-1;1)$

Calcular:

a) $|Z_1 + Z_2|$ = _____

b) $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right|$ = _____

c) $|Z_1^2 + Z_2^2|$ = _____

d) $|Z_1 - Z_2|$ = _____

e) $|Z_1 \cdot Z_2|$ = _____

**3.** Expresar en forma polar:

a) $Z = 2 + 2i$ _____

b) $Z = -3i$ _____

c) $Z = 4 - 3i$ _____

d) $Z = -2$ _____

e) $Z = \pi$ _____

**4.** Expresar en forma exponencial:

a) $Z = 2i$ _____

b) $Z = 1 - i$ _____

c) $Z = -4$ _____

d) $Z = \sqrt{3} - i$ _____

e) $Z = 2$ _____

**5.** Efectuar la operación indicada:

a) $i^{12} + i^{18}$ = _____

b) $i^{23} + i^{47}$ = _____

c) $e^{\pi i} + e^{-\pi i}$ = _____

d) $w^{120} + w^{180}$ = _____

e) $i^i + e^{-\frac{\pi}{2}}$ = _____

**6.** Determine el argumento principal de:

a) $Z_1 = 2 - 4i$ _____

b) $Z_2 = 1 + i$ _____

c) $Z_3 = \sqrt{3} - \sqrt{3}i$ _____

d) $Z_4 = -5 - 4i$ _____

e) $Z_5 = -10i$ _____

team CALAPENSHKO



## PROBLEMAS RESUELTOS

**PROBLEMA 1** Siendo $Z = x + iy$

Describir gráficamente en el plano de Gauss las siguientes desigualdades:

a) $|\mathrm{Re}(Z) - 2| \leq 3$

b) $\mathrm{Im}(Z) - |Z + \bar{Z}| > 0$

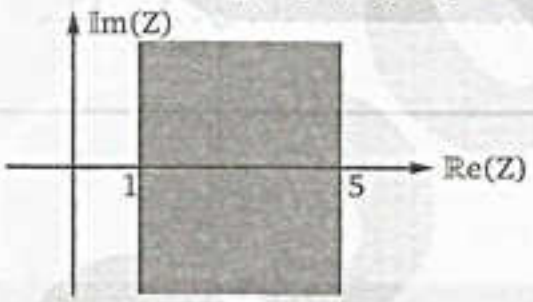
c) $|Z - 1| \leq 3$

d) $\frac{\pi}{4} \leq \mathrm{Arg}(Z - i) < \pi$

**Resolución:**

a) $|\mathrm{Re}(Z) - 2| \leq 3 \Rightarrow |x - 2| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x - 2 \leq 3$

$\Rightarrow -1 \leq x \leq 5$ ..... Es la región comprendida entre las rectas: $x = 1 \wedge x = 5$

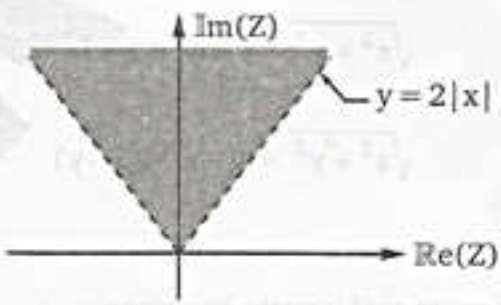



b) $\mathrm{Im}(Z) - |Z + \bar{Z}| > 0$ .....(*)

Si: $Z = x + iy \Rightarrow \bar{Z} = x - iy$

Luego en (*): $y - |x + iy + x - iy| > 0 \Rightarrow y - |2x| > 0 \Rightarrow y > |2x|$

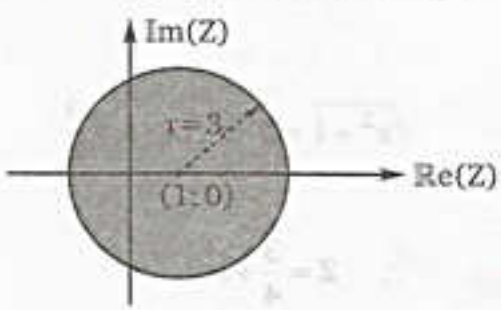
$\Rightarrow y > 2|x|$ ..... Es la región superior de la curva $y = 2|x|$




c) $|Z - 1| \leq 3$

$\Rightarrow |x + iy - 1| \leq 3 \Rightarrow |(x - 1) + iy| \leq 3 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \leq 3$

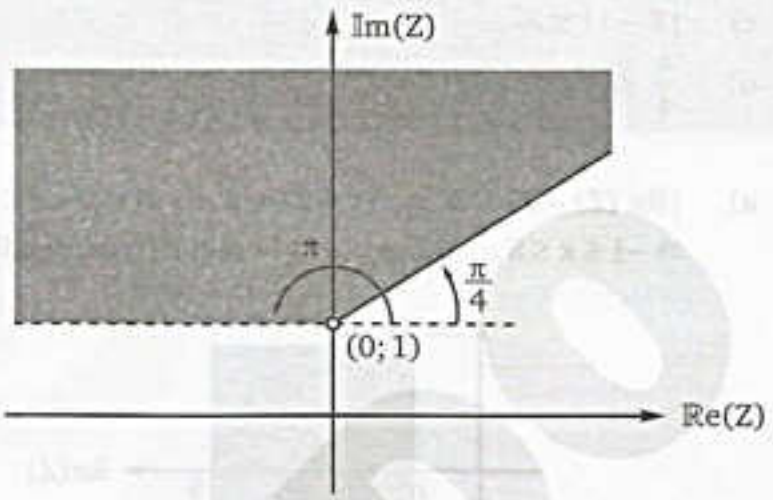
$\Rightarrow (x - 1)^2 + y^2 \leq 3^2$ ..... Es la región interna de la circunferencia de radio 3 y centro (1; 0)



d) $\frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}\,(Z-i) < \pi$ ..... Es la región comprendida entre los ángulos $\frac{\pi}{4}$ y

con centro en (0; 1)

hacemos: $Z - i = 0 \Rightarrow Z = i$




**PROBLEMA 2** Determine el complejo Z tal que:

$$|Z| + Z = 2 + i$$

**Resolución:** Sea: $Z = x + iy$ es la condición:

$$\sqrt{x^2+y^2} + x + iy = 2 + i$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = 2 - x + i(1-y)$$

Igualando parte real y parte imaginaria:

$$\sqrt{x^2+y^2} = 2 - x \text{ ..... (1)}$$

$$0 = 1 - y \text{ ..... (2)} \Rightarrow y = 1$$

En (1): $\sqrt{x^2+1} = 2 - x \Rightarrow x = \frac{3}{4}$

$$\therefore \quad Z = \frac{3}{4} + i$$

team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 3** Determine el lugar geométrico de todos los números complejos Z tales que:

$$|Z + 1| + |Z - 1| \leq 4$$

**Resolución:** Sea: $Z = x + iy$ tenemos en la condición:

$$|x + iy + 1| + |x + iy - 1| \leq 4$$

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \leq 4$$

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} \leq 4 - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado:

$$(x+1)^2 + y^2 \leq 16 - 8\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + (x-1)^2 + y^2$$

Reduciendo:

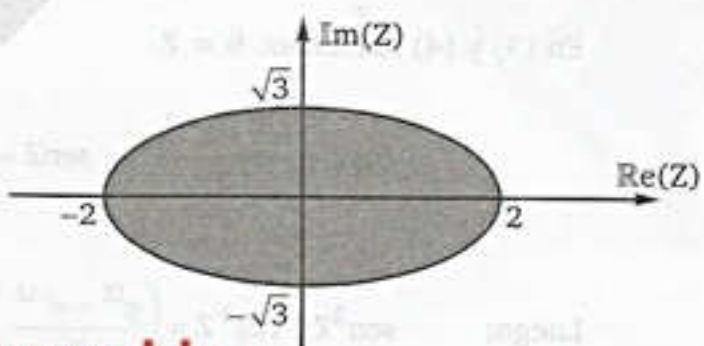
$$2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \leq 4 - x$$

Elevando al cuadrado y simplificando:

$$3x^2 + 4y^2 \leq 12$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} \leq 1 \quad \text{..... (*)}$$

Así (*) representa la región interna de una elipse con ejes 2 y $\sqrt{3}$ y centro en el origen.




twitter.com/calapenshko

**PROBLEMA 4** Siendo: $Z = x + iy$

Indicar verdadero (V) o falso (F) a cada proposición:

a) $|e^Z| = e^x$

b) $\text{Arg}(e^Z) = y$

c) $\text{sen}^2 Z + \cos^2 Z = 1$

team CALAPENSHKO



**Resolución:** a) $e^Z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$

$e^Z = e^x(\cos y + i\,\text{sen}y)$ .....forma conocida como "exponencial compleja"

así: $|e^Z| = e^x$

VERDADERO

b) De lo anterior:

$y = \text{Arg}(e^Z)$

VERDADERO

c) De la fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\theta \quad \ldots\ldots (1)$$

También: $e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\,\text{sen}(-\theta)$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\,\text{sen}\theta \quad \ldots\ldots (2)$$

(1) + (2): $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \ldots\ldots (3)$$

(1) – (2): $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\,\text{sen}\theta$

$$\Rightarrow \text{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad \ldots\ldots (4)$$

En (3) y (4) haciendo: $\theta = Z$

$$\cos Z = \frac{e^{iZ} + e^{-iZ}}{2} \wedge \text{sen}Z = \frac{e^{iZ} - e^{-iZ}}{2i}$$

Luego: $$\text{sen}^2 Z + \cos^2 Z = \left(\frac{e^{iZ} - e^{-iZ}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iZ} + e^{-iZ}}{2}\right)^2$$

$$\text{sen}^2 Z + \cos^2 Z = \frac{e^{2iZ} + e^{-2iZ} - 2}{-4} + \frac{e^{2iZ} + e^{-2iZ} + 2}{4}$$

$$\text{sen}^2 Z + \cos^2 Z = 1$$

VERDADERO

team CALAPENSHKO



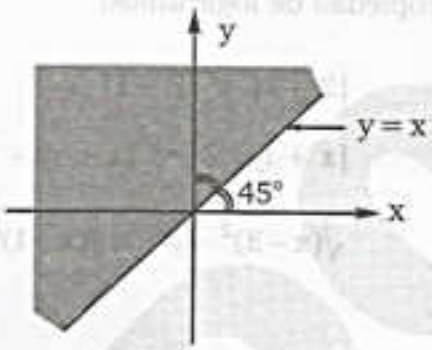
**PROBLEMA 5** Graficar la región:

$$R = \{Z \in \mathbb{C} / Im(Z) \geq Re(Z) \wedge 1 < |Z| \leq 2\}$$

**Resolución:** Sea: $Z = x + iy$

i) $Im(Z) \geq Re(Z)$

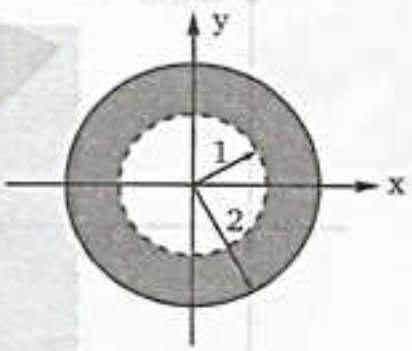
$\Rightarrow y \geq x$ ..... Es la región superior de la recta $y = x$



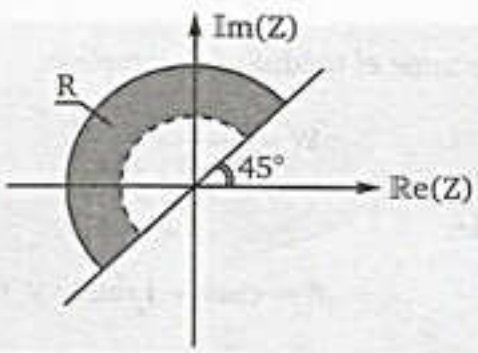

ii) $1 < |Z| \leq 2$

$1 < \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2$

$1 < x^2 + y^2 \leq 4$ ..... Es la región comprendido entre dos circunferencias de radios 1 y 2




Finalmente intersectando ambos regiones i) y ii)



team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 6** Determine la región de todos los números complejos $Z = x + iy$ para los cuales se cumple que:

$$\log_{1/3} |Z-3| > \log_{1/3} |Z-1|$$

**Resolución:** $\log_{1/3} |Z-3| > \log_{1/3} |Z-1| \; ; \; Z \neq 3 \wedge Z \neq 1$

Usando propiedad de logaritmos:

$$|Z-3| < |Z-1|$$

$$|x + iy - 3| < |x + iy - 1|$$

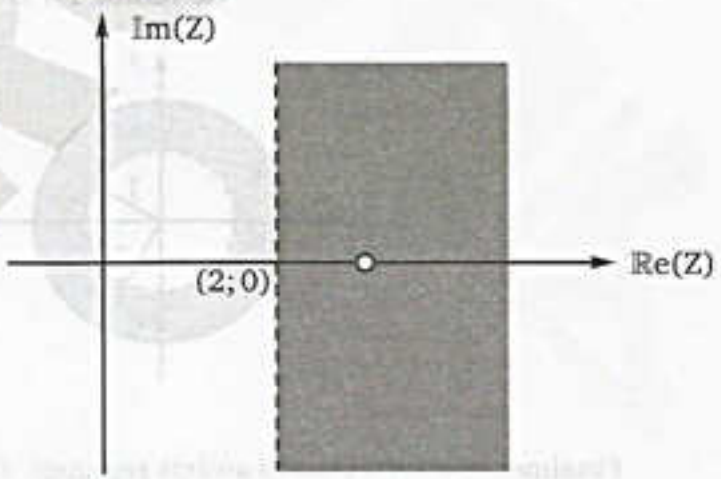
$$\sqrt{(x-3)^2+y^2} < \sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

Elevando al cuadrado y reduciendo:

$$x > 2 \; .....(*)$$

Luego (*) es la región a la derecha de la recta $x = 2$

Graficando:




**PROBLEMA 7** Determine el módulo del complejo:

$$W = \frac{iZ+1}{iZ-1} + \frac{iZ-1}{iZ+1}$$

donde:

$$Z = \cos\theta + i\,\text{sen}\theta \;\; \text{y} \;\; \theta \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle$$

team CALAPENSHKO


**Resolución:**

$$W=\frac{iZ+1}{iZ-1}+\frac{iZ-1}{iZ+1}$$

Mínimo común múltiplo

$$W=\frac{(iZ+1)^2+(iZ-1)^2}{(iZ-1)(iZ+1)}$$

Operando y reduciendo:

$$W=\frac{2(Z^2-1)}{Z^2+1} \quad .....(*)$$

Si: $Z = \cos\theta + i\,\text{sen}\theta$

$Z^2 = \cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta$ ..... (Teorema de De Moivre)

En (*):

$$W=\frac{2(\cos 2\theta+i\text{sen}2\theta-1)}{\cos 2\theta+i\text{sen}2\theta+1}$$

Usando identidades de arco doble:

$$W=\frac{2(-2\text{sen}^2\theta+i\,.\,2\text{sen}\theta\cos\theta)}{2\cos^2\theta+i\,.\,2\text{sen}\theta\cos\theta}$$

$$W=\frac{2.\,2\,\text{sen}\theta(-\text{sen}\theta+i\cos\theta)}{2\cos\theta(\cos\theta+i\text{sen}\theta)}$$

$$W=\frac{2\text{sen}\theta i(\cos\theta+i\text{sen}\theta)}{\cos\theta(\cos\theta+i\text{sen}\theta)} \Rightarrow W=2\tan\theta\, i$$

Luego el modulo de W es:

$|W| = |2\tan\theta|$ ; como $\tan\theta < 0$ ; pues $\theta \in$ IIC

$\therefore$ **$|W| = -2\tan\theta$**

**PROBLEMA 8** Determine todas las soluciones de:

$$e^Z = 1+i \;/\; Z \in C$$

**Resolución:**

$$e^Z = 1+i \quad ..... (*)$$

Sea: $Z = x + iy$ en (*)

$e^{x+iy} = 1+i$

$e^x\,.\,e^{iy} = 1+i$

$e^x(\cos y+i\text{sen}y) = 1+i$

$e^x\cos y + ie^x\text{sen}y = 1+i$

team CALAPENSHKO


Igualando parte real e imaginaria:

$$e^x \cos y = 1 \quad \text{..... (1)}$$

$$e^x \operatorname{sen} y = 1 \quad \text{..... (2)}$$

(2) ÷ (1): $\operatorname{tg} y = 1 \Rightarrow y = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$ .....(3)

(3) en (2): $e^x . \operatorname{sen}\left(2n\pi + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$$e^x . \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \Rightarrow e^x = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x = \ln\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}\ln 2 \quad \text{.....(4)}$$

De (3) y (4):

$$\therefore\ Z = \frac{1}{2}\ln 2 + i\left(2n\pi + \frac{\pi}{4}\right);\ n \in \mathbb{Z}$$

**PROBLEMA 9** Determine el valor de "Z" si:

$$\cos Z = 2,6$$

**Resolución:**

Como: $\cos Z = \frac{e^{iZ} + e^{-iZ}}{2}$

Entonces: $\frac{e^{iZ} + e^{-iZ}}{2} = 2,6$

$$e^{iZ} + \frac{1}{e^{iZ}} = \frac{26}{5}$$

Ordenando: $5\left(e^{iZ}\right)^2 - 26\left(e^{iZ}\right) + 5 = 0$

Resolviendo: $\left(5e^{iZ} - 1\right)\left(e^{iZ} - 5\right) = 0$

1.ª solución: $e^{iZ} - 5 = 0 \Rightarrow e^{iZ} = 5$

$$\Rightarrow iZ = \ln 5 \quad \Rightarrow Z = -i\ln 5$$

2.ª solución: $5e^{iZ} - 1 = 0 \Rightarrow e^{iZ} = 5^{-1}$

$$\Rightarrow iZ = \ln 5^{-1} \Rightarrow Z = i\ln 5$$

$$\therefore\ \mathbf{Z = i\ln 5 \ \acute{o}\ Z = -i\ln 5}$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 10** Demostrar:

i) $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

ii) $\cos^4\theta = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta$

**Resolución:**

i) Del teorema de Demoivre:

$$\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta = (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n$$

Para: n = 4, tenemos:

$$\cos 4\theta + i \operatorname{sen} 4\theta = (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^4$$

Desarrollando el segundo miembro tenemos:

$$\cos 4\theta + i \operatorname{sen} 4\theta = \cos^4\theta + 4\cos^3\theta\, i \operatorname{sen}\theta + 6\cos^2\theta\, i^2 \operatorname{sen}^2\theta + 4\cos\theta\, i^3 \operatorname{sen}^3\theta + i^4 \operatorname{sen}^4\theta.$$

$$\cos 4\theta + i \operatorname{sen} 4\theta = \cos^4\theta - 6\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta + \operatorname{sen}^4\theta + i(4\cos^3\theta \operatorname{sen}\theta - 4\cos\theta \operatorname{sen}^3\theta)$$

Igualando parte real:

$$\cos 4\theta = \cos^4\theta - 6\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta + \operatorname{sen}^4\theta \quad \ldots\ldots(*)$$

Usando la identidad: $\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ en (*) tenemos:

$$\therefore \quad \boldsymbol{\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1}$$

ii) Sabemos: $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

$$\cos^4\theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^4$$

Desarrollando el segundo miembro:

$$\cos^4\theta = \frac{1}{16}\left(e^{4i\theta} + 4e^{3i\theta}.e^{-i\theta} + 6e^{2i\theta}.e^{-2i\theta} + 4e^{i\theta}.e^{-3i\theta} + e^{-4i\theta}\right)$$

Agrupando:

$$\cos^4\theta = \frac{1}{16}\left[e^{4i\theta} + e^{-i4\theta} + 4\left(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}\right) + 6e^0\right]$$

$$\cos^4\theta = \frac{1}{16}\left[2\cos 4\theta + 4(2\cos 2\theta) + 6\right]$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\cos^4\theta = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta}$$

**PROBLEMA 11** Siendo: $Z = re^{i\theta}$ y se cumple:

$$\left(\frac{Z}{\overline{Z}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{Z}}{Z}\right)^2 = 1$$

Calcular:

$$E = \tan\theta + \cot\theta$$

**Resolución:**

Si: $Z = re^{i\theta} \rightarrow \overline{Z} = re^{-i\theta}$

En la condición: $\left(\frac{re^{i\theta}}{re^{-i\theta}}\right)^2 + \left(\frac{re^{-i\theta}}{re^{i\theta}}\right)^2 = 1$

$$\left(e^{2i\theta}\right)^2 + \left(e^{-2i\theta}\right)^2 = 1$$

$$e^{4i\theta} + e^{-4i\theta} = 1$$

A la forma trigonométrica:

$$\cos 4\theta + i\,\text{sen}\,4\theta + \cos 4\theta - i\,\text{sen}\,4\theta = 1$$

$$2\cos 4\theta = 1$$

$$\cos 4\theta = \frac{1}{2} \quad \text{.....(*)}$$

Usando la identidad: $\cos 2x = 1 - 2\text{sen}^2 x$ en (*)

$$1 - 2\text{sen}^2 2\theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{sen}^2 2\theta = \frac{1}{4}$$

$$\text{sen}\,2\theta = \pm\frac{1}{2} \quad \text{.....(**)}$$

Piden: $E = \tan\theta + \cot\theta$

$E = 2\csc 2\theta$ ..... Identidad del ángulo mitad

$$E = \frac{2}{\text{sen}2\theta}$$

Usando (**): $\therefore \mathbf{E = \pm 4}$

**PROBLEMA 12** Resolver:

$$n\tan x = \left|1^i\right| + \left|2^i\right| + \left|3^i\right| + .... + \left|n^i\right| \;;\; i = \sqrt{-1}$$

**Resolución:**

De la fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$$

$$\left|e^{i\theta}\right| = \left|\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta\right| = \sqrt{\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta}$$

Usando la identidad: $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\left|e^{i\theta}\right| = 1 \quad \text{.....(*)}$$

team CALAPENSHKO


Además por logaritmos se cumple:

$$a = e^{\ln a} \quad ; \ a \in \mathbb{R}^+$$

Luego: $a^i = (e^{\ln a})^i$

$$a^i = e^{i \ln a}$$

$$|a^i| = |e^{i \ln a}|$$

Usando (*) tenemos: $|a^i| = 1 \qquad \forall\, a \in \mathbb{R}^+$

En el problema: $n \tan x = \underbrace{1+1+1+....+1}_{\text{n veces}}$

$$n \tan x = n$$

$$\tan x = 1 \qquad \text{.... Ecuación trigonométrica elemental}$$

$$V_p = \frac{\pi}{4} \qquad \text{.... Valor principal}$$

$$\therefore \ \mathbf{x = k\pi + \frac{\pi}{4} \ ; \ k \in \mathbb{Z}} \ \textbf{.... Solución general}$$

**PROBLEMA 13** Siendo:

$$Z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Indicar la parte real del complejo:

$$W = Z^{3n} + Z^{-3n} \ ; \ n \in \mathbb{Z}$$

**Resolución:** Llevando Z a la forma trigonométrica:

i) $Z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = 1$

ii) $\tan\theta = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \Rightarrow \theta = \dfrac{2\pi}{3}$

$$\therefore \ Z = \cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$$

Aplicando el teorema de Demoivre:

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$$

iii) $Z^{3n} = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right)^{3n}$

$Z^{3n} = \cos 2\pi n + i\,\text{sen}\,2\pi n$ .....(1)

iv) $Z^{-3n} = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right)^{-3n}$

$Z^{-3n} = \cos(-2\pi n) + i\,\text{sen}(-2\pi n)$

$Z^{-3n} = \cos 2\pi n - i\,\text{sen}\,2\pi n$ .....(2)

De (1) y (2) tenemos : $Z^{3n} + Z^{-3n} = 2\cos 2\pi n$

$W = 2\cos 2\pi n$

$\therefore$ **Re(W) = 2 cos 2πn**

**PROBLEMA 14** ¿Cuál es el número complejo, que su inverso es igual a su conjugado e igual a su opuesto?

**Resolución:** Sea el número complejo:

$Z = x + yi$

Tenemos : $\bar{Z} = x - yi$ ..... conjugado

$\frac{1}{Z} = \frac{1}{x+yi}$ ..... inverso

$-Z = -x - yi$ ..... opuesto

Así : $\bar{Z} = -Z \Rightarrow x - yi = -x - yi \Rightarrow x = 0$

$\frac{1}{Z} = \bar{Z} \Rightarrow \frac{1}{x+yi} = x - yi$

$\frac{1}{yi} = -y \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$

$\therefore$ **Z = ± i**

**PROBLEMA 15** De la condición:

$$Z = \prod_{k=0}^{99}\left(1 + \frac{1}{i+k}\right) \quad ; \quad i = \sqrt{-1} \quad ; \quad \Pi \rightarrow \text{productoria}$$

Hallar: Re(Z) − Im(Z)

**Resolución:** Desarrollando la productoria tenemos:

$$Z = \left(1+\frac{1}{i}\right)\left(1+\frac{1}{i+1}\right)\left(1+\frac{1}{i+2}\right)\left(1+\frac{1}{i+3}\right)....\left(1+\frac{1}{i+99}\right)$$

$$Z = \left(\frac{i+1}{i}\right)\left(\frac{i+2}{i+1}\right)\left(\frac{i+3}{i+2}\right)\left(\frac{i+4}{i+3}\right)....\left(\frac{i+100}{i+99}\right)$$

team CALAPENSHKO


Simplificando : $Z = \dfrac{i+100}{i}$

$$Z = \frac{(i+100)i}{i^2}$$

$$Z = 1 - 100i$$

$$\mathbb{R}e(Z) = 1 \ \wedge \ \mathbb{I}m(Z) = -100$$

$$\therefore \ \mathbf{Re(Z) - Im(Z) = 101}$$

**PROBLEMA 16** Graficar la región:

$$R = \{Z \in \mathbb{C} / |Z - 1 - i| \leq 2 - \mathbb{I}m(\overline{Z})\}$$

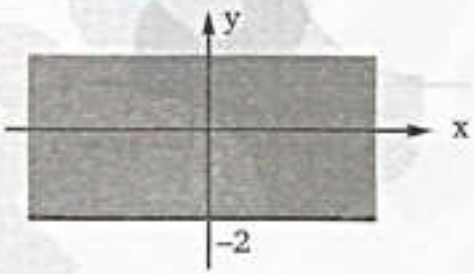
**Resolución:** Sea : $Z = x + yi \Rightarrow \overline{Z} = x - yi$

$$|Z - 1 - i| \leq 2 - \mathbb{I}m(\overline{Z})$$

$$|x + yi - 1 - i| \leq 2 - (-y)$$

$$|(x-1) + (y-1)i| \leq 2 + y \quad \ldots\ldots\ldots (*)$$

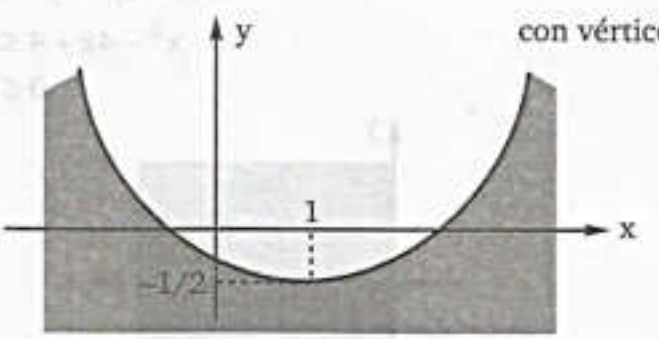
Se cumple : $0 \leq 2 + y \Rightarrow y \geq -2$ ..... Región superior a la recta horizontal $y = -2$




De (*) $\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \leq 2 + y$

Elevando al cuadrado y resolviendo se tiene:

$(x-1)^2 \leq 6\left(y + \dfrac{1}{2}\right)$ ..... Región inferior de una parábola con vértice $V\left(1; -\dfrac{1}{2}\right)$




Finalmente intersectando ambas regiones tenemos:

**A todo el público en general:**

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

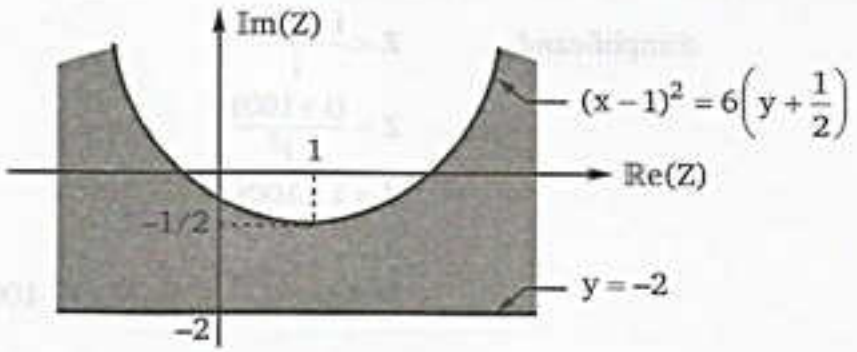
Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

**Este libro no debe ser prostituito monetariamente**, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

**28 de agosto del 2020**




**PROBLEMA 17** Graficar la región:

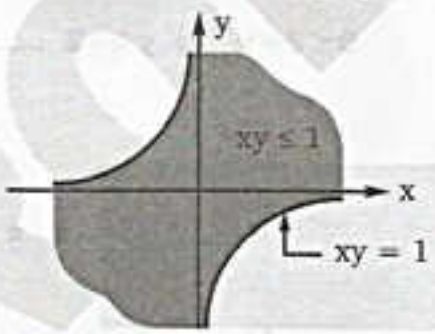
$$M = \left\{ Z \in \mathbb{C} \Big/ \operatorname{Im}(\overline{Z}^2) \le 2 ; \left|\frac{Z-2}{Z+2}\right| \le 1 ; \ -\frac{\pi}{2} \le \operatorname{Arg}(Z) \le 0 \right\}$$

**Resolución:** Sea : $Z = x + iy$

I) $\overline{Z} = x - yi$

$\overline{Z}^2 = (x - yi)^2 \Rightarrow \overline{Z}^2 = x^2 - y^2 - 2xyi$

$\Rightarrow \operatorname{Im}(\overline{Z}^2) = -2xy \le 2 \Rightarrow xy \ge -1$




II) $\left|\frac{Z-2}{Z+2}\right| \le 1 \quad \Rightarrow \quad |Z-2| \le |Z+2|$

$|x + iy - 2| \le |x + iy + 2|$

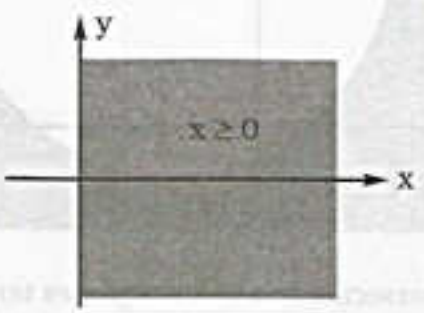
$|(x-2) + iy)| \le |(x+2) + iy|$

Elevando al cuadrado y reduciendo:

$(x-2)^2 + y^2 \le (x+2)^2 + y^2$

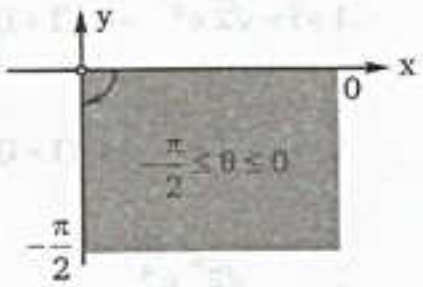
$x^2 - 4x + 4 \le x^2 + 4x + 4$

$0 \le 8x \Rightarrow x \ge 0$

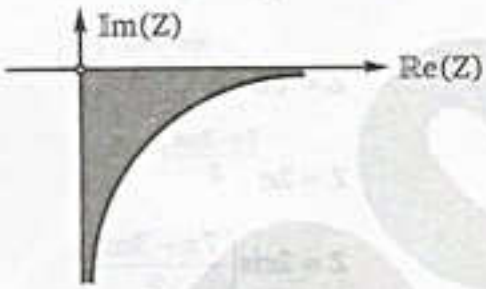


team CALAPENSHKO


III) $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le 0 \quad ; \quad Arg(Z) = \theta$




Intersectando las tres gráficas tenemos:




**PROBLEMA 18** Simplificar:

$$\frac{(x^2+xy+x)i-x-y-1}{(x+y+1)i}-x$$

**Resolución:** Se tiene :

$$Z=\frac{x(x+y+1)i-(x+y+1)}{(x+y+1)\,i}-x$$

$$Z=\frac{x(x+y+1)i}{(x+y+1)i}-\frac{x+y+1}{(x+y+1)i}-x$$

$$Z=x-\frac{1}{i}-x$$

$$Z=-\frac{1}{i}$$

$$Z=-\frac{i}{i^2}$$

$$\therefore \quad Z=i$$

**PROBLEMA 19** Expresar en forma polar a Z:

$$Z=\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$$

team CALAPENSHKO


**Resolución:** Tener en cuenta que:

$$1+i=\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i} \rightarrow (1+i)^n=\sqrt{2}^n\,e^{\frac{n\pi}{4}i}$$

$$1-i=\sqrt{2}\,e^{\frac{7\pi}{4}i} \rightarrow (1-i)^{n-2}=\sqrt{2}^{n-2}\,e^{\frac{7(n-2)\pi}{4}i}$$

Ahora "Z" será : $Z=\dfrac{\sqrt{2}^n\,e^{\frac{n\pi}{4}i}}{\sqrt{2}^{n-2}\,e^{\frac{7(n-2)\pi}{4}i}}$

$$Z=\sqrt{2}^2\,e^{\frac{n\pi-7n\pi+14\pi}{4}i}$$

$$Z=2e^{\frac{7\pi-3n\pi}{2}i}$$

$$Z=2\text{cis}\left(\frac{7\pi-3n\pi}{2}\right)$$

$$\therefore \quad \mathbf{Z=2\left[\cos\left(\frac{7\pi-3n\pi}{2}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{7\pi-3n\pi}{2}\right)\right]}$$

**PROBLEMA 20** Si:

$$|Z|^2=3\text{Re}(Z)$$

Calcular:

$$\left|Z-\frac{3}{2}\right|$$

**Resolución:** Sea el complejo : $Z=x+yi \;/\; \{x;y\}\subset\mathbb{R}$

Por condición : $x^2+y^2=3x$

Se pide : $\left|Z-\dfrac{3}{2}\right|=\sqrt{\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2}$

$$\left|Z-\frac{3}{2}\right|=\sqrt{x^2+y^2-3x+\frac{9}{4}}$$

$$\left|Z-\frac{3}{2}\right|=\sqrt{3x-3x+\frac{9}{4}}$$

$$\therefore \quad \mathbf{\left|Z-\frac{3}{2}\right|=\frac{3}{2}}$$

team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 21** Determine el módulo de Z si:

$$Z=\left\{i^{\frac{W}{6}}\right\}^{(2W+1)^2+(2W^2+1)^2}$$

**Resolución:** Tener en cuenta que:

$$1+W+W^2=0 \quad \wedge \quad W^3=1$$

$$* \ (2W+1)^2+(2W^2+1)^2=4W^2+4W+1+4W^4+4W^2+1$$

$$(2W+1)^2+(2W^2+1)^2=4W^2+4W+4W+4W^2+2$$

$$(2W+1)^2+(2W^2+1)^2=8W^2+8W+2$$

$$(2W+1)^2+(2W^2+1)^2=8(W^2+W)+2$$

$$(2W+1)^2+(2W^2+1)^2=8(-1)+2=-6$$

El complejo Z es:

$$Z=\left\{i^{\frac{W}{6}}\right\}^{-6}=i^{-W} \quad .....(1)$$

Recuerda que : $W=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ .....(2)

Si expresamos i en forma exponencial conseguimos:

$$i=e^{\frac{\pi}{2}i} \quad .....(3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1):

$$Z=\left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^{-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$$

$$Z=e^{\frac{\pi}{4}i+\frac{\sqrt{3}\pi}{4}}$$

$$Z=e^{\frac{\sqrt{3}\pi}{4}}.e^{\frac{\pi}{4}i}$$

Recuerda que: $Z=|Z|e^{\theta i}$

$$\therefore \quad |Z|=e^{\frac{\sqrt{3}\pi}{4}}$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 22** Siendo $Z \neq 0$ tal que: $\overline{Z}^2 = Z$, exprese Z en forma polar si: $Arg(Z) \in IIIC$

**Resolución:**

Sea: $Z = |Z| e^{\theta i} \rightarrow \overline{Z} = |Z| e^{-\theta i}$

Por condición: $|Z|^2 e^{-2\theta i} = |Z| e^{\theta i}$

$$e^{3\theta i} = |Z|$$

Es decir: $\cos(3\theta) + i\,\text{sen}(3\theta) = |Z| + 0i$

De donde: $\text{sen}(3\theta) = 0 \rightarrow 3\theta = 2k\pi$

$$\rightarrow \theta = \frac{2k\pi}{3}$$

También: $|Z| = \cos(3\theta)$

Como: $\theta \in IIIC$; $K = 2 \rightarrow \theta = 240°$

Finalmente la forma polar de Z será:

$$\mathbf{Z = \cos 240° + i\,\text{sen}\,240°}$$

**PROBLEMA 23** Si E es cualquiera de las raíces imaginarias de: $x^n = 1$.
Calcular:

$$L = \sum_{k=0}^{n} E^k$$

**Resolución:**

Se pide calcular: $L = 1 + E + E^2 + E^3 + ... + E^n$

$$L = \frac{E^{n+1} - 1}{E - 1} \; ; \; E \neq 1 \quad .....(1)$$

Como E es una raíz de:

$$x^n = 1 \rightarrow E^n = 1$$

Ahora en (1) se tendrá:

team CALAPENSHKO


$$L=\frac{E^n.E-1}{E-1}$$

$$L=\frac{1.E-1}{E-1}$$

$$L=\frac{E-1}{E-1}$$

$$\therefore \quad L=1$$

**PROBLEMA 24** Si: $Z\subset\mathbb{C}/Z\neq 0$. Encontrar Arg(Z) cumpliendose que:

$$Z(i-1)=-\bar{Z}(i+1)$$

**Resolución:** El complejo "Z" en forma polar viene dado por:

$$Z=|Z|(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta) \ \wedge \ \operatorname{Arg}(Z)=\theta$$

También : $\bar{Z}=|\bar{Z}|(\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta)$

Ahora la igualdad mostrada en el problema será:

$$|Z|(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)(i-1)=-|\bar{Z}|(\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta)(i+1)$$

$$\frac{|Z|(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)}{|\bar{Z}|(\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta)}=-\frac{i+1}{i-1}$$

$$\frac{|Z|(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)}{|\bar{Z}|(\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta)}=\frac{1+i}{1-i}$$

De donde : $\cos(2\theta)+i\operatorname{sen}(2\theta)=i$

Luego : $\cos(2\theta)=0 \ \wedge \ \operatorname{sen}(2\theta)=1$

Es decir : $2\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi \ ; \ k\in\mathbb{Z}$

$$\theta=\frac{\pi}{4}+k\pi$$

Como : $\theta=\operatorname{Arg}(Z)=$ Menor ángulo positivo

$k=0$

$$\therefore \quad \theta=\frac{\pi}{4}$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 25** Determine la parte real del complejo:

$$Z = 2\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{13} + 2\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\right)^{9} + 2\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{7}$$

**Resolución:** El complejo dado es:

$$Z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{13} + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{9} + 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{7}$$

$$Z = 2\left[\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]^{13} + 2\left[\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]^{9} + 2\left[\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^{7}$$

$$Z = 2\text{cis}\left(\frac{13\pi}{6}\right) + 2\text{cis}\left(\frac{9\pi}{4}\right) + 2\text{cis}\left(\frac{7\pi}{3}\right)$$

Como únicamente se pide la parte real, tenemos:

$$\text{Re}(Z) = 2\cos\left(\frac{13\pi}{6}\right) + 2\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) + 2\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)$$

Sabemos que : $\cos(2\pi+\theta) = \cos\theta$

Luego : $$\text{Re}(Z) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\therefore \quad \mathbf{Re(Z) = 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

team CALAPENSHKO



# PROBLEMAS PROPUESTOS

**1.** Indicar verdadero (V) o falso (F):

( ) $5+5i=5\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$

( ) $-\sqrt{3}+\sqrt{3}i=\sqrt{6}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$

( ) $\sqrt{2}-\sqrt{6}i=2\sqrt{2}e^{5\frac{\pi}{3}i}$

( ) $-4i=4e^{\frac{\pi}{2}i}$

A) VVVV B) VVVF C) VFVF
D) FVVF E) VVFF

**2.** El valor de la expresión:

$$E=\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]^{55}$$

es:

A) 1 B) –1 C) i
D) –I E) 1 + i

**3.** Simplificar:

$$M=\frac{\cos 4x-i\operatorname{sen}4x}{(\cos 2x-i\operatorname{sen}2x)^2}$$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

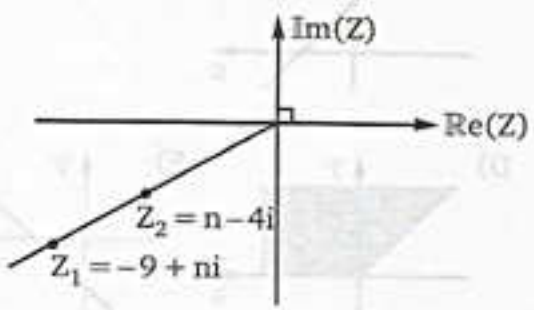
**4.** Luego de hallar "Z" en:

$$|Z|-Z=1+2i$$

Indicar: Re (Z)

A) 0, 5 B) 1 C) 1, 5
D) 2 E) 2, 5

**5.** Según el gráfico:




¿Cuál es el argumento principal de estos números complejos?

A) $\arctan\left(\frac{2}{3}\right)$ B) $-\arctan\left(\frac{2}{3}\right)$

C) $\pi-\arctan\left(\frac{2}{3}\right)$

D) $\pi+\arctan\left(\frac{2}{3}\right)$ E) $2\pi-\arctan\left(\frac{2}{3}\right)$

**6.** Dado: $Z=\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta$
Hallar los valores de "θ" para los cuales $(Z+i)^2$ es imaginario puro.

A) $\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}$

C) $0;\pi$

D) $0;\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}$ E) $0;\frac{\pi}{4};\pi;\frac{3\pi}{4}$

**7.** Sea $Z=i$
Entonces la suma de dos raíces cúbicas de Z es?

A) 1 B) –1 C) –i

D) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ E) $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$

**8.** Sea: $Z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Siendo $Z^k$ un número real hallar "k"

A) $3n;\ n\in\mathbb{Z}$ B) $3\frac{n}{2};n\in\mathbb{Z}$

C) $2n;\ n\in\mathbb{Z}$

D) $2n+1;\ n\in\mathbb{Z}$ E) $\frac{n}{6};n\in\mathbb{Z}$

**9.** Hallar la parte real del siguiente número complejo:

$$Z=\frac{1-i\tan\theta}{1-i\tan 2\theta}$$

A) sen θ B) cosθ C) sen2θ
D) cos2θ E) sen4θ

**10.** Reducir:

$$W=\frac{1-Z}{1+Z}$$

para: $Z = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$

A) $i\tan\theta$ B) $i\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$ C) $i\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

D) $-i\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ E) $-i\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$

**11.** Halle el argumento del complejo Z; siendo:

$$Z=\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta-1;\ \theta\in\left\langle\frac{\pi}{2};\pi\right\rangle$$

A) $\frac{\theta}{2}$ B) $\theta$ C) $\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}$

D) $\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$ E) $\pi-\theta$

**12.** Expresar en forma exponencial:

$$Z = 1 - \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta$$

para: $\theta \in [3\pi; 4\pi]$

A) $2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$ B) $-2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$

C) $2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)}$

D) $-2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)}$ E) $-2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)}$

**13.** Si: $\tan Z = 2i$ ; $i=\sqrt{-1}$

Hallar:

$$K = 1 + \cos 2Z + i\operatorname{sen} 2Z$$

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1

D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{5}{3}$

**14.** Siendo: $Z = x + iy$

¿Qué representa: $|Z - a| = |Z - b|$?

Donde: $\{a; b\} \subset \mathbb{R}$

A) Un punto B) Dos puntos

C) Una recta

D) Una circunferencia E) Una elipse

**15.** Hallar el área de la región:

$$A=\left\{Z\in\mathbb{C}\Big/|Z-1-i|\le 1;\ \frac{\pi}{4}\le \operatorname{Arg}(Z)\le\frac{\pi}{2}\right\}$$

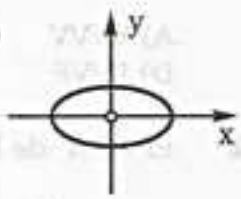
A) $2\pi$ B) $\frac{3\pi}{2}$ C) $\pi$

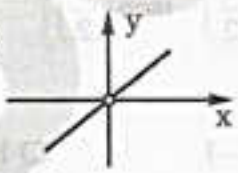
D) $\frac{\pi}{2}$ E) $\frac{\pi}{4}$

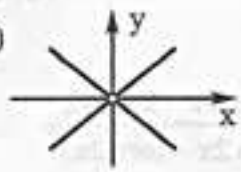
**16.** Hallar todos los $Z \in \mathbb{C}$ tal que:

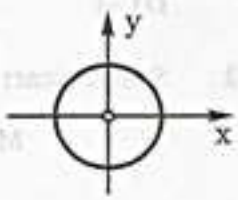
$$\operatorname{Im}\left(Z+\frac{1}{Z}\right)=0$$

A)


B) 

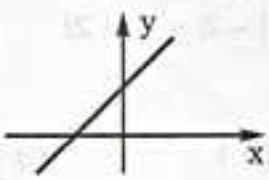

C) 

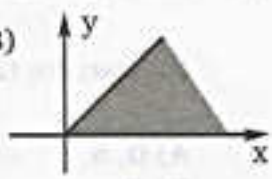

D) 

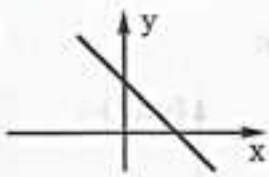

E) 

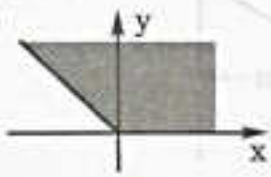

**17.** Representar geométricamente:

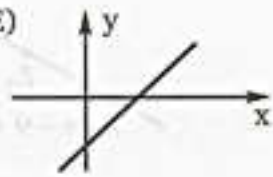
$$P=\left\{Z\in\mathbb{C}\Big/\operatorname{Arg}\left(\frac{Z-2+i}{i}\right)=\frac{3\pi}{4}\right\}$$

A) 


B) 


C) 

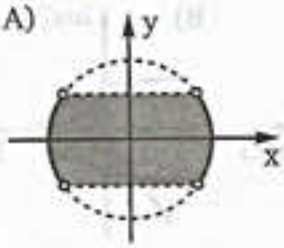

D) 

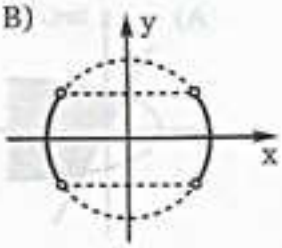

E) 

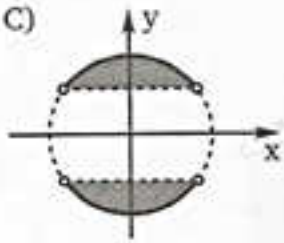
team CALAPENSHKO

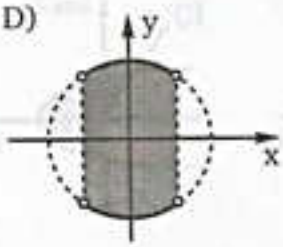

**18.** Describir los números complejos Z tales que:

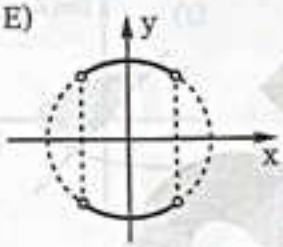
$$B = \{Z \in \mathbb{C} / -1 < Im(Z) < 1 \wedge |Z| = 2\}$$

A) 


B) 

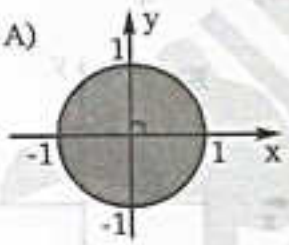

C) 

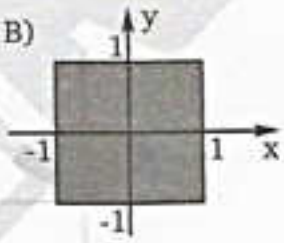

D) 

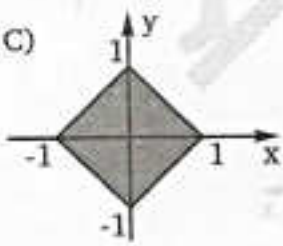

E) 

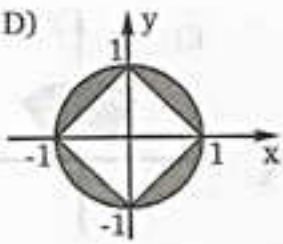

**19.** Cuál de las gráficas siguientes corresponden a la región?

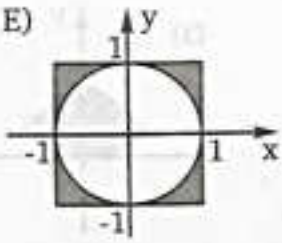
$$R = \{Z \in \mathbb{C} / |Re(Z)| + |Im(Z)| \geq 1;\ |Z| \leq 1\}$$

A) 

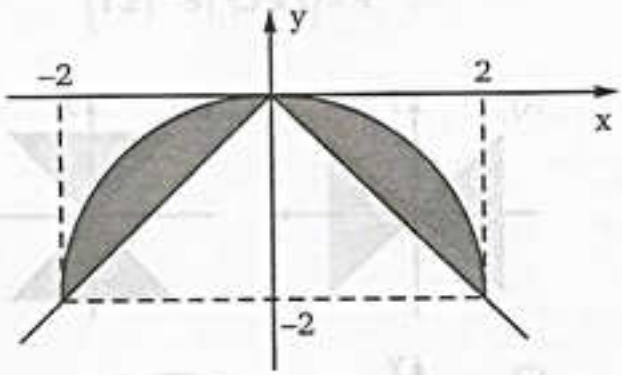

B) 


C) 


D) 


E) 


**20.** ¿A qué conjunto de números complejos corresponden la región mostrada?




A) $\{Z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} / |Z| \leq 2; 0 \leq \theta \leq \pi\}$

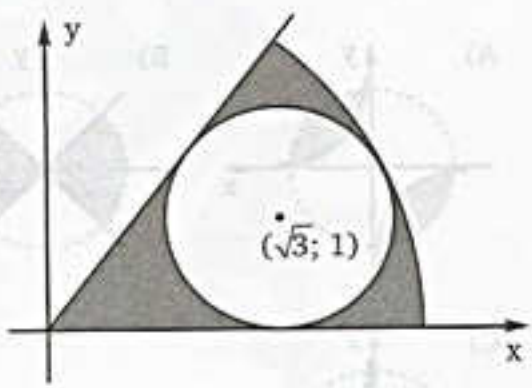
B) $\left\{Z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} / |Z - 2i| \geq 2; 5\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq 7\frac{\pi}{4}\right\}$

C) $\left\{Z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} / |Z + 2i| \leq 2; -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq 5\frac{\pi}{4}\right\}$

D) $\{Z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} / |Z| \leq 2; -\pi \leq \theta \leq \pi\}$

E) $\{Z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} / r \geq 2; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

**21.** ¿A qué conjunto de números complejos corresponde la región mostrada?




A) $\left\{Z = re^{i\theta} / |Z| \leq 3 \wedge |Z - \sqrt{3} - i| \geq 1 \wedge 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}\right\}$

B) $\left\{Z = re^{i\theta} / |Z| \leq 3 \wedge |Z - \sqrt{3} - i| \geq 1 \wedge 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}\right\}$

C) $\left\{Z = re^{i\theta} / |Z| \leq 3 \wedge |Z + \sqrt{3} + i| \geq 1 \wedge 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}\right\}$

D) $\left\{Z = re^{i\theta} / |Z| \leq 2 \wedge |Z - \sqrt{3} + i| \geq 1 \wedge 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}\right\}$

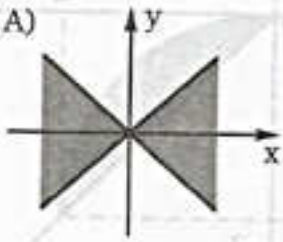
E) $\left\{Z = re^{i\theta} / |Z| \leq 2 \wedge |Z - i| \geq 1 \wedge 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}\right\}$

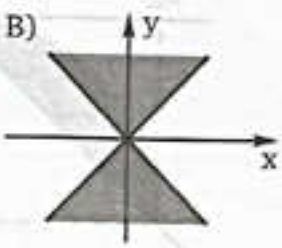
team CALAPENSHKO

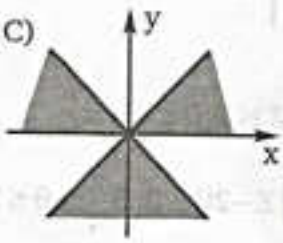


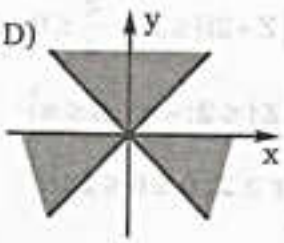
**22.** Cuál de las gráficas siguientes corresponde al conjunto de números complejos:

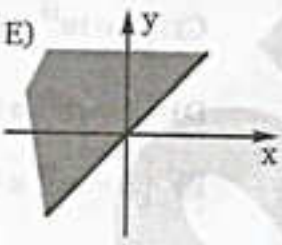
$$P=\left\{z\in\mathbb{C}/\,|e^{z^2}|\le 1\right\}$$

A) 


B) 

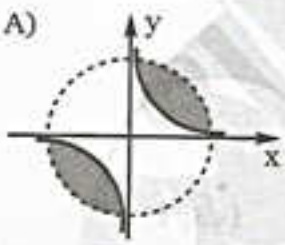

C) 

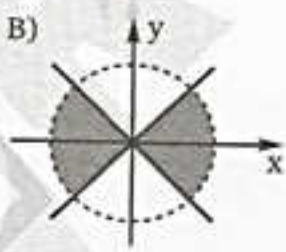

D) 

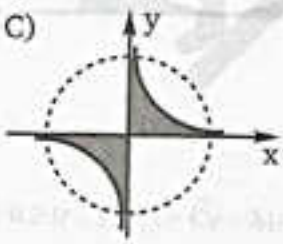

E) 

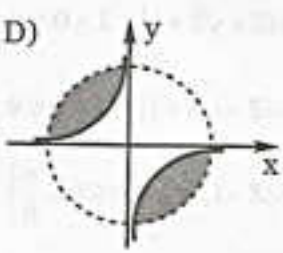

**23.** Graficar la región:

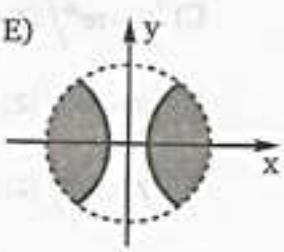
$$B=\{Z\in\mathbb{C}/\,Re(Z)\,.\,Im(Z)\ge 1\,;\,|Z|<4\}$$

A) 


B) 

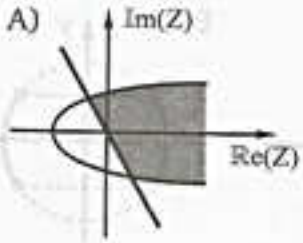

C) 

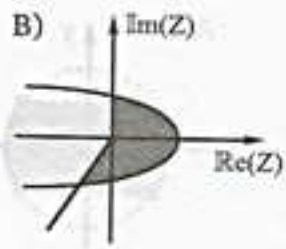

D) 

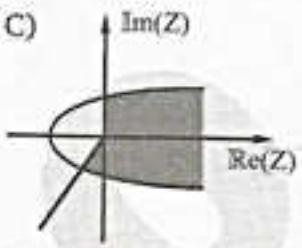

E) 

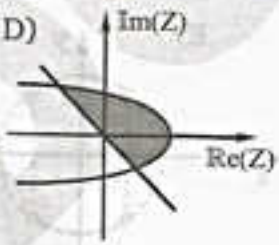

**24.** Graficar la región:

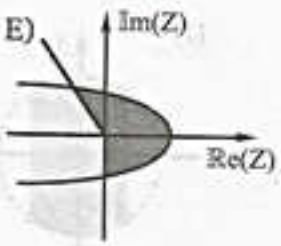
$$R=\left\{Z\in\mathbb{C}/\,|Z|+Re(\bar{Z})\le|i|\wedge\left|Arg(Z)-\frac{\pi}{4}\right|\le\frac{\pi}{2}\right\}$$

A) 


B) 

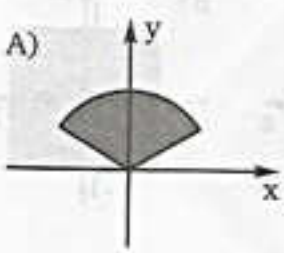

C) 

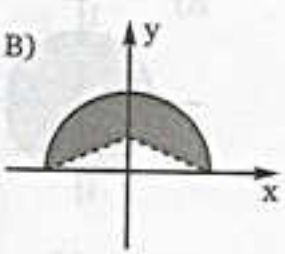

D) 

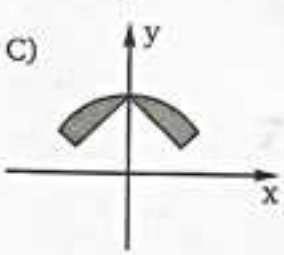

E) 

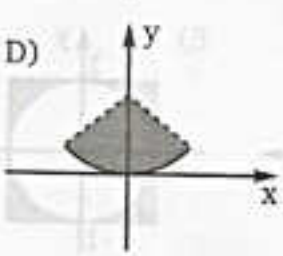

**25.** Graficar la región:

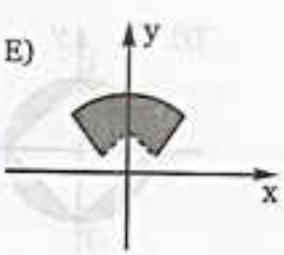
$$P=\left\{Z\in\mathbb{C}/\,|Z-i||\bar{Z}+i|\le 4\wedge|Re(Z)|+|Im(Z)|<\sqrt{3}\wedge\frac{\pi}{4}\le Arg(Z)\le\frac{3\pi}{4}\right\}$$

A) 


B) 


C) 


D) 


E) 

team CALAPENSHKO


**26.** La suma de las soluciones de la ecuación

$$(Z-1)^3 = 1$$

es:

A) 0 B) 1 C) i
D) 2i E) 3i

**27.** Siendo los conjuntos:

$$A = \left\{ Z \in \mathbb{C} / Z^2 + \overline{Z}^2 = 1 \right\}$$

$$B = \{ Z \in \mathbb{C} / |Z| = 1 \}$$

Hallar $A \cap B$

A) $\left\{ e^{i\frac{\pi}{3}} ; e^{i5\frac{\pi}{3}} \right\}$ B) $\left\{ e^{i\frac{\pi}{6}} ; e^{i5\frac{\pi}{6}} \right\}$

C) $\left\{ e^{i\frac{\pi}{3}} ; e^{-i5\frac{\pi}{3}} \right\}$

D) $\left\{ e^{i\frac{\pi}{6}} ; e^{-i5\frac{\pi}{6}} \right\}$ E) $\varnothing$

**28.** Indicar verdadero (V) o falso (F) a cada una de las siguientes proposiciones:

( ) $\cos i \in \mathbb{R}$

( ) $\text{Arg}(4^i) = 2 \ln 2$

( ) Se define el seno hiperbólico de x así:

$$\text{senh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow \text{senh}\pi = i \operatorname{sen} i\pi$$

A) VVV B) VVF C) FFV
D) FVV E) FFF

**29.** Halle $Z \in \mathbb{C}$ tal que verifique la siguiente igualdad:

$$\operatorname{sen} Z = 2$$

A) $-i \ln\left[(2+\sqrt{3})i\right]$

B) $i \ln\left[(2+\sqrt{3})i\right]$

C) $-i \ln\left[(2-\sqrt{3})i\right]$

D) $i \ln\left[(2-\sqrt{3})i\right]$

E) Hay dos respuestas

**30.** Reducir la siguiente expresión: si $n \in \mathbb{Z} \wedge i^2 = -1$

$$E = \frac{(1+i\cot x)^{2n} + (1-i\cot x)^{2n}}{(1+i\tan x)^2 + (1-i\tan x)^{2n}}$$

A) $\cot^n x$ B) $\tan^n x$

C) $(-1)^n . \tan^{2n} x$

D) $(-1)^n . \cot^{2n} x$ E) $(-1)^{n+1} . \cot^{2n} x$

**31.** Siendo: $Z = \operatorname{sen} e + i \cos e$ ; $e \cong 2{,}7182....$

Hallar: $\text{Re}\left(\frac{Z}{\overline{Z}}\right)$

A) 1 B) –1 C) cos2e
D) sen2e E) –cos2e

**32.** Si: $Z = \left[\frac{5+5i}{10\sqrt{3}+10i}\right]^{36}$

Halle: $\log_2(-Z)$

A) –36 B) –40 C) –42
D) –52 E) –54

**33.** Sean los números complejos:

$$Z_1 = \text{cis}\theta$$

$$Z_2 = \text{cis}\phi$$

Hallar la parte real de Z, siendo:

$$Z = Z_1 \overline{Z_2} + Z_2 \overline{Z_1}$$

A) $\cos(\theta - \phi)$ B) $2\cos(\theta + \phi)$
C) $2\cos(\theta - \phi)$
D) $\cos(\theta + \phi)$ E) 0

**34.** Siendo: $W = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

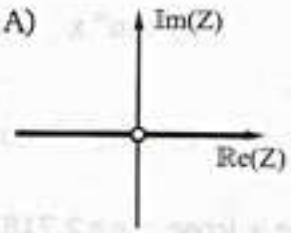
Hallar:

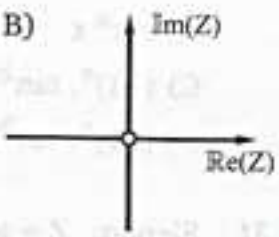
$$L = \operatorname{sen}\left[\frac{2}{n}\text{Arg}(1+w)^n\right]$$

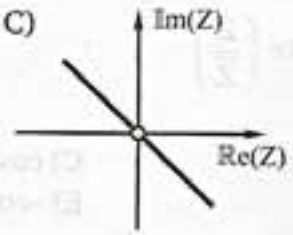
A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

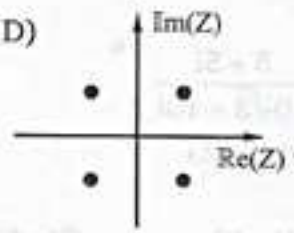
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

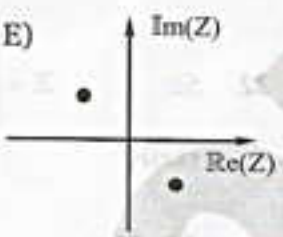
**35.** Dado el número complejo $Z = re^{i\theta}$ no nulo, se define el ortogonal del complejo Z como: $Z^{\perp} = iZ$, siendo Z y $Z^{\perp}$ recíprocos, entonces la gráfica de "Z" es:

A) 


B) 


C) 


D) 


E) 


**36.** Indicar verdadero (V) ó falso (F) a cada proposición:

I. $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2} \Leftrightarrow \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$

II. $\cos(i \ln 3) = \dfrac{5}{2}$

III. $\dfrac{(1+\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta)^2}{\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta} = 4\cos^4\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

A) VVV B) FFF C) VFF
D) FVV E) VFV

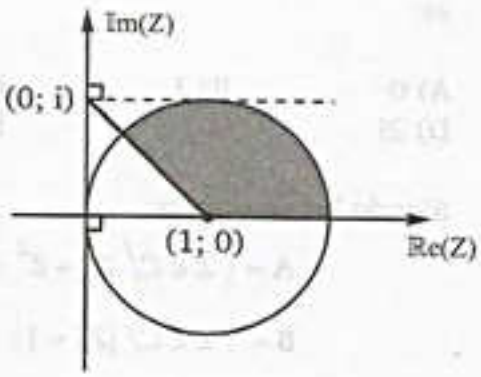
**37.** Siendo el número complejo $W = e^{i\theta}$
Hallar el número:

$$Z = W - \overline{W}^3$$

Considerar: $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

A) $2\,\text{sen}\,\theta e^{i\theta}$ B) $2\,\text{sen}\,2\theta e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$
C) $2\cos\theta e^{i\theta}$
D) $2\cos 2\theta e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ E) $2\,\text{sen}\,\theta e^{i(\pi-\theta)}$

**38.** A qué conjunto de números complejos corresponde el área sombreada.




A) $\{W \in \mathbb{C} / |W| \le 1\}$

B) $\left\{W \in \mathbb{C} / \ 0 \le W \le \dfrac{\pi}{4}\right\}$

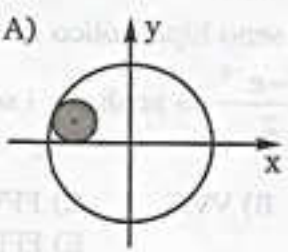
C) $\left\{W \in \mathbb{C} / \ |W| \le 1 \wedge 0 \le \text{Arg}W \le \dfrac{\pi}{4}\right\}$

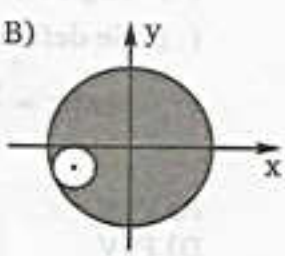
D) $\left\{W \in \mathbb{C} / \ |W-1| \le 1 \wedge 0 \le \text{Arg}(W-1) \le \dfrac{3\pi}{4}\right\}$

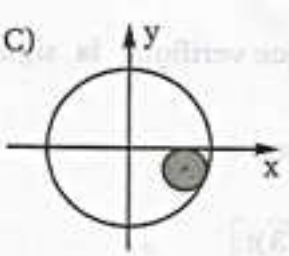
E) $\left\{W \in \mathbb{C} / \ |W-\sqrt{3}| \le 1 \wedge 0 \le \text{Arg}W \le \dfrac{\pi}{4}\right\}$

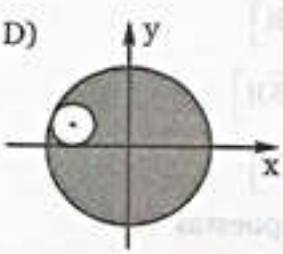
**39.** Indicar la región que mejor representa a:

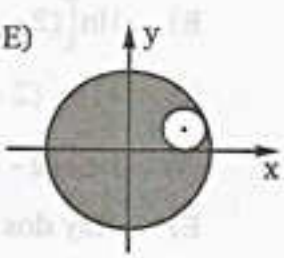
$$R = \left\{Z = re^{i\theta} / \ |Z| \le 3 \wedge |Z - \sqrt{3} - i| \ge 1\right\}$$

A) 


B) 


C) 


D) 


E) 

team CALAPENSHKO



**40.** Hallar el equivalente de:

$$Z = \arccos i$$

A) $i\ln(\sqrt{2}+1)$ B) $i\ln(\sqrt{2}+1)$

C) $-i\ln(\sqrt{2}i+i)$

D) $i\ln(\sqrt{2}i+i)$ E) $i\ln\sqrt{2}$

**41.** Si: $Z = x + iy$ siendo x e y reales. Cuál es el lugar geométrico que determina: $\left|\frac{Z-2}{Z+2}\right| = 2$

A) Una elipse
B) Una hipérbola
C) Una recta
D) Una circunferencia
E) Una parábola

**42.** Si, $a \in \mathbb{R}^+$, resolver en el campo complejo para Z en: $a^Z = 1$

A) $2\pi ki;\ k \in \mathbb{Z}$ B) $\frac{k\pi}{\ln a};\ k \in \mathbb{Z}$

C) $-\frac{\ln a}{\pi k};\ k \in \mathbb{Z}$

D) $\frac{\ln a}{\pi k};\ k \in \mathbb{Z}$ E) $\frac{2k\pi}{\ln a};\ k \in \mathbb{Z}$

**43.** Hallar la parte imaginaria de:

$$Z = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k e^{(-1)^{k+1} i}$$

A) 2n sen1 B) −2n sen1 C) 2n cos1

D) −2n cos 1 E) n sen1

**44.** Siendo $|a| < 1$, reducir:

$$F = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} a^k \operatorname{sen} k\theta}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} a^k \cos k\theta}$$

A) $\frac{a\operatorname{sen}\theta}{1+2a\cos\theta}$ B) $\frac{a\operatorname{sen}\theta}{1-2a\operatorname{sen}\theta}$ C) $\frac{a\operatorname{sen}\theta}{1-a\cos\theta}$

D) $\frac{a\operatorname{sen}\theta}{1+a\cos\theta}$ E) $\frac{a\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}$

**45.** Siendo: $Z = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$

Hallar el mínimo valor de:

$$E = \frac{1 + \operatorname{Re}(Z + Z^2 + Z^3)}{2\cos\theta}$$

A) −1 B) $-\frac{7}{8}$ C) $-\frac{9}{8}$

D) −2 E) $-\frac{5}{8}$

**46.** A partir de la siguiente identidad

$$\frac{(1+\cos x - i\operatorname{sen} x)^4}{\cos 2x - i\operatorname{sen} 2x} = A\cos 2x + B\cos x + C$$

Calcule el valor de: A + B + C = 16

A) 16 B)18 C) 20

D) 22 E) 24

**47.** Si: $Z + \frac{1}{Z} = 2\cos\theta\ ;\ Z \neq 0$

¿Cuál es el valor de $2\cos^m\theta;\ m \in \mathbb{Z}^+$?

A) $Z^m + \frac{1}{Z^m}$ B) $Z^m - \frac{1}{Z^m}$

C) $\frac{1}{Z^m} - Z^m$

D) $-\frac{1}{Z^m}$ E) $Z^m - \frac{2}{Z^m}$

**48.** ¿Cuál es el valor de:

$\cos 6\theta + 6\cos 4\theta + 15\cos 2\theta + 10$?

Usar: $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

A) $8\cos^6\theta$ B) $16\cos^6\theta$ C) $32\cos^6\theta$

D) $64\cos^6\theta$ E) $4\cos^6\theta$

**49.** Un complejo W es llamado raíz enésima de un complejo Z si y solo si: $W^n = Z$

Siendo: $Z = 1$

Entonces W es una raíz enésima de la unidad / $W \neq 1$.

Calcule el valor de:

$1 + W + W^2 + W^3 + \ldots + W^{n-1} = 0$

A) 4 B) 3 C) 2

D) 0 E) 1

**50.** ¿Cuáles son las soluciones de $\omega$ en :

$e^{i\omega} = \text{vers}\,\omega + i\,\text{cov}\,\omega$?

A) $\omega = \pi + 2k\pi + i\text{Ln}\sqrt{2};\ k \in \mathbb{Z}$

B) $\omega = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi + i\text{Ln}\sqrt{2};\ k \in \mathbb{Z}$

C) $\omega = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi + i\text{Ln}\sqrt{2};\ k \in \mathbb{Z}$

D) $\omega = \dfrac{\pi}{5} + 2k\pi + i\text{Ln}\sqrt{2};\ k \in \mathbb{Z}$

E) $\omega = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi + i\text{Ln}\sqrt{2};\ k \in \mathbb{Z}$

CALAPENSHKO

team CALAPENSHKO

Capítulo 21

# Límites y Derivadas

**CAPACIDADES**

- Reconocer límites trigonométricos.
- Identificar derivadas trigonométricas.
- Aplicar las operaciones con límites y derivadas a diversos problemas.

## HISTORIA DE LA DERIVADA, EL CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Los problemas típicos que dieron origen al Cálculo Infinitesimal, comenzaron a plantearse en la época clásica de Grecia (siglo III a.C.), pero, no se encontraron métodos sistemáticos de resolución hasta 20 siglos después (en el siglo XVII por obra de Newton y Leibnitz).

SIR ISAAC NEWTON
GENIO DEL CALCULO

En lo que atañe a las derivadas, existen dos conceptos de tipo geométrico: el problema de la tangente a una curva (concepto griego estático en contraste con el concepto cinemático de Arquímedes) y el problema de los extremos (máximos y mínimos) que en su conjunto dieron origen a lo que modernamente se conoce como Cálculo Diferencial.

El problema de la tangente a una curva, fue analizado y resuelto primeramente por Apolonio (200 a.C.). En el libro II de su obra, hace el estudio de los diámetros conjugados y de las tangentes a una cónica.

Newton, tardó mucho en dar a conocer sus resultados. La notación que usaba era mas sugestiva: lo que nosotros llamamos f (x) ó y, él lo llamaba "cantidades fluentes", y la derivada, D f (x) era llamaba "fluxión". Además, se le escribía  en lugar de D f (x). El mismo Newton escribía cosas como las siguientes: "Los momentos - las actuales diferenciales - dejan de ser momentos cuando alcanzan un valor finito, y deben por lo tanto considerarse como magnitudes finitas nacientes". Frases tan confusas, que Newton debía entenderlas muy bien, pero, para otro que no fuera su inventor del método, suenan bastante incomprensibles.

En el año de 1669, Isaac Barrow (1630 – 1677), recibió de su alumno Isaac Newton, un folleto titulado De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas. Contenía, nada menos, que el esbozo casi completo del Cálculo Diferencial e Integral. Aquel mismo año, Barrow decidió que su alumno sabía mucho mas que él, y que tenía por lo tanto mucho mas derecho a la cátedra de matemáticas con mas merecimientos que el propio Barrow; su titular. Con una generosidad y un desinterés difíciles de igualar, Barrow cedió su cátedra a Newton.

A los 40 años, siendo profesor de matemáticas de Cambridge, Newton escribió los Principia Mathematica, tal vez el tratado científico de mayor influencia jamás publicado. En el aplicó los conceptos del cálculo para explorar el universo, incluyendo los movimientos de la tierra, la luna y los planetas alrededor del sol. Se dice que un estudiante observó: "ahí va el hombre que escribió un libro que ni él ni los demás comprenden".

# LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

## INTRODUCCIÓN

La teoría de límite es base para el estudio del cálculo diferencia e integral. En el análisis matemático es una herramienta fundamental para las diversas aplicaciones en ciencias e ingeniería.

En este capítulo veremos los conceptos de límites y derivadas, dando énfasis a las aplicaciones trigonométricas.

## NOCIÓN INTUITIVA

Consideremos a la función F, definida por:

$$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, y = F(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} \;;\; x \neq 3$$

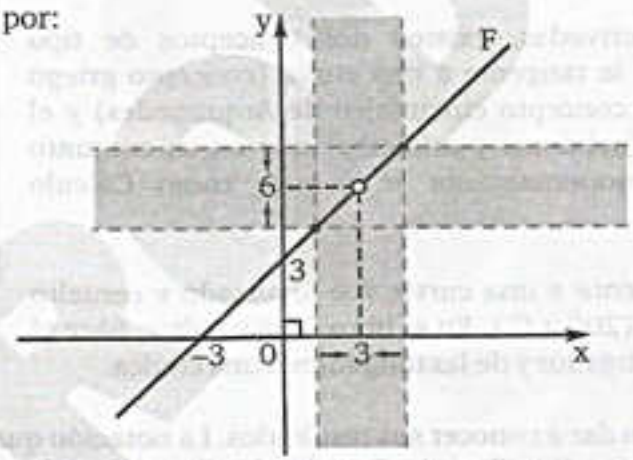
¿Qué sucede si "x" se aproxima a 3?

Redefiniendo la función, tenemos:

$$y = F(x) = \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} \;;\; x \neq 3$$

$$y = F(x) = x + 3$$

Cuya gráfica viene dada por:




Observar que si "x" se aproxima a 3 por derecha o izquierda "y" se aproxima a 6, es decir "x" tiende a $3(x \to 3)$, "y" tiende a 6. Concensuadamente se representa de la manera siguiente:

$$\lim_{x \to 3} F(x) = 6 \;\Leftrightarrow\; \lim_{x \to 3} \left( \frac{x^2 - 9}{x - 3} \right) = 6$$

## DEFINICIÓN DE LÍMITE

Siendo: $\varepsilon$ = Épsilon y $\delta$ = Delta

$$\lim_{x \to a} F(x) = L$$

El número real L es el límite de la función F en el punto "a" que no necesariamente pertenece al dominio de F, si para cada $\varepsilon > 0$ es posible determinar $\delta > 0$ que depende de "a" y "$\varepsilon$" tal que:

$$x \in D_F \wedge 0 < |x - a| < \delta \;\to\; |F(x) - L| < \varepsilon$$

team CALAPENSHKO


## LÍMITES LATERALES

### DEFINICIÓN 1

$L_1$ es el límite lateral derecho de F(x) cuando "x" tiende hacia "a" por la derecha.

$$\lim_{x \to a^+} F(x) = L_1$$

Donde $x \to a^+$ es equivalente a: $x > a$

### DEFINICIÓN 2

$L_2$ es el límite lateral izquierdo de F(x) cuando "x" tiende hacia "a" por la izquierda.

$$\lim_{x \to a^-} F(x) = L_2$$

Donde $x \to a^-$ es equivalente a: $x < a$

## TEOREMA DE UNICIDAD DEL LÍMITE

Dada la función real de variable real F, el límite:

$$\lim_{x \to a} F(x) = L$$

existe si y sólo si verifica:

$$\lim_{x \to a^+} F(x) = \lim_{x \to a^-} F(x) = L$$

## TEOREMA DEL SANDWICH

Sean las funciones $y = F(x), y = G(x) \wedge y = H(x)$ tales que: $F(x) \leq G(x) \leq H(x)$, si se cumple que:

$$\lim_{x \to a} F(x) = \lim_{x \to a} H(x) = L$$

Entonces se cumple que:

$$\lim_{x \to a} G(x) = L$$

## PROPIEDADES DEL LÍMITE

Consideremos a las funciones F y G definidas por:

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y = F(x);\ x \in D_F$$

$$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y = G(x);\ x \in D_G$$

y la constante "k", tenemos:

1) $\lim_{x \to a} k = k$

2) $\lim_{x \to a} [F(x) \pm G(x)] = \lim_{x \to a} F(x) \pm \lim_{x \to a} G(x)$

3) $\lim_{x \to a} [F(x)\ G(x)] = \lim_{x \to a} F(x) \cdot \lim_{x \to a} G(x)$

4) $\lim_{x \to a} \left[\frac{F(x)}{G(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} F(x)}{\lim_{x \to a} G(x)}$

5) $\lim_{x \to a} \left[F(x)^{G(x)}\right] = \left[\lim_{x \to a} F(x)\right]^{\lim_{x \to a} G(x)}$

6) $\lim_{x \to a} \left[\sqrt[G(x)]{F(x)}\right] = \sqrt[\lim_{x \to a} G(x)]{\lim_{x \to a} f(x)}$

## FORMAS INDETERMINADAS

Son expresiones que pueden asumir una infinidad de formas, entre ellas tenemos:

$$\frac{0}{0}\ ;\ \frac{\infty}{\infty}\ ;\ \infty-\infty\ ;\ 0.\infty\ \text{ y }\ 1^{\infty}$$

## CÁLCULO DE LÍMITES PARA LAS FORMAS INDETERMINADAS

### 1) FORMA $\frac{0}{0}$

Si una expresión asume esta forma cuando $x = a$, el factor $(x - a)$ se deberá cancelar del numerador y denominador.

Ejemplo: Calcular: $L = \lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right)$

Resolución: Una rápida inspección permite observar que si $x = 2$ obtenemos la forma $\frac{0}{0}$, luego levantando la indeterminación tenemos:

$$L = \lim_{x\to 2}\left[\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}\right]$$

$$L = \lim_{x\to 2}(x+2)$$

$$L = 2+2$$

$$\therefore\ L = 4$$

### 2) FORMA $1^{\infty}$

Si una función $y = F(x)$ asume esta forma se deberá buscar que: $F(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$

Para luego utilizar:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

Donde el número de Napier "e" es la aproximación de la serie:

$$1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}+\ldots = e$$

## LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS

1) $\lim\limits_{x\to 0}[\operatorname{sen}(x)] = 0$

2) $\lim\limits_{x\to 0}[\cos(x)] = 1$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right] = 1$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\tan(x)}{x}\right] = 1$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{arcsen}(x)}{x}\right] = 1$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\arctan(x)}{x}\right] = 1$

team CALAPENSHKO



**PROPIEDADES:** $\forall x \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R} - \{0\}$

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\operatorname{sen}(px)}{x}\right] = p$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\tan(px)}{x}\right] = p$

**PROPIEDAD**

El área de un círculo de radio R es $\pi R^2$

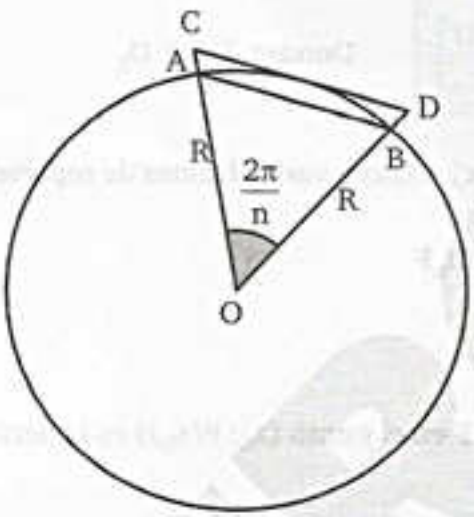
**DEMOSTRACIÓN**

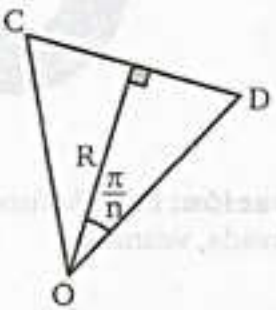
Sea S el área del círculo de radio R. Acotaremos S mediante los polígonos regulares de n-lados inscrito y circunscrito al círculo.

Sea el área del polígono inscrito = $S_1$.

el área del polígono circunscrito = $S_2$.

$\Rightarrow S_1 < S < S_2$



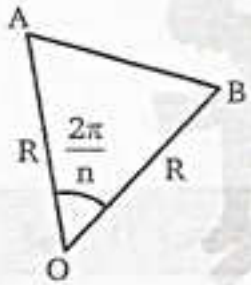




$$S_{COD} = \frac{R^2 \sec^2\frac{\pi}{n}}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$S_{COD} = \frac{R^2}{2}\sec^2\frac{\pi}{n}\left(2\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}\right)$$

$$S_{COD} = R^2\tan\frac{\pi}{n}$$

$$\Rightarrow S_2 = nR^2\tan\frac{\pi}{n}$$




$$S_{AOB} = \frac{R^2}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$\Rightarrow S_1 = \frac{nR^2}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

Ahora :

$$\lim_{n\to\infty} S_1 = \lim_{n\to\infty}\frac{nR^2}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\pi R^2\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}} = \pi R^2\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}}$$

Haciendo $h = \dfrac{2\pi}{n}$ como $n \to \infty \Rightarrow h \to 0 \quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_1 = \pi R^2\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} h}{h} = \pi R^2$

$$\lim_{n\to\infty} S_2 = \lim_{n\to\infty} nR^2\tan\frac{\pi}{n} = \lim_{n\to\infty}\pi R^2\frac{\tan\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}$$

Haciendo $h = \frac{\pi}{n}$ como $n \to \infty \Rightarrow h \to 0 \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_2 = \lim_{h\to 0} \pi R^2 \frac{\tanh}{h} = \pi R^2$

Por lo anterior: $\lim_{n\to\infty} S_1 = \lim_{n\to\infty} S_2 = \pi R^2$

Por el teorema del Sandwich: $\lim_{n\to\infty} S = \pi R^2 \Rightarrow S = \pi R^2$

$\therefore$ El área de un círculo de radio R es $\pi R^2$

## LA FUNCIÓN DERIVADA

### DEFINICIÓN

La derivada de una función F es otra función denotada por F', cuya regla de correspondencia es:

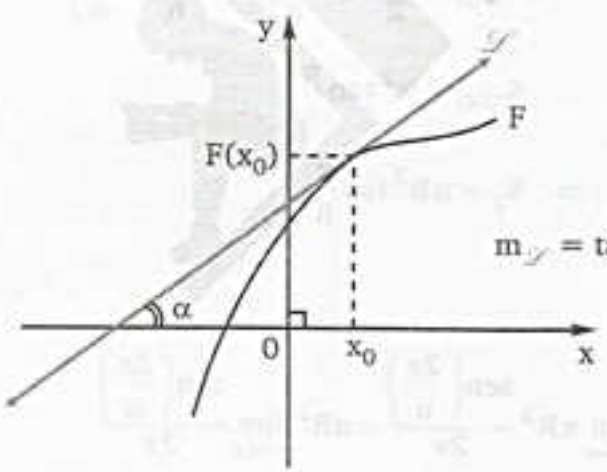
$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{F(x+h) - F(x)}{h}\right] \qquad \text{Donde: } D_{F'} \subset D_F$$

**Observación:** Dada la función F en forma explícita $y = F(x)$, existen varias formas de representar a su derivada, veamos:

$$y' = \frac{dy}{dx} = F'(x) = D_x y = D_x F$$

### INTERPRETACIÓN GRÁFICA

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función F en el punto $(x_0; F(x_0))$ es la derivada de F evaluada en $x_0$.




$m_{\mathcal{L}} = \tan\alpha$

$\mathcal{L}: y - F(x_0) = F'(x_0).(x - x_0)$

### TEOREMA

El valor de la derivada en cualquier punto de una curva es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto.

$$m = F'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h}$$

team CALAPENSHKO


## DERIVADA PARA FUNCIONES ALGEBRAICAS

1) $F(x) = k \ldots. (k = c.te) \rightarrow F'(x) = 0$

2) $F(x) = x^n \ldots. (n \in Q) \rightarrow F'(x) = n \cdot x^{n-1}$

3) $F(x) = G(x) \pm H(x) \rightarrow F'(x) = G'(x) \pm H'(x)$

4) $F(x) = [G(x)]^n \ldots. (n \in Q) \rightarrow F'(x) = n \cdot [G(x)]^{n-1} \cdot G'(x)$

5) $F(x) = G(x) \cdot H(x) \rightarrow F'(x) = G'(x) \cdot H(x) + G(x) \cdot H'(x)$

6) $F(x) = \dfrac{G(x)}{H(x)} \rightarrow F'(x) = \dfrac{G'(x) \cdot H(x) - G(x) \cdot H'(x)}{[H(x)]^2}$

## DERIVADA PARA FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

1) $y = \operatorname{sen}[F(x)] \rightarrow y' = \cos[F(x)] \cdot F'(x)$

2) $y = \cos[F(x)] \rightarrow y' = -\operatorname{sen}[F(x)] \cdot F'(x)$

3) $y = \tan[F(x)] \rightarrow y' = \sec^2[F(x)] \cdot F'(x)$

4) $y = \cot[F(x)] \rightarrow y' = -\csc^2[F(x)] \cdot F'(x)$

5) $y = \sec[F(x)] \rightarrow y' = \sec[F(x)] \cdot \tan[F(x)] \cdot F'(x)$

6) $y = \csc[F(x)] \rightarrow y' = -\csc[F(x)] \cdot \cot[F(x)] \cdot F'(x)$

## DERIVADA PARA FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS:

1) $y = \operatorname{arcsen}(x) \rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ; $\forall x \in \langle -1; 1 \rangle$

2) $y = \arccos(x) \rightarrow y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ; $\forall x \in \langle -1; 1 \rangle$

3) $y = \arctan(x) \rightarrow y' = \dfrac{1}{1+x^2}$ ; $x \in \mathbb{R}$

4) $y = \operatorname{arccot}(x) \rightarrow y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$ ; $x \in \mathbb{R}$

5) $y = \operatorname{arcsec}(x) \rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1} \cdot |x|}$ ; $\forall x \in \mathbb{R} - [-1; 1]$

6) $y = \operatorname{arccsc}(x) \rightarrow y' = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1} \cdot |x|}$ ; $\forall x \in \mathbb{R} - [-1; 1]$

team CALAPENSHKO


## APLICACIONES DE LA DERIVADA

### 1) EXTREMOS RELATIVOS (Máximos y Mínimos)

Dada la función $y = F(x)$, se resuelve la ecuación $F'(x) = 0$. sea $x_0$ la raíz de la ecuación anterior

1.1) Si $F''(x_0) < 0$, entonces $F(x)$ es máximo en $x = x_0$

1.2) Si $F''(x_0) > 0$, entonces $F(x)$ es mínimo en $x = x_0$

Tener en cuenta que $F''(x)$ representa a la segunda derivada de la función $F(x)$. Veamos un ejemplo:

Si: $F(x) = 2x^3 + 4x^2 + 2$

Entonces: $F'(x) = 6x^2 + 8x$

Asimismo: $F''(x) = 12x + 8$ "Segunda derivada de $F(x)$"

### 2) CÁLCULO DE LÍMITES (L' Hospitall – Bernoulli)

Sean $F(x)$ y $G(x)$ dos funciones derivables de modo que la expresión $\frac{F(x)}{G(x)}$ asume la forma $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ cuando $x = a$

Para levantar la interminación se deriva simultáneamente a cada término de la expresión:

$$\lim_{x \to a} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \to a} \frac{F'(x)}{G'(x)}$$

Este proceso se podrá realizar tantas veces se requiera para levantar la indeterminación.

Utilizaremos derivadas para hallar las pendientes de las rectas tangentes a las cónicas antes halladas en los capítulos 18 y 19 en un punto $P(x_0, y_0)$

### CIRCUNFERENCIA

$$\mathscr{C}: x^2 + y^2 = r^2$$

Derivando respecto a x

$$2x + 2y.y' = 0 \quad \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow \quad Y' = m_{\mathscr{L}_{tangente}} = -\frac{x_0}{y_0}$$

$$\mathscr{L}_{tangente}: y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$$

$$\rightarrow \quad \mathscr{L}_{tangente}: x_0 x + y y_0 = x_0^2 + y_0^2$$

como $P \in \mathscr{C} \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 = r^2$

$$\rightarrow \quad \mathscr{L}_{tangente}: x x_0 + y y_0 = r^2$$

**A todo el público en general:**

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

**Este libro no debe ser prostituito monetariamente**, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

**28 de agosto del 2020**

team CALAPENSHKO



**PARÁBOLA**

$$\mathscr{P}: x^2 = 4py$$

Derivando respecto a x

$$2x = 4py' \Rightarrow y' = \frac{x}{2p}$$

Para el punto $P(x_0, y_0)$

$$\Rightarrow m_{\mathscr{L}_{tangente}} = y' = \frac{x_0}{2p}$$

**ELIPSE**

$$\mathscr{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Derivando respecto a x

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y\,y'}{b^2} = 0 \rightarrow y' = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$$

Para el punto $P(x_0, y_0)$

$$\Rightarrow m_{\mathscr{L}_{tangente}} = y' = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}$$

twitter.com/calapenshko

**HIPÉRBOLA**

$$\mathscr{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Derivando respecto a x

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2y\,y'}{b^2} = 0 \rightarrow y' = \frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$$

Para el punto $P(x_0, y_0)$

$$\Rightarrow m_{\mathscr{L}_{tangente}} = y' = \frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}$$

team CALAPENSHKO



## EJERCICIOS DE APLICACIÓN

**1.** Calcular cada límite:

a) $L = \lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)$

---

b) $L = \lim_{x\to 1}\left(\frac{2|x-2|+1}{|x+2|}\right)$

---

c) $L = \lim_{x\to 0}\left(\frac{[\![x+4]\!]-2}{x+1}\right)$

---

**2.** Calcular cada límite:

a) $L = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}\right)$

---

b) $L = \lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3-8}{x-2}\right)$

---

c) $L = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right)$

---

**3.** Marcar (V) o falso (F):

a) $L = \lim_{x\to 0}\left(\frac{|x|}{x}\right) = 1$ ..... ( )

b) $L = \lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x+3}+1}{x+1}\right) = \frac{3}{2}$ ..... ( )

c) $L = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^7+1}{x^5+1}\right) = \frac{7}{5}$ ..... ( )

**4.** Calcular cada límite:

a) $L = \lim_{x\to 0}\left[\ \cos(x)+\operatorname{sen}(x)\ \right]$

---

b) $L = \lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\operatorname{sen}(x)}\right]$

---

c) $L = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan(x)}{x}\right]$

---

**5.** Determine la derivada en cada caso:

a) $F(x) = x^3 - 4x^2 + 10$

---

b) $F(x) = \cos(2x)$

---

c) $F(x) = \operatorname{sen}^3(x^2)$

---

**6.** Determine lo pedido en cada caso:

a) Si $F(x) = x^3$
$F'(0) + F''(-1) =$

---

b) Si $F(x) = 2\operatorname{sen}(4x)$
$F'(0) + F'(\pi) =$

---

c) Si $F(x) = \tan(x)$
$F'\left(\frac{\pi}{3}\right) - F'\left(\frac{\pi}{4}\right) =$

---

team CALAPENSHKO


## PROBLEMAS RESUELTOS

**PROBLEMA 1** Calcular:

$$L = \lim_{x \to 0}\left(\frac{\cos^2 x - x}{x - 1}\right)$$

**Resolución:** Una rápida inspección permite observar que $F(x) = \dfrac{\cos^2 x - x}{x - 1}$ tiene por dominio a $\mathbb{R} - \{1\}$, con lo cual $x = 0$ pertenece al dominio y no origina indeterminación.

$$L = \lim_{x \to 0}\left[\frac{(1)^2 - 0}{0 - 1}\right]$$

$$L = \lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{-1}\right)$$

$$L = \lim_{x \to 0}(-1)$$

$$\therefore \quad L = -1$$

**PROBLEMA 2** Calcular:

$$L = \lim_{x \to 0}\left(\frac{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}{x - \operatorname{sen} x}\right)$$

**Resolución:** Una rápida inspección permite observar que $F(x) = \dfrac{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}{x - \operatorname{sen} x}$ asume la forma $\dfrac{0}{0}$ si $x = 0$, con los cual es necesario levantar la indeterminación.

Por diferencia de cuadrados:

$$F(x) = \frac{(x + \operatorname{sen} x)(x - \operatorname{sen} x)}{x - \operatorname{sen} x}$$

$$F(x) = x + \operatorname{sen} x$$

Ahora en el límite tenemos:

$$L = \lim_{x \to 0}(x + \operatorname{sen} x)$$

$$L = 0 + 0$$

$$\therefore \quad L = 0$$

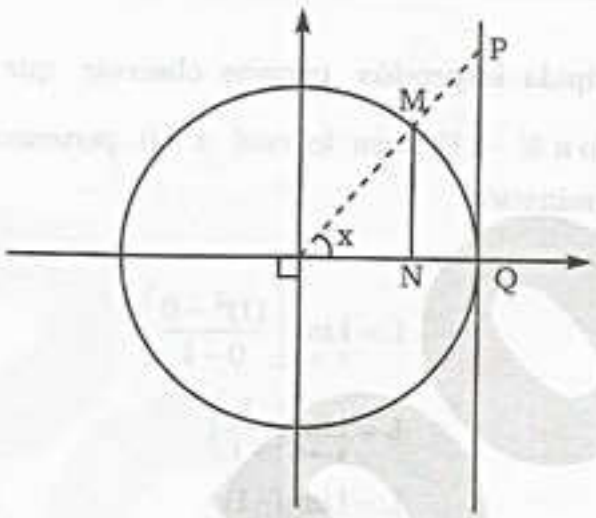
team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 3** Demostrar que:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right]$$

**Resolución:** En la C T tenemos un ángulo central que mide "x".




Observa que: $\overline{MN} \le \overset{\frown}{MQ} \le \overline{PQ}$ .....(1)

Asimismo:
$$\left.\begin{aligned}\overline{MN} &= \operatorname{sen}(x)\\ \overset{\frown}{MQ} &= x\\ \overline{PQ} &= \tan(x)\end{aligned}\right\}$$ .....(2)

Ahora (2) en (1): $\operatorname{sen}(x) \le x \le \tan(x)$

$$\operatorname{sen}(x) \le x \le \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$$

Por recíproco: $$\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$$

Multiplicando por sen(x):

$$\cos(x) \le \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \le 1$$

En el límite: $$\lim_{x\to 0}\cos(x) \le \lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right] \le \lim_{x\to 0}(1)$$

$$1 \le \lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right] \le 1$$

Finalmente por el teorema del sandwich tenemos:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right] = 1$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 4** Calcular:

$$L = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan(3x)}{5x}\right]$$

**Resolución:** Recordemos que si $x \to 0$ entonces $kx \to 0$, siendo k un real cualquiera.

Reescribiremos la expresión afectada por el límite de modo que aparezca $\frac{\tan(kx)}{(kx)}$, pues asi utilizaremos cierta propiedad ¿ cuál? esta : $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan(kx)}{kx}\right] = 1$

$$L = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan(3x)}{5x}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{3\,.\,\tan(3x)}{3\,.\,5x}\right]$$

$$L = \lim_{x\to 0}\left[\frac{3\,.\,\tan(3x)}{5\,.\,(3x)}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{3}{5}\,.\,\frac{\tan(3x)}{3x}\right]$$

$$L = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{5}\right).\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan(3x)}{3x}\right] = \frac{3}{5}.1$$

$$\therefore \quad \mathbf{L = \frac{3}{5}}$$

**PROBLEMA 5** Calcular:

$$L = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\,\mathrm{sen}\,x}{1-\cos x}\right)$$

**Resolución:** Observar que $F(x) = \frac{x\,\mathrm{sen}\,x}{1-\cos x}$ asume la forma $\frac{0}{0}$ cuando $x = 0$, luego levantando la indeterminación tenemos:

$$F(x) = \frac{x\,\mathrm{sen}\,x}{1-\cos x} = \frac{x\,\mathrm{sen}\,x\,.\,(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$

$$F(x) = \frac{x\,\mathrm{sen}\,x\,.\,(1+\cos x)}{1-\cos^2 x} = \frac{x\,\mathrm{sen}\,x(1+\cos x)}{\mathrm{sen}^2 x}$$

$$F(x) = \frac{x\,.\,(1+\cos x)}{\mathrm{sen}\,x} = \frac{1+\cos x}{\frac{\mathrm{sen}x}{x}}$$

Ahora en el límite : $\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1+\cos x}{\frac{\mathrm{sen}x}{x}}\right]$

$$L = \frac{\lim_{x\to 0}(1+\cos x)}{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{sen}x}{x}\right)} = \frac{1+1}{1}$$

$$\therefore \quad \mathbf{L = 2}$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 6** Dando uso de la función derivada demostrar que, si $F(x) = \text{sen}(x)$, entonces: $F'(x) = \cos(x)$

**Resolución:** De acuerdo con la definición procedemos de la manera siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} F(x) = \text{sen}(x) \\ F(x+h) = \text{sen}(x+h) \end{array}\right\} F(x+h) - F(x) = \text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)$$

$$F(x+h) - F(x) = 2\text{sen}\left(\frac{h}{2}\right).\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

Al dividir por "h" tenemos: $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \dfrac{2\text{sen}\left(\frac{h}{2}\right).\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}$

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\text{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)}.\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

twitter.com/calapenshko

Ahora en el límite : $\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}\right] = \lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{\text{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)}.\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right]$

Por definición : $F'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{\text{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)}.\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right]$

Por propiedad : $F'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{\text{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)}\right].\lim\limits_{h\to 0}\left[\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right]$

Fácilmente podemos notar que si $h \to 0$, entonces $\dfrac{h}{2} \to 0$.

Ahora tenemos : $F'(x) = \lim\limits_{\frac{h}{2}\to 0}\left[\dfrac{\text{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)}\right].\lim\limits_{\frac{h}{2}\to 0}\left[\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right]$

$$F'(x) = 1.\cos(x+0)$$

$$\therefore \quad \mathbf{F'(x) = \cos(x)}$$

team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 7** Si: $F(x) = \sqrt{\cos 2x}$ . Calcular: $F'(0)$

**Resolución:** Procedemos a determinar $F'(x)$

$$F(x) = \sqrt{\cos(2x)} = [\cos(2x)]^{\frac{1}{2}}$$

$$F'(x) = \frac{1}{2} . [\cos(2x)]^{\frac{1}{2}-1} . [-\text{sen}(2x) . 2]$$

$$F'(x) = \frac{1}{2} . [\cos(2x)]^{-\frac{1}{2}} . [-\text{sen}(2x) . 2]$$

$$F'(x) = \frac{-\text{sen}(2x)}{\sqrt{\cos(2x)}}$$

Entonces : $F'(0) = \frac{-0}{\sqrt{1}}$

$\therefore$ $\mathbf{F'(0) = 0}$

**PROBLEMA 8** Determine la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función:

$$y = F(x) = \sqrt{\text{sen}(\pi x) + \cos(\pi x)}$$

en el punto de abcisa $\frac{1}{2}$

**Resolución:** De acuerdo con el teorema procedemos a derivar a $F(x)$ para luego evaluar a su derivada en $x = \frac{1}{2}$.

$$F(x) = [\text{sen}(\pi x) + \cos(\pi x)]^{\frac{1}{2}}$$

$$F'(x) = \frac{1}{2}[\text{sen}(\pi x) + \cos(\pi x)]^{\frac{1}{2}-1} . [\cos(\pi x) . \pi - \text{sen}(\pi x) . \pi]$$

$$F'(x) = \frac{1}{2}[\text{sen}(\pi x) + \cos(\pi x)]^{-\frac{1}{2}} . [\cos(\pi x) - \text{sen}(\pi x)] . \pi$$

$$F'(x) = \frac{[\cos(\pi x) - \text{sen}(\pi x)] . \pi}{2\sqrt{\text{sen}(\pi x) + \cos(\pi x)}}$$

Si "m" es la pendiente solicitada, se plantea:

$$m = \frac{\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] . \pi}{2\sqrt{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}}$$

$$m = \frac{[0-1] . \pi}{2 . [1+0]} = \frac{(-1) . \pi}{2 . (1)}$$

$\therefore$ $\mathbf{m = -\frac{\pi}{2}}$

**PROBLEMA 9** Determine la segunda derivada de la función F, donde:

$$y = F(x) = \text{sen}(5x)$$

**Resolución:** El problema involucra derivar dos veces a F, veamos:

$$F(x) = \text{sen}(5x)$$

$$F'(x) = \cos(5x) \,.\, 5$$

$$F'(x) = 5 \,.\, \cos(5x)$$

Recordar que si : $A = B \,.\, C \Rightarrow A' = B' \,.\, C + B \,.\, C'$

$$F''(x) = 5' \,.\, \cos(5x) + 5 \,.\, \cos'(5x)$$

$$F''(x) = 0 \,.\, \cos(5x) + 5 \,.\, [-\text{sen}\,(5x) \,.\, 5]$$

$$F''(x) = 0 - 25 \,.\, \text{sen}(5x)$$

$$\therefore \quad \mathbf{F''(x) = -25\text{sen}(5x)}$$

**PROBLEMA 10** Calcular:

$$L = \lim_{x \to 0} \left( \frac{\cos x - 1}{\text{sen}x} \right)$$

**Resolución:** Una rápida inspección permite observar que la expresión : $F(x) = \dfrac{\cos x - 1}{\text{sen}x}$ asume la forma $\dfrac{0}{0}$ si $x = 0$.

Por Hospitall – Bernoulli:

$$L = \lim_{x \to 0} \left[ \frac{\cos x - 1}{\text{sen}\, x} \right] = \lim_{x \to 0} \left[ \frac{(\cos x - 1)'}{(\text{sen}\, x)'} \right]$$

$$L = \lim_{x \to 0} \left[ \frac{-\text{sen}\, x - 0}{\cos x} \right] = \lim_{x \to 0} \left( \frac{-\text{sen}\, x}{\cos x} \right)$$

$$L = \frac{-\text{sen}(0)}{\cos(0)} = \frac{-0}{1} = \frac{0}{1}$$

$$\therefore \quad \mathbf{L = 0}$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 11** Calcular:

$$L = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left( \frac{2}{\cos^2 x} - \frac{1}{1-\operatorname{sen} x} \right)$$

**Resolución:** Fácilmente podemos apreciar que si $x = \frac{\pi}{2}$, la expresión: $F(x) = \frac{2}{\cos^2 x} - \frac{1}{1-\operatorname{sen} x}$ asume la forma $\infty - \infty$.

Levantando la indeterminación mediante operaciones indicadas:

$$F(x) = \frac{2}{1-\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{1-\operatorname{sen} x}$$

$$F(x) = \frac{2-(1+\operatorname{sen} x)}{1-\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1-\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen}^2 x}$$

$$F(x) = \frac{1-\operatorname{sen} x}{(1-\operatorname{sen} x)(1+\operatorname{sen} x)} = \frac{1}{1+\operatorname{sen} x}$$

Ahora en el límite : $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} F(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{1+\operatorname{sen} x} \right)$

$$L = \frac{1}{1+\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1+1}$$

$$\therefore \quad L = \frac{1}{2}$$

**PROBLEMA 12** Si: $F(x) = \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+1}$

Calcular: $\lim_{x \to \infty} F(x)$

**Resolución:** Recordar que si $a, b \in \mathbb{R}$ tal que :

$$a \leq b \leq a$$

Entonces se cumple que : $a = b$

En el problema planteamos : $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$

Como $x \to +\infty$ (es positivo) : $-x \leq x \operatorname{sen} x \leq x$

Asimismo $x^2+1$ es positivo : $-\frac{x}{x^2+1} \le \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+1} \le \frac{x}{x^2+1}$

Ahora tomando límites : $-\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}\right) \le \lim_{x\to\infty} F(x) \le \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$

Poe propiedad de la forma $\frac{\infty}{\infty}$ : $-0 \le \lim_{x\to\infty} F(x) \le 0$

$0 \le \lim_{x\to\infty} F(x) \le 0$

$\therefore \quad \lim_{x\to\infty} F(x) = 0$

**PROBLEMA 13** Demostrar que si $F(x) = \operatorname{arc\,sen}(x)$, entonces:

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \; ; \; \forall\, x \in \langle -1; 1\rangle$$

**Resolución:**

A partir de la función : $F(x) = \operatorname{arcsen}(x)$

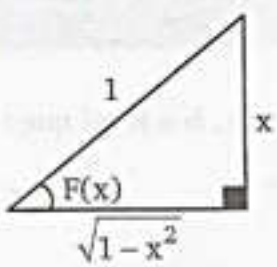
Tomando función seno : $\operatorname{sen}[F(x)] = \operatorname{sen}[\operatorname{arcsen}(x)]$

Por propiedad de inversa : $\operatorname{sen}[F(x)] = x$ .....(1)

En el proceso de derivada : $\cos[F(x)] \cdot F'(x) = 1$

$$F'(x) = \frac{1}{\cos[F(x)]} \quad .....(2)$$

De(1): $\operatorname{sen}[F(x)] = x$, tenemos :




Finalmente en (2) : $\mathbf{F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 14** Calcular:

$$L = \lim_{x \to 1}\left[\frac{\arctan(x) - \frac{\pi}{4}}{x-1}\right]$$

**Resolución:** Una rápida inspección permite observar que estamos frente a la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, luego seguir la regla de Hospitall - Bernoulli tenemos:

$$L = \lim_{x \to 1}\left[\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1}\right]$$

$$L = \lim_{x \to 1}\left[\frac{1}{1+x^2}\right] = \frac{1}{1+1}$$

$$\therefore \quad L = \frac{1}{2}$$

**PROBLEMA 15** Calcular:

$$L = \lim_{x \to 0}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]^{2\cot(x)}$$

**Resolución:** Observar que si $x = 0$, la expresión : $F(x)\left[\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]^{2\cot(x)}$ asume la forma $1^{\infty}$, luego procedemos a levantar la indeterminación:

$$F(x) = \left\{\left[\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2\right\}^{\cot(x)}$$

$$F(x) = \left\{\underbrace{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}_{\text{Identidad Pitagórica}} + \underbrace{2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}_{\text{Ángulo doble}}\right\}^{\cot(x)}$$

$$F(x) = \{1 + \operatorname{sen}(x)\}^{\cot(x)} = \{1 + \operatorname{sen}(x)\}^{\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}}$$

$$F(x) = \left\{[1 + \operatorname{sen}(x)]^{\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}}\right\}^{\cos(x)}$$

Ahora en el límite tenemos:

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \left\{\lim_{x\to 0}\left[1+\text{sen}(x)\right]^{\frac{1}{\text{sen}(x)}}\right\}^{\lim_{x\to 0}\cos(x)}$$

$$L = \{e\}^1$$

$$\therefore\ L = e$$

**PROBLEMA 16** Calcular:

$$L = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan(x)-\text{sen}(x)}{x^3}\right]$$

**Resolución:** Reemplazando $x = 0$ en $F(x) = \dfrac{\tan(x)-\text{sen}(x)}{x^3}$ se obtiene la forma $\dfrac{0}{0}$, luego procedemos a levantar la indeterminación:

$$F(x) = \frac{\dfrac{\text{sen}(x)}{\cos(x)} - \text{sen}(x)}{x^3} = \frac{\text{sen}(x)\,.\,[1-\cos(x)]}{x^3\,.\,\cos(x)}$$

$$F(x) = \frac{\text{sen}(x)\,.\,[1-\cos(x)][1+\cos(x)]}{x^3\,.\,\cos(x)\,.\,[1+\cos(x)]}$$

$$F(x) = \frac{\text{sen}(x)\,.\,[1-\cos^2(x)]}{x^3\,.\,\cos(x)\,.\,[1+\cos(x)]} = \frac{\text{sen}(x)\,.\,\text{sen}^2(x)}{x^3\,.\,\cos(x)\,.\,[1+\cos(x)]}$$

$$F(x) = \frac{\text{sen}^3(x)}{x^3\,.\,\cos(x)\,.\,[1+\cos(x)]} = \left[\frac{\text{sen}(x)}{x}\right]^3 . \frac{1}{\cos(x)\,.\,[1+\cos(x)]}$$

En el límite $x = 0$: $\quad L = [1]^3 . \dfrac{1}{(1)\,.\,[1+1]}$

$$L = 1 . \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ L = \frac{1}{2}$$

team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 17** Calcular:

$$L = \lim_{x\to 0}\left\{\frac{[\arcsen(x)][\tan(2x)]}{3x^2}\right\}$$

**Resolución:** Reacomodando la expresión afectada por el límite tenemos:

$$L = \frac{1}{3}.\lim_{x\to 0}\left[\frac{\arcsen(x)}{x}\right].\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan(2x)}{x}\right]$$

$$L = \frac{1}{3}.\lim_{x\to 0}\left[\frac{\arcsen(x)}{x}\right].2.\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan(2x)}{2x}\right]$$

Por propiedad : $L = \frac{1}{3}.1.2.1$

$$\therefore\ \mathbf{L = \frac{2}{3}}$$

**PROBLEMA 18** Calcular:

$$L = \lim_{x\to 0}\left[1+3\tan^2(x)\right]^{\cot^2(x)}$$

**Resolución:** Una rápida inspección permite observar que si $x = 0$, la expresión: $F(x) = \left[1+3\tan^2(x)\right]^{\cot^2(x)}$ asume la forma $1^{\infty}$. Luego procedemos a levantar la indeterminación.

$$F(x) = \left\{\left[1+3\tan^2(x)\right]^{\frac{1}{\tan^2(x)}}\right\}^{\frac{3}{3}}$$

$$F(x) = \left\{\left[1+3\tan^2(x)\right]^{\frac{1}{3\tan^2(x)}}\right\}^{3}$$

En el límite $x = 0$: $L = \{e\}^3$

$$\therefore\ \mathbf{L = e^3}$$

team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 19** Si: $F(x) = \operatorname{sen}(2x) + \cos(5x)$

Calcular: $F'(\pi)$

**Resolución:** Hallemos $F'(x)$ a partir de $F(x)$, veamos:

$$F(x) = \operatorname{sen}(2x) + \cos(5x)$$
$$F'(x) = \cos(2x) \,.\, 2 - \operatorname{sen}(5x) \,.\, 5$$

Ahora $x = \pi$:

$$F'(\pi) = \cos(2\pi) \,.\, 2 - \operatorname{sen}(5\pi) \,.\, 5$$
$$F'(\pi) = 1 \,.\, 2 - 0 \,.\, 5 = 2 - 0$$

$$\therefore \; \mathbf{F'(\pi) = 2}$$

**PROBLEMA 20** Si: $F(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\csc\left(\dfrac{x}{2}\right)}}$

Calcular: $\left[F'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right]^2$

**Resolución:** La expresión $F(x)$ se puede reescribir de la manera siguiente:

$$F(x) = 2\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)} = 2 \,.\, \left[\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$F'(x) = 2 \,.\, \frac{1}{2} \,.\, \left[\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}-1} \,.\, \cos\left(\frac{x}{2}\right) \,.\, \frac{1}{2}$$

$$F'(x) = \left[\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \,.\, \cos\left(\frac{x}{2}\right) \,.\, \frac{1}{2}$$

$$F'(x) = \frac{\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)}{2 \,.\, \sqrt{\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)}}$$

Haciendo $x = \dfrac{\pi}{3}$:

$$F'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)}{2\sqrt{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)}} = \frac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{\dfrac{1}{2}}}$$

$$F'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3} \,.\, \sqrt{2}}{2 \,.\, 2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\therefore \; \left[F'\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^2 = \frac{3}{8}$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 21** Calcular $F'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Sabiendo que: $F(x) = \text{sen}[\cos(2x)]$

**Resolución:** Hallemos F'(x) a partir de F(x), veamos:

$$F(x) = \text{sen}[\cos(2x)]$$

$$F'(x) = \cos[\cos(2x)] \cdot \frac{d\cos(2x)}{dx}$$

$$F'(x) = \cos[\cos(2x)] \cdot -\text{sen}(2x) \cdot 2$$

$$F'(x) = -2 \cdot \text{sen}(2x) \cdot \cos[\cos(2x)]$$

Para $x = \frac{\pi}{4}$:

$$F'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$F'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \cdot 1 \cdot \cos[0]$$

$$F'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \cdot 1$$

$$\therefore \mathbf{F'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2}$$

**PROBLEMA 22** Calcular:

$$L = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left[ \frac{\cos(x) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} \right]$$

**Resolución:** Una rápida inspección permite observar que si $x = \frac{\pi}{4}$, la expresión afectada por el límite asume la forma $\frac{0}{0}$, luego por Hospitall – Beernoulli tenemos:

$$L = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left[ \frac{-\text{sen}(x) - 0}{1 - 0} \right]$$

$$L = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} [-\text{sen}(x)]$$

En el límite $x = \frac{\pi}{4}$: $L = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$\therefore \mathbf{L = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 23** Si: $F(x) = \ln(\text{Sen}x)$. Calcular $F'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

**Resolución:** Recordar que si $y = \ln F$, entonces: $y' = \frac{F'}{F}$

Se tiene: $F(x) = \ln(\text{sen}\,x)$

Derivando: $F'(x) = \frac{(\text{sen}\,x)'}{\text{sen}\,x} = \frac{\cos x \,.\, 1}{\text{sen}\,x}$

$$F'(x) = \frac{\cos x}{\text{sen}x} = \cot x$$

Haciendo $x = \frac{\pi}{4}$: $F'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$\therefore \mathbf{F'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1}$$

**PROBLEMA 24** Calcular:

$$L = \lim_{x\to 0}\left[\frac{xe^{7x} - x}{1 - \cos(\sqrt{7}x)}\right]$$

**Resolución:** Sea $F(x) = \frac{xe^{7x} - x}{1 - \cos(\sqrt{7}x)}$, si $x = 0$ obtenemos la forma $\frac{0}{0}$, luego por Hospitall – Bernoulli:

$$G(x) = \frac{\frac{d(xe^{7x} - x)}{dx}}{\frac{d\left[1 - \cos(\sqrt{7}x)\right]}{dx}} = \frac{e^{7x} + 7xe^{7x} - 1}{\sqrt{7}\,\text{sen}(\sqrt{7}x)}$$

Evaluando en $x = 0$ vuelve a salir $\frac{0}{0}$, nuevamente aplicamos Hospitall – Bernoulli

$$H(x) = \frac{\frac{d(e^{7x} + 7xe^{7x} - 1)}{dx}}{\frac{d\left[\sqrt{7}\,\text{sen}(\sqrt{7}x)\right]}{dx}} = \frac{14e^{7x} + 49xe^{7x}}{7\cos(\sqrt{7}x)}$$

Haciendo $x = 0$: $L = \frac{14 \,.\, e^0 + 49 \,.\, 0 \,.\, e^0}{7 \,.\, \cos(0)} = \frac{14 \,.\, 1 + 0}{7 \,.\, 1}$

$$L = \frac{14 + 0}{7} = \frac{14}{7}$$

$$\therefore \mathbf{L = 2}$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 25** Calcular los valores de x, donde la función y = F(x) alcanza valores máximos y mínimos:

$$F(x) = \text{sen}(x) \cdot \cos(x)$$

**Resolución:** De acuerdo con la teoría, hallemos los valores extremos de F(x), la función dada es:

$$F(x) = \text{sen}(x) \cdot \cos(x)$$
$$F(x) = \frac{1}{2}[2\,\text{sen}(x) \cdot \cos(x)]$$
$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \text{sen}(2x)$$

i) Hallemos los puntos críticos:

$$F'(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) \cdot 2$$
$$F'(x) = \cos(2x)$$

Ahora se debe plantear:

$$\cos(2x) = 0$$
$$2x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \;;\; k \in \mathbb{Z}$$
$$x = (2k+1)\frac{\pi}{4} \;;\; k \in \mathbb{Z}$$

Fácilmente notamos que:

$$x \in \left\{ \ldots ; \frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4} ; \frac{5\pi}{4} ; \frac{7\pi}{4} ; \ldots \right\}$$

ii) Por la segunda derivada:

$$F'(x) = \cos(2x)$$
$$F''(x) = -2\,\text{sen}(2x)$$

Ahora en cada punto crítico:

$$F''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 < 0 \Rightarrow F\left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ es máximo.}$$
$$F''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2 > 0 \Rightarrow F\left(\frac{3\pi}{4}\right) \text{ es mínimo.}$$
$$F''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -2 < 0 \Rightarrow F\left(\frac{5\pi}{4}\right) \text{ es máximo.}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Luego de un minucioso análisis se concluye que:

I. y = F(x) es máximo en :

$$x = \ldots ; \frac{\pi}{4} ; \frac{5\pi}{4} ; \frac{9\pi}{4} ; \ldots ; (4k+1)\frac{\pi}{4} \;;\; k \in \mathbb{Z}$$

II. y = F(x) es mínimo en :

$$x = \ldots ; \frac{3\pi}{4} ; \frac{7\pi}{4} ; \frac{11\pi}{4} ; \ldots ; (4k+3)\frac{\pi}{4} \;;\; k \in \mathbb{Z}$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS

**1.** Calcular:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\text{sen}(5x)}{\text{sen}(2x)}\right]$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{2}{5}$
D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{3}{5}$

**2.** Calcular:

$$\lim_{x\to \pi}\left(\frac{\cos x-\text{sen}\,x}{\cos^2 x}\right)$$

A) 0 B) 1 C) −1
D) $\frac{1}{2}$ E) −2

**3.** Calcular:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\text{sen}(\pi x)}{\text{sen}(3\pi x)}\right)$$

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

**4.** Si:

$$F(x) = \cos(5x) + 1$$

Calcular: $F'\left(\frac{\pi}{5}\right)$

A) −1 B) 1 C) 0
D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{5}$

**5.** Si:

$$F(x) = \text{sen}^2(3x)$$

Calcular $F'(x)$

A) sen(6x) B) cos(6x)
C) 3sen(3x)
D) 3cos(6x) E) 3sen(6x)

**6.** Si:

$$F(x) = \text{sen}38° + \cos 51° - \text{sen}51°.\cos 38°$$

Calcular: $F'(\pi)$

A) 0 B) 1 C) $\frac{\sqrt{5}}{2}-1$
D) $\frac{\sqrt{5}}{2}+1$ E) N.A.

**7.** Calcular:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\text{arcsen}(2x)}{x}\right]$$

A) 0 B) 1 C) 2
D) $\frac{1}{2}$ E) −1

**8.** Calcular:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\text{arcsen}(3x)}{5x}\right]$$

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{1}{5}$
D) 5 E) $\frac{1}{3}$

**9.** Calcular:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\arctan(2x)}{\text{sen}(3x)}\right]$$

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{2}$
D) 1 E) 0

**10.** Calcular:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{x-\text{sen}(2x)}{x+\text{sen}(3x)}\right]$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$
D) $-\frac{1}{4}$ E) $\frac{2}{5}$

team CALAPENSHKO


**11.** Calcular:

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-\sqrt{x}}\right]$$

A) $\pi$ B) $2\pi$ C) $-\pi$
D) $\frac{3\pi}{2}$ E) N.A.

**12.** Calcular:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left[\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos(x)}\right]$$

A) 1 B) $-1$ C) 2
D) $-2$ E) 0

**13.** Calcular:

$$\lim_{x\to 1}\left[(1-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]$$

A) $\frac{2}{\pi}$ B) $\frac{1}{\pi}$ C) $\frac{3}{\pi}$
D) $\frac{4}{\pi}$ E) $\frac{5}{\pi}$

**14.** Calcular:

$$\lim_{x\to\infty}\left[x\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)\right]$$

A) 1 B) $\pi$ C) $\frac{\pi}{2}$
D) $2\pi$ E) N.A.

**15.** Calcular:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\text{sen}\,x-\text{sen}\,a}{x-a}\right)$$

A) sena B) 0 C) 1
D) cosa E) $-1$

**16.** Calcular:

$$\lim_{x\to -2}\left[\frac{\tan(\pi x)}{x+2}\right]$$

A) 0 B) 1 C) $-1$
D) $\pi$ E) $-\pi$

**17.** Calcular:

$$A^2+B^2$$

Sabiendo que:

$$A=\lim_{x\to 0}\left[x\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$B=\lim_{x\to\infty}\left[x\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

A) 2 B) 4 C) 8
D) 16 E) 1

**18.** Calcular:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan(x)-\text{sen}(x)}{x}\right]$$

A) 0 B) 1 C) $\frac{1}{2}$
D) $-\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

**19.** Calcular:

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{1-x^2}{\text{sen}(\pi x)}\right]$$

A) $\frac{1}{\pi}$ B) $\frac{2}{\pi}$ C) $\frac{3}{\pi}$
D) $\frac{4}{\pi}$ E) $\frac{5}{\pi}$

**20.** Calcular: $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\sqrt{\cos(x)}}{x^2}\right]$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

**21.** Calcular:

$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}$$

A) 0 B) 1 C) e
D) $e^{-1}$ E) N.A

**22.** Calcular:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{1+x\operatorname{sen} x}-\sqrt{\cos 2x}}{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right]$$

A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) $\frac{1}{2}$

**23.** Calcular:

$$\lim_{x\to 0}[(1-\cos x)\cot x]$$

A) 2 B) 1 C) 0
D) –1 E) –2

**24.** Calcular:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}^2(2x)+16\tan^2(x)-16\operatorname{sen}^2(x)}{16x^2}\right]$$

A) 0 B) $\frac{1}{16}$ C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{1}{2}$ E) N.A.

**25.** Calcular:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\tan a-\tan x}{x-a}\right)$$

A) $\sec^2 a$ B) $-\sec^2 a$ C) cota
D) 0 E) ∄

**26.** Calcular:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2}{1-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right]$$

A) 0 B) 1 C) $\frac{1}{2}$
D) 2 E) N.A.

**27.** Calcular:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{x-\operatorname{sen}(4x)}{x+\operatorname{sen}(3x)}\right]$$

A) 1 B) $-\frac{5}{2}$ C) $-\frac{4}{3}$
D) $-\frac{3}{4}$ E) $\frac{3}{5}$

**28.** Calcular:

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{\operatorname{sen}(1-x)}{\sqrt{x}-1}\right]$$

A) 1 B) –2 C) –1
D) 2 E) 0

**29.** Calcular:

$$\lim_{x\to 0}\left[\cot(2x)\,.\,\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]$$

A) 0 B) 1 C) 2
D) $\frac{1}{2}$ E) ∄

**30.** Calcular:

$$\lim_{x\to\pi}\left[\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\operatorname{sen}(x)}{x-\pi}\right]$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{5}{2}$ E) 2

team CALAPENSHKO


**31.** Calcular: $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\text{sen}^3(2x)}{x\text{sen}^2(3x)}\right]$

A) $\frac{5}{6}$ B) $\frac{6}{7}$ C) $\frac{7}{8}$
D) $\frac{8}{9}$ E) N.A.

**32.** Calcular: $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos(h+2x)-\cos(h-3x)}{x}\right]$

A) $-2\text{senh}$ B) $-5\text{senh}$ C) $2\text{senh}$
D) $5\text{senh}$ E) 0

**33.** Calcular: $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{1-2\cos(x)}{\text{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}\right]$

A) 0 B) 1 C) $\sqrt{2}$
D) $\sqrt{3}$ E) 2

**34.** Calcular: $\lim_{x\to\pi}\left[\frac{\text{sen}\,x}{\pi-x}+\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right]$

A) $\pi+1$ B) 2 C) 1
D) $\frac{3}{4}$ E) $\nexists$

**35.** Determine la derivada de: $F(x)=\frac{2x+4}{\sqrt{x+1}}$

en $x = A$, siendo: $A=\lim_{x\to\pi}\left[\frac{1+\cos^3(x)}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right]$

A) $\frac{7}{8}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{3}{8}$
D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{6}$

**36.** Si: $F(x)=\text{sen}^2\left(\frac{3x}{2}\right)$ Calcular: $F'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

A) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
D) $-\frac{3\sqrt{2}}{4}$ E) N.A.

**37.** Si: $F(x)=\cos(\pi x)$; $x(T)=\sqrt{T+1}$

Calcular: $\frac{dF}{dT}$ para $T=0$

A) $-\frac{\pi}{4}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{\pi}{2}$
D) $\frac{1}{4}$ E) 0

**38.** Si: $F(x)=\text{sen}(x)+3x$ y $G(x)=(x+2)^3$

Determine la fórmula de: $\frac{d}{dT}(F\circ G)(x)$

A) $3[\cos(x+3)](x+2)^2$
B) $3[\cos(x+3)](x+2)$
C) $3(x+2)^2[\cos(x+2)^3+3]$
D) $3(x+2)^2[\cos^3(x+2)+3]$
E) $3(x+2)^2[\cos(x+2)+3]$

**39.** Calcular "ab" si $F(x) = a\cos(x) + b$, cumpliendose que:

$$F\left(\frac{\pi}{3}\right)=2 \wedge F'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$$

A) $\frac{7}{2}$ B) $-\frac{21}{2}$ C) $-3$
D) $-\frac{3}{2}$ E) $\frac{21}{2}$

**40.** Si: $y=\text{arcsen}(\ln(x))+\text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Determine: $\frac{dy}{dx}$

A) $\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}$ B) $\frac{-2}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}$
C) $\frac{3}{\sqrt{1-\ln^2(x)}}$
D) $\frac{4x}{\sqrt{1-\ln^2(x)}}$ E) $\frac{7}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}$

**41.** Si: $y = \tan\left[\arccos(x) - \frac{\pi}{2}\right] + \tan\left(\frac{3\pi}{5}\right)$;

$x \in \langle -1; 1\rangle$. Determine $\frac{dy}{dx}$

A) $-\frac{1}{(1-x^2)^3}$ B) $-\frac{1}{(1-x)^{3/2}}$ C) $\frac{1}{x^2-1}$

D) $\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$ E) $\frac{-1}{(1-x^2)^2}$

**42.** Determine: $\frac{d}{dx}\left[F\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)\right]$

A) $\left(\frac{1}{1+\cos 2x}\right).F'\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)$

B) $\left(\frac{2}{1-\operatorname{sen} 2x}\right).F'\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)$

C) $\left(\frac{2}{1+\operatorname{sen} 2x}\right).F'\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)$

D) $\left(\frac{1}{1-\cos 2x}\right).F'\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)$

E) N.A.

**43.** Si: $F(x) = \operatorname{sen}^3(\cos 7x^2)$
Determine: $F'(x)$

A) $-42x\operatorname{sen}^2(\cos 7x^2).\operatorname{sen}7x^2.\cos(\cos 7x^2)$

B) $-42x\operatorname{sen}^2 x(\cos 7x^2).\cos(\cos 7x^2)$

C) $-42x\operatorname{sen}^2 x(\cos 7x^2).\operatorname{sen}7x^2.\cos 7x$

D) $-42x\operatorname{sen}^2(\cos 7x^2).\cos(\cos 7x^2)$

E) N.A.

**44.** Calcular: $L = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(\tan ax)}{\ln(\tan bx)}\right]$

A) 0 B) 1 C) $\frac{1}{2}$

D) $\ln a$ E) $\ln b$

**45.** Calcular: $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x-\ln(\cos x)}{x^2}\right]$

A) 1 B) $-1$ C) 0

D) $\frac{1}{2}$ E) $-\frac{1}{2}$

**46.** Calcular: $\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^x+\operatorname{sen} x-1}{\ln(1+x)}\right]$

A) 2 B) 3 C) 4

D) 5 E) 6

**47.** Calcular el valor de "k", donde:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^{mx}-\cos(mx)}{e^{nx}-\cos(nx)}\right] = 2$$

Siendo: $k = \frac{m+7n}{m+n}$

A) 2 B) 3 C) 4

D) 5 E) 6

**48.** Calcular: $\lim_{x\to\infty}\left(\operatorname{sen}\sqrt{x+2} - \operatorname{sen}\sqrt{x}\right)$

A) $-2$ B) $-1$ C) 0

D) 1 E) 2

**49.** Calcular: $F'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Si: $F(x) = \operatorname{sen}(x).\cos(x)$

A) 2 B) $-2$ C) 0

D) $-\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

**50.** Calcular:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^x-e^{-x}}{\operatorname{sen}(x)}\right]$$

A) $-2$ B) $-1$ C) 0

D) 1 E) 2

team CALAPENSHKO

Capítulo 22

# Traslación y Rotación de Ejes Coordenadas Polares

**CAPACIDADES**

- Representar adecuadamente la gráfica de una cónica.
- Identificar el tipo de cónica a partir de la ecuación completa de segundo grado para las variables x e y.

## ESTUDIOS DEL MOVIMIENTO DE ROTACIÓN

### TEOREMA DE ROTACIÓN DE EULER

En matemáticas, el teorema de rotación de Euler dice que cualquier rotación o conjunto de rotaciones sucesivas puede expresarse siempre como una rotación alrededor de una única dirección o eje de rotación principal. De este modo, toda rotación (o conjunto de rotaciones sucesivas) en el espacio tridimensional puede ser especificada a través del eje de rotación equivalente definido vectorialmente por tres parámetros y un cuarto parámetro representativo del ángulo rotado. Generalmente se denominan a estos cuatro parámetros grados de libertad de rotación.

EL PLANETA TIERRA

### COMPOSICIÓN DE ROTACIONES EN INFORMÁTICA GRÁFICA

En informática gráfica a veces existe cierta confusión sobre la interpretación de la composición de rotaciones en torno a los ejes (en el espacio euclídeo tridimensional), ya que la palabra 'ejes' puede referirse tanto a los ejes del sistema de referencia del mundo como a los ejes del sistema de referencia local.

### CONCEPTO DE ROTACIÓN Y REVOLUCIÓN

El movimiento de la estructura de una noría corresponde a un movimiento de rotación. Por el contrario, las barquillas de la noria realizan un movimiento de traslación o revolución con trayectoria circular.Puesto que a la rotación también se le llama, erróneamente, revolución, debemos diferenciar claramente el significado de estos términos.

La rotación de un cuerpo alrededor de un eje (exterior o interior al cuerpo) corresponde a un movimiento en el que los distintos puntos del cuerpo presentan velocidades que son proporcionales a su distancia al eje. Obviamente, los puntos del cuerpo situados sobre el eje (en el caso de que este sea interior al eje) permanecen en reposo. La orientación del cuerpo en el espacio cambia continuamente durante la traslación.

Un ejemplo de rotación el de la Tierra alrededor de su propio eje de rotación, con un periodo de rotación de un día sidéreo.
La revolución de una partícula o de un cuerpo extenso corresponde a un movimiento de traslación del cuerpo sobre una trayectoria cerrada, no necesariamente circular.
En este movimiento, la orientación del cuerpo en el espacio permanece constante.

## INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones que representan las secciones cónicas o en general las de segundo grado, pueden ser sencillas o complejas, este es según el sistema elegido. Así las siguientes ecuaciones.

$$x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \quad \text{..... ver } \textbf{Figura 1}$$

$$x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0 \quad \text{..... ver } \textbf{Figura 2}$$

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 + 2x - 14y + 5 = 0 \quad \text{..... ver } \textbf{Figura 3}$$

Representan a una elipse de semiejes igual a 2 y 1, pero en cada caso el sistema de coordenadas es diferente, por lo cual nuestra labor será escoger un sistema adecuado, para identificar que representa una determinada ecuación y lo haremos mediante una traslación y/o la rotación de ejes.

**Figura 1**

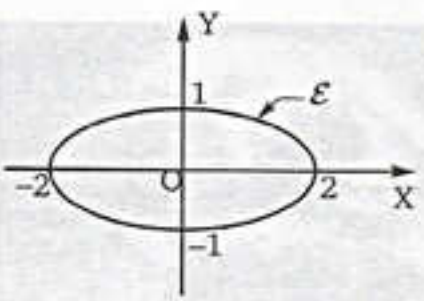



**Figura 2**

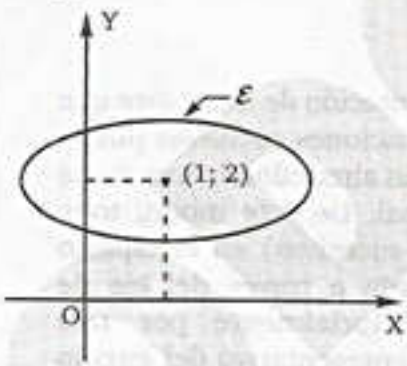
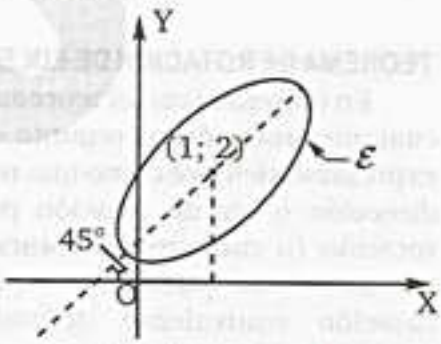
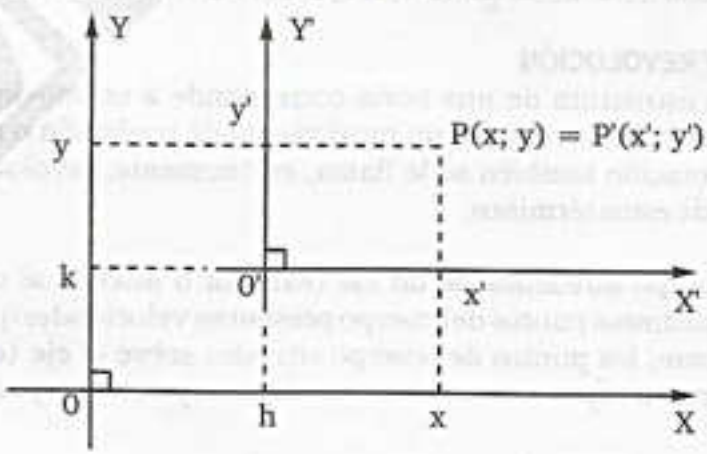



**Figura 3**




## TRASLACIÓN DE EJES

Dado el sistema XY, además el sistema X' Y' con origen en el punto (h; k) y con ejes x' e y' paralelos a los ejes x e y respectivamente.




Del gráfico se tiene:

$$\begin{aligned} x' &= x - h \\ y' &= y - k \end{aligned} \quad \text{..... (I)}$$

En forma equivalente:

$$\begin{aligned} x &= x' + h \\ y &= y' + k \end{aligned} \quad \text{..... (II)}$$

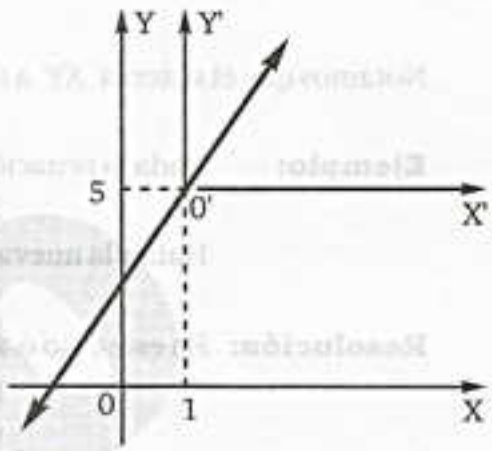
team CALAPENSHKO


Luego diremos que el sistema XY se ha trasladado paralelamente al punto (h; k), cuyo punto es el origen del sistema X'Y'.

**Ejemplo:** Dada la ecuación:

$$y = 2x + 3$$

Hallar la nueva ecuación representada cuando el sistema se traslada paralelamente al punto (1; 5).




**Resolución:** Usando (II) tenemos:

$$x = x' + 1$$
$$y = y' + 5$$

Reemplazando en la ecuación:

$$y' + 5 = 2(x' + 1) + 3$$
$$y' = 2x'$$

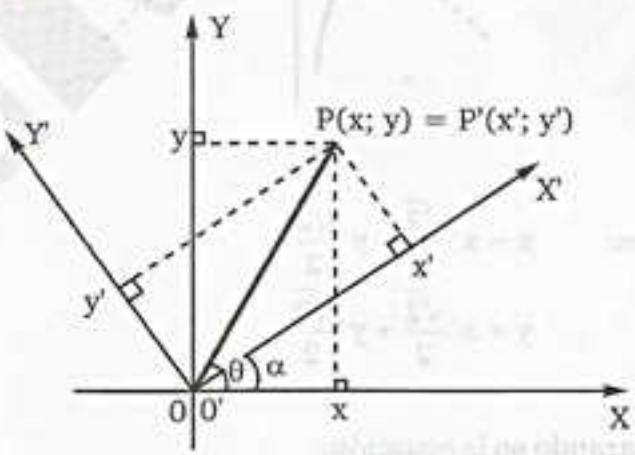
La cual representa una recta que pasa por el origen del nuevo sistema X'Y'

## ROTACIÓN DE EJES

La traslación de ejes simplifica muchas veces las expresiones, pero en ciertos casos es insuficiente o inaplicable para conseguir la simplificación deseada, por lo cual recurriremos a una rotación de ejes.

Dado el sistema XY y el sistema X'Y' con el mismo origen de tal manera que el eje X' forme un ángulo de valor $\alpha$ con el eje X.

Considerando que $\alpha$, es el valor de un ángulo agudo:




Si: OP = r del gráfico tenemos:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\,\text{sen}\,\theta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

También:

$$\left.\begin{aligned} x' &= r\cos(\theta - \alpha) = r\cos\theta\cos\alpha + r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\alpha \\ y' &= r\,\text{sen}(\theta - \alpha) = r\,\text{sen}\theta\cos\alpha - r\cos\theta\,\text{sen}\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

Usando (I) en (II) se tiene:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\,\text{sen}\alpha \\ y' &= y\cos\alpha - x\,\text{sen}\alpha \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(III)}$$

En forma equivalente:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\,\text{sen}\alpha \\ y &= x'\,\text{sen}\alpha + y'\cos\alpha \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(IV)}$$

Notamos que el sistema XY a sido rotado un ángulo que mide $\alpha$ resultando el sistema X'Y'.

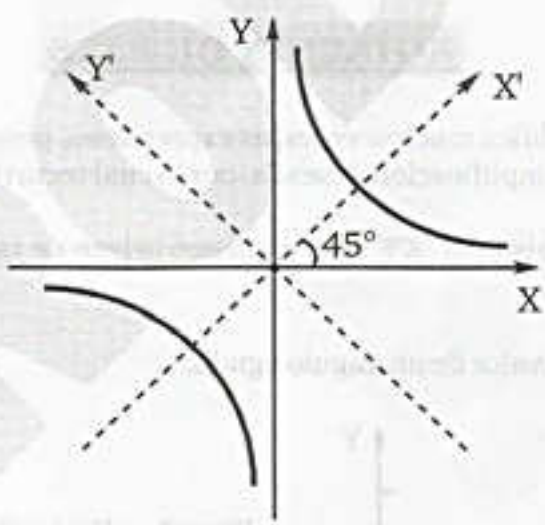
**Ejemplo:** Dada la ecuación:

$$2xy = 1$$

Hallar la nueva ecuación si el sistema a sido rotado un ángulo que mide 45°.

**Resolución:** En este caso $\alpha$ a 45° y usando (IV) tenemos:

$$x = x'\cos 45° - y'\,\text{sen}45°$$
$$y = x'\,\text{sen}45° + y'\cos 45°$$




Entonces:

$$x = x'\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$y = x'\frac{\sqrt{2}}{2} + y'\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Reemplazando en la ecuación:

$$2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) = 1$$

Resolviendo: $x'^2 - y'^2 = 1$

La cual representa a la hipérbola equilátera.

team CALAPENSHKO


## ECUACIÓN COMPLETA DE SEGUNDO GRADO EN LAS VARIABLES x e y

La ecuación completa de segundo grado en las variables x e y es de la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Donde los coeficientes A, B y C no pueden ser igual a cero a la vez. Usando una rotación de ejes, se prueba que una ecuación de segundo grado con $B \neq 0$ puede reducirse a otra en donde $B = 0$.

Considerando: $x = x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha$

$y = x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha$

En la ecuación general se tiene la forma:

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

Donde:

$$A' = A\cos^2\alpha + B\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + C\operatorname{sen}^2\alpha$$

$$B' = B(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) + (C - A)(2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)$$

$$C' = A\operatorname{sen}^2\alpha - B\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha$$

$$D' = D\cos\alpha + E\operatorname{sen}\alpha$$

$$E' = -D\operatorname{sen}\alpha + E\cos\alpha$$

$$F' = F$$

Si deseamos que en la nueva ecuación no aparezca el término $x'y'$, hacemos $B' = 0$

$$B(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) + (C - A)(2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha) = 0$$

$$B\cos 2\alpha + (C - A)\operatorname{sen} 2\alpha = 0$$

$$B\cos 2\alpha = (A - C)\operatorname{sen} 2\alpha$$

$$\boxed{\cot 2\alpha = \frac{A - C}{B}} \quad \ldots\ldots\ldots (V)$$

## INVARIANTE BAJO ROTACIÓN

Si: $F' = F \Rightarrow \begin{cases} a) & (A') + (C') = A + C \\ b) & (D')^2 + (E')^2 = D^2 + E^2 \end{cases}$ c) $(B')^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$

**Ejemplo:** Hallar el valor del ángulo de rotación $\alpha$ que elimine el término xy de la ecuación:

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 - 16 = 0$$

**Resolución:** Identificando con la ecuación completa de segundo grado:

$$A = 3;\ B = 2;\ C = 3$$

Usando (V) tenemos:

$$\cot 2\alpha = \frac{3 - 3}{2}$$

$$\cot 2\alpha = 0$$

$$2\alpha = 90^\circ$$

$$\alpha = 45^\circ$$

También es posible determinar el tipo de cónica que representa la ecuación:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

team CALAPENSHKO



| RELACIÓN ENTRE COEFICIENTES | TIPO DE CÓNICA | CASOS EXCEPCIONALES |
|---|---|---|
| $B^2 - 4AC = 0$ | Parábola | Dos rectas paralelas.<br>Dos rectas coincidentes.<br>Ningún lugar geométrico. |
| $B^2 - 4AC < 0$ | Elipse | Un punto.<br>Ningún lugar geométrico. |
| $B^2 - 4AC > 0$ | Hipérbola | Dos rectas que se intersecan. |

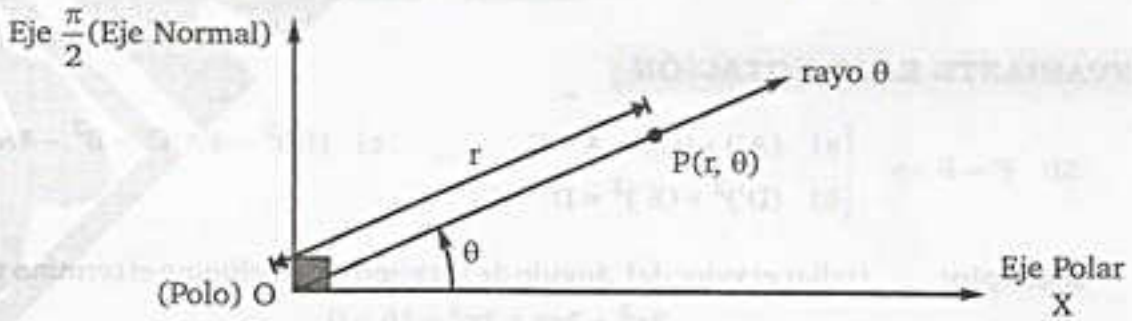
# COORDENADAS POLARES

## I. EL SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

Hasta ahora hemos estudiado el sistema de coordenadas cartesianas rectangulares para localizar un punto en el plano. En este capítulo estudiaremos otro sistema denominado **SISTEMA DE COORDENADAS POLARES** el cual ofrece otras ventajas con respecto a las coordenadas cartesianas.

### 1. POSICIÓN DE UN PUNTO EN COORDENADAS POLARES

En un sistema de coordenadas polares un punto P del plano se representa por un par de números $(r, \theta)$, donde r es la distancia del origen (llamado **POLO**) al punto dado.



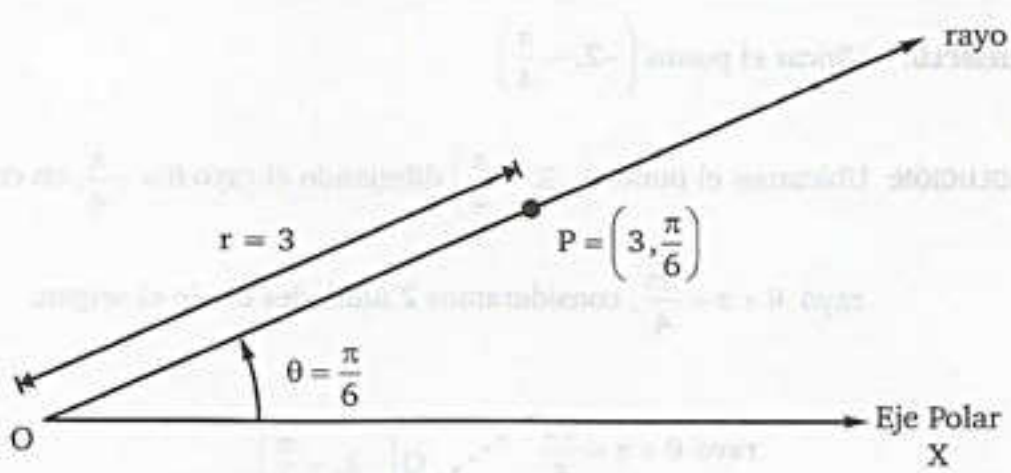

y donde θ es el ángulo de inclinación del radio vector $\overline{OP}$ con respecto al semieje X+ (positivo), llamado el **EJE POLAR**.

Aquí, la medida del ángulo θ estará dada en radianes.

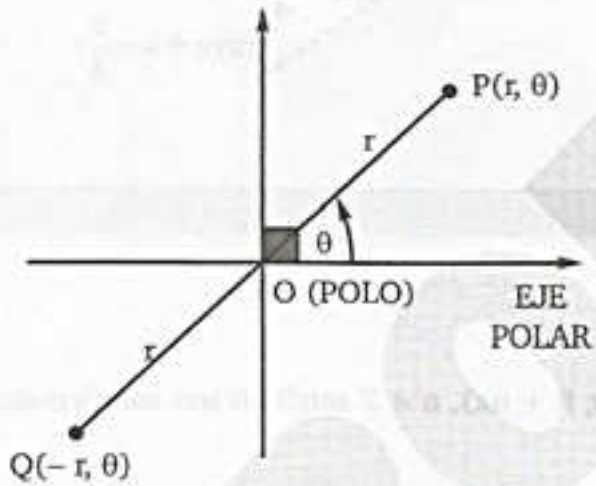
**EJEMPLO:** En coordenadas polares, el punto $P = \left(3, \frac{\pi}{6}\right)$ es ubicado dibujando primero un rayo que parte del **POLO** (origen) que haga un ángulo $\theta = \frac{\pi}{6}$ rad con el semieje +X (eje polar); luego, sobre dicho rayo y desde el origen, se mide r = 3 unidades.

team CALAPENSHKO






## 2. EXTENSIÓN DE LA REPRESENTACIÓN



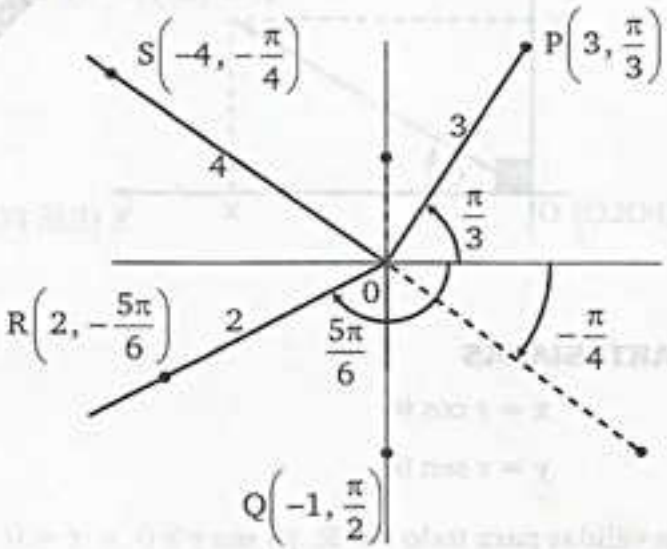

- Si $\theta$ se mide en sentido antihorario. $\theta > 0$.
- Si $\theta$ se mide en sentido horario. $\theta < 0$.

- Si P coincide con el extremo final del radio vector, $r > 0$.
- Si Q está en la prolongación del radio vector, $r < 0$ (es decir sobre el rayo $\theta + \pi$)

**EJEMPLO:** Representar los siguientes puntos de coordenadas polares.

$$P\left(3, \frac{\pi}{3}\right),\ Q\left(-1, \frac{\pi}{2}\right),\ R\left(2, -\frac{5\pi}{6}\right), S\left(-4, -\frac{\pi}{4}\right)$$

**SOLUCIÓN:**



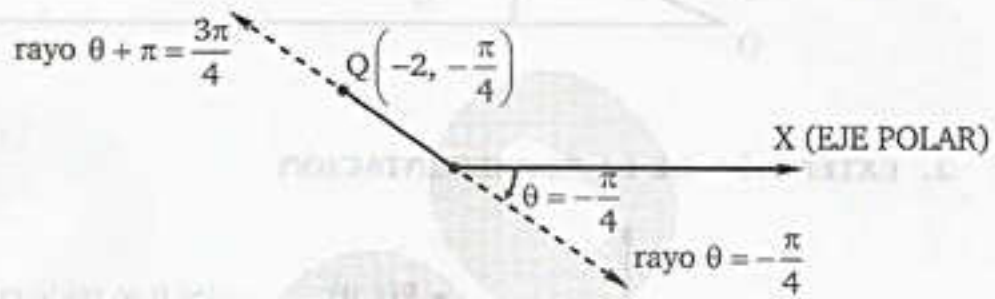
team CALAPENSHKO



**EJEMPLO:** Ubicar el punto $\left(-2, -\frac{\pi}{4}\right)$

**SOLUCIÓN:** Ubicamos el punto $\left(-2, -\frac{\pi}{4}\right)$ dibujando el rayo $\theta = -\frac{\pi}{4}$, en cuya prolongación,

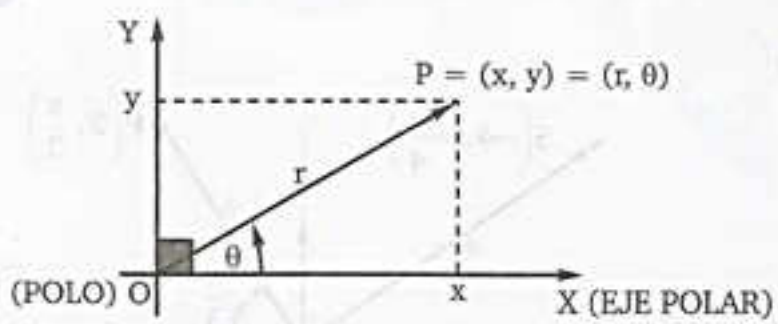
rayo $\theta + \pi = \frac{3\pi}{4}$, consideramos 2 unidades desde el origen.




**NOTA**

* $r = 0 \Leftrightarrow$ el punto es el polo.
* El polo tiene coordenadas $(0, \theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$.
* Si P $(r, \theta)$ es un punto, entonces $((-1)^n r, \theta + n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$ también son coordenadas del mismo punto P.

## II. TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS CARTESIANAS A POLARES Y VICEVERSA




### a) DE POLARES A CARTESIANAS

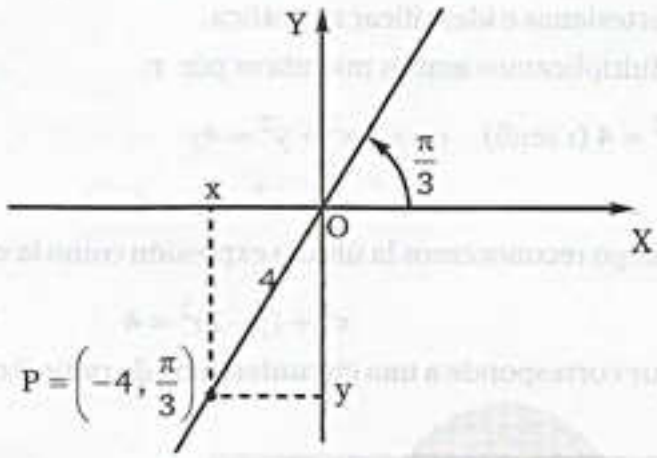
$$x = r \cos\theta$$

$$y = r \operatorname{sen}\theta$$

Estas ecuaciones son válidas para todo $r \in \mathbb{R}$, ya sea $r \geq 0 \vee r = 0$.

team CALAPENSHKO


**Ejemplo:**




$$P=\left(-4,\frac{\pi}{3}\right)$$

$$x=4\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-4\cos\frac{\pi}{3}=r\cos\theta$$

$$y=4\operatorname{sen}\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-4\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}=r\operatorname{sen}\theta$$

**b) DE CARTESIANAS A POLARES**

$$x^2+y^2=r^2 \rightarrow r=\pm\sqrt{x^2+y^2}$$

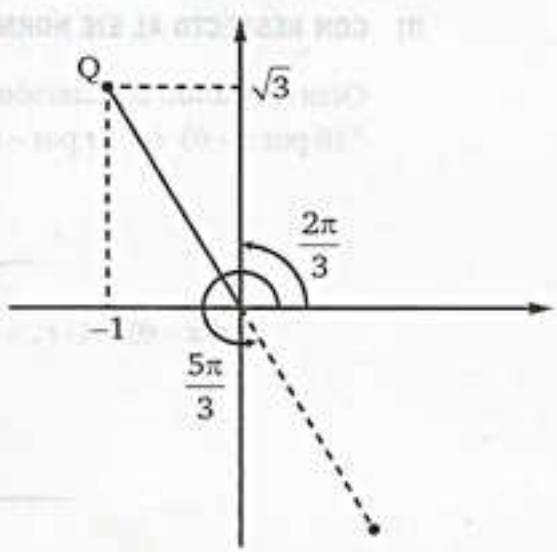
$$\tan\theta=\frac{y}{x}$$

La última ecuación posee dos soluciones en $[0, 2\pi\rangle$ si $\theta$ es el ángulo acorde a la posición del punto $\Rightarrow r=+\sqrt{x^2+y^2}$

Si $\theta$ se considera el otro valor $\Rightarrow r=-\sqrt{x^2+y^2}$

**Ejemplo:**

Expresar en coordenadas polares $Q(-1, \sqrt{3})$




$$r=\sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2}=\pm 2$$

$$\tan\theta=-\sqrt{3} \rightarrow \theta=\frac{2\pi}{3} \vee \theta=\frac{5\pi}{3}$$

$$\Rightarrow Q=\left(2,\frac{2\pi}{3}\right) \wedge Q=\left(-2;\frac{5\pi}{3}\right)$$

team CALAPENSHKO


**EJEMPLO:** Dada la ecuación $r = 4\,\text{sen}\theta$ en coordenadas polares, transformarla a coordenadas cartesianas e identificar su gráfica.

**SOLUCIÓN** Multiplicamos ambos miembros por **r**:

$$r^2 = 4(r\,\text{sen}\theta) \iff x^2 + y^2 = 4y$$

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = 4$$

Luego reconocemos la última expresión como la ecuación cartesiana.

$$x^2 + (y-2)^2 = 4$$

que corresponde a una circunferencia de radio 2 con centro en (0, 2).

## III. GRÁFICAS EN COORDENADAS POLARES

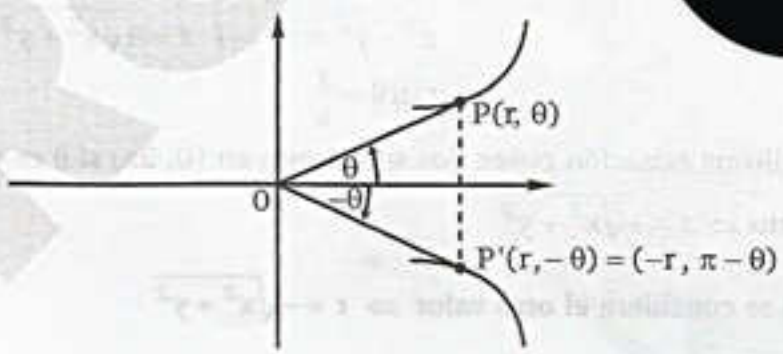
### 1. EXTENSIÓN DE UNA GRÁFICA POLAR

La extensión está determinada por una constante positiva M tal que: $|r| \leq M \quad \forall\, r \text{ y } \theta$.
lo que representa el hecho de que la gráfica está encerrada dentro de una circunferencia de radio M centrada en el origen.

### 2. SIMETRÍAS EN EL PLANO POLAR

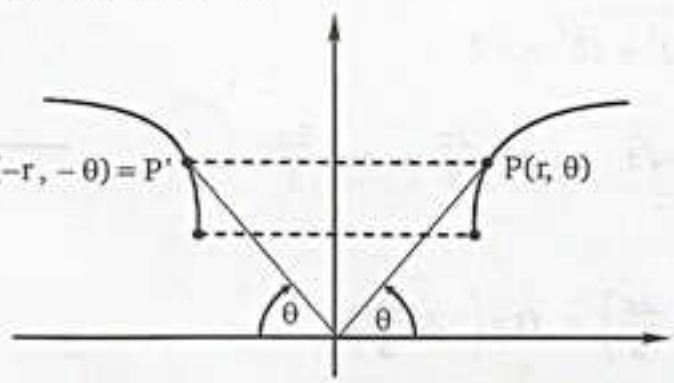
**I) CON RESPECTO AL EJE POLAR (EJE X, RECTA $\theta = 0$)**

Ocurre cuando la ecuación obtenida no varía al reemplazar:
* ($\theta$ por $-\theta$) o * ((r por $-$r) y ($\theta$ por $\pi - \theta$)).




**II) CON RESPECTO AL EJE NORMAL** $\left(\text{EJE Y, RECTA } \theta = \frac{\pi}{2}\right)$

Ocurre cuando la ecuación permanece invariante al reemplazar:
* ($\theta$ por $\pi - \theta$) o * (r por $-$r y $\theta$ por $-\theta$).

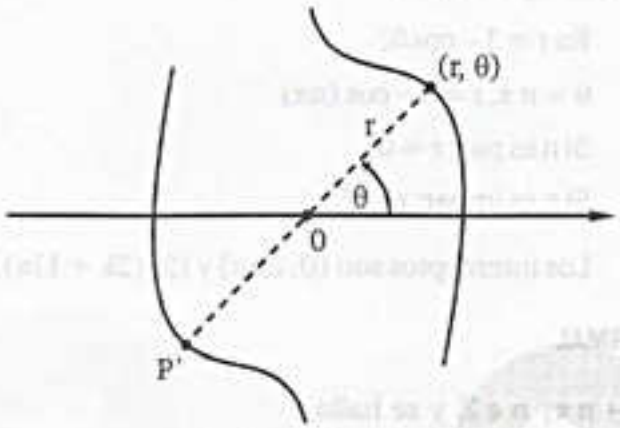


team CALAPENSHKO


**III) CON RESPECTO AL POLO (ORIGEN)**

Ocurre si la expresión de la ecuación no cambia cuando hacemos:

* $\theta$ por $\pi+\theta$ o * r por $-r$




$$P' = (r, \pi+\theta) = (-r, \theta)$$

**NOTA**

En los tres casos de simetría expuestos anteriormente, basta con que una de las dos condiciones en asterisco se cumpla para afirmar la simetría analizada.

## 3. RECTAS TANGENTES EN EL POLO

Son rectas que pasan por el origen, cuya forma general es: $\theta = \theta_k$ constantes.

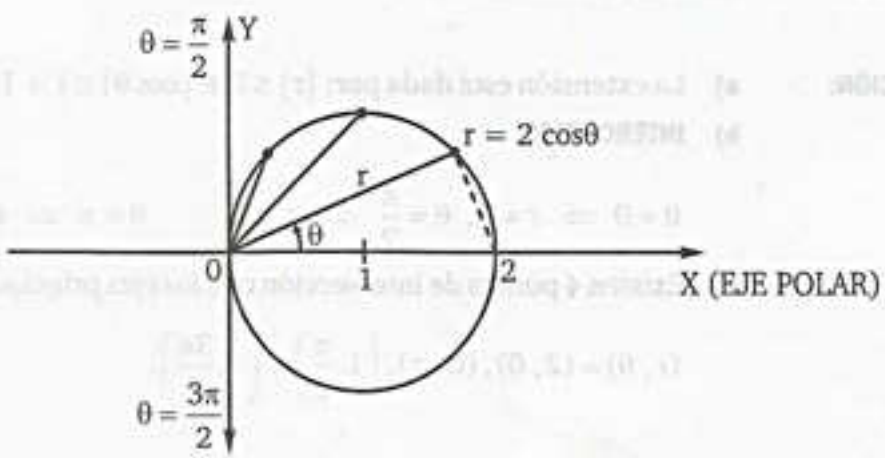
las que se hallan haciendo $r = 0$ en la ecuación polar, como veremos más adelante, y resolviendo para $\theta$. Por ejemplo, en la gráfica de:

$$r = 2\cos\theta \iff r^2 = 2r\cos\theta \iff x^2+y^2 = 2x \iff (x-1)^2+y^2 = 1$$

La dirección de las rectas tangentes se obtienen haciendo $r = 0$ en la ecuación y resolviendo luego para $\theta$:

$$0 = 2\cos\theta \iff \cos\theta = 0 \iff \left\{\theta = \frac{\pi}{2}, \theta = \frac{3\pi}{2}\right.$$

Estas dos últimas ecuaciones para $\theta$ representan a la misma recta: el eje normal Y.



team CALAPENSHKO


## 4. INTERCEPTOS CON LOS EJES PRINCIPALES

### a) CON EL EJE POLAR

Se hace $\theta = n\pi$, $n \in Z$ y se halla r.

**Ejemplo:** En $r = 1 - \cos\theta$.

$\theta = n\pi$, $r = 1 - \cos(n\pi)$

Si n es par: $r = 0$

Si n es impar: $r = 2$

Los interceptos son $(0, 2k\pi)$ y $(2, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

### b) CON EL EJE NORMAL

Se hace $\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ y se halla r

**Ejemplo:** En $r = 1 - \cos\theta$

$$r = 1 - \cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

El intercepto es $\left(1, (2n+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$

### c) CON EL POLO

Se hace $r = 0$ y se halla algún $\theta \in \mathbb{R}$.

**Ejemplo:** En $r = 1 - \cos\theta$.

$0 = 1 - \cos\theta \rightarrow \cos\theta = 1 \rightarrow \theta = 0 \in \mathbb{R}$.

$\rightarrow$ Existe algún $\theta$ tal que $r = 0$.

$\Rightarrow$ Existe intercepto con el polo.

Con todo lo anterior, podemos graficar curvas que describen una ecuación polar.

**EJEMPLO:** Graficar la cardioide: $r = 1 + \cos\theta$.

**SOLUCIÓN:**

a) La extensión está dada por: $|r| \leq 1 + |\cos\theta| \leq 1 + 1 = 2 \Rightarrow |r| \leq 2$

b) **INTERCEPTOS.**

$\theta = 0 \Rightarrow r = 2$, $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = 1$ $\quad$ $\theta = \pi \Rightarrow r = 0$, $\theta = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow r = 1$

Existen 4 puntos de intersección con los ejes principales:

$(r, \theta) = (2, 0), (0, \pi), \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ y $\left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$.

team CALAPENSHKO


**c) SIMETRÍAS.**

Se verifica fácilmente que la gráfica solamente es simétrica respecto al EJE POLAR X, pues la ecuación $r = 1 + \cos\theta$ no varía al reemplazar $\theta$ por $-\theta$. Por lo tanto será suficiente considerar los valores de $\theta$ que cubran puntos de la gráfica en el semiplano superior; el resto lo concluiremos por simetría.

**d) RECTAS TANGENTES EN EL POLO.**

Haciendo $r = 0$ en la ecuación $r = 1 + \cos\theta$, obtenemos:

$\theta = 1 + \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = -1 \Rightarrow \theta = \pi.$

Por lo tanto, la recta $\theta = \pi$ es la única recta que pasa por el origen (polo) que es tangente a la gráfica en el polo.

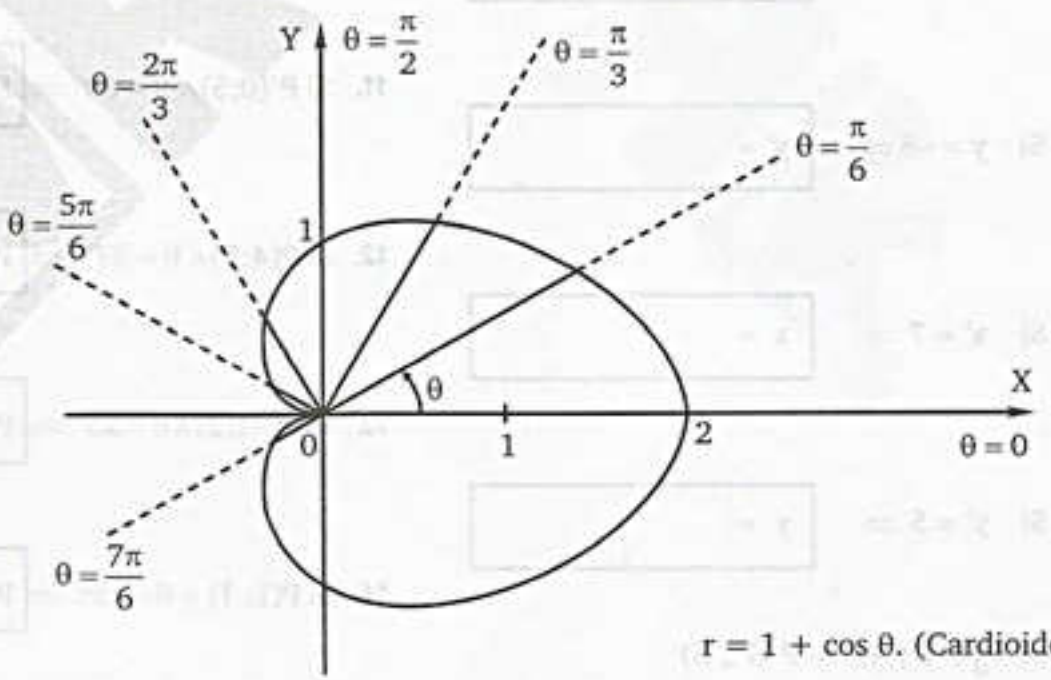
**e) TABLA:** $r = 1 + \cos\theta$

| $\theta$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| r | 2 | $1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1{,}86$ | $\frac{3}{2}=1{,}5$ | 1 | $1-\frac{1}{2}=0{,}5$ | $1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0{,}13$ | 0 |

Cuando $\theta$ aumenta de 0 a $\pi$, $\cos\theta$ disminuye de 1 a $-1$, y $r = 1 + \cos\theta$ disminuye desde 2 hasta 0.

Con todos estos datos procedemos a construir la gráfica:

**CARDIOIDE**



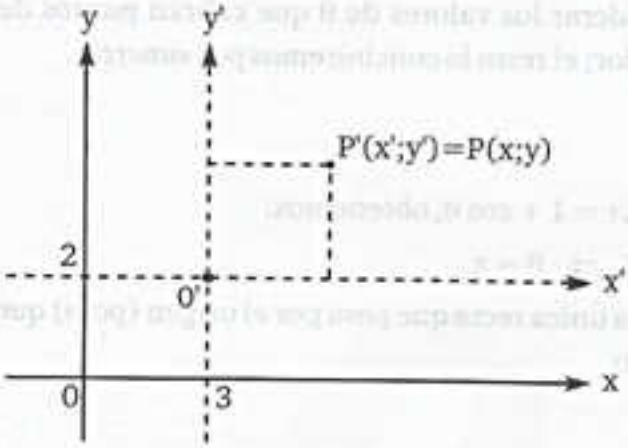

$r = 1 + \cos\theta$. (Cardioide)

team CALAPENSHKO



## EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Del gráfico; determinar los valores de sus elementos de traslación.




1. Si $x = 4 \Rightarrow$ x' =

2. Si $y = 6 \Rightarrow$ y' =

3. Si $x = -7 \Rightarrow$ x' =

4. Si $y = -8 \Rightarrow$ y' =

5. Si $x' = 7 \Rightarrow$ x =

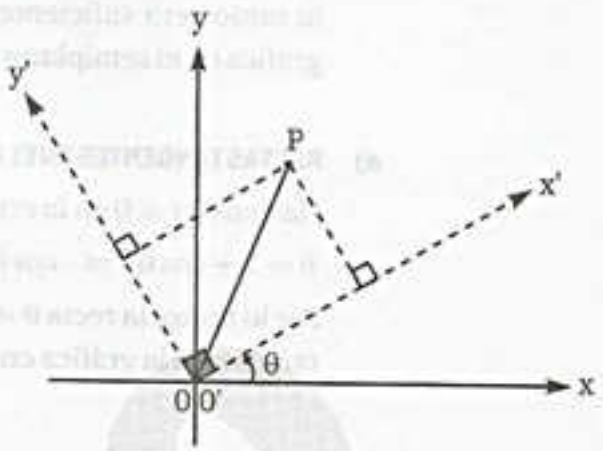
6. Si $y' = 5 \Rightarrow$ y =

7. Si $P_0'(-3\,;\,4) \wedge P'(7\,;\,5)$

   Entonces el punto P (x;y) es:

   .....

Del gráfico determinar sus elementos, cuando hace la rotación.




8. Si $P'(2;3) \wedge \theta = 37° \Rightarrow$ P(x;y) =

twitter.com/calapenshko

9. Si $P'(1;3) \wedge \theta = 53° \Rightarrow$ P(x;y) =

10. Si $P'(-2;0) \wedge \theta = 30° \Rightarrow$ P(x;y) =

11. Si $P'(0;5) \wedge \theta = 60° \Rightarrow$ P(x;y) =

12. Si $P(4;5) \wedge \theta = 37° \Rightarrow$ P'(x';y') =

13. Si $P(-1;2) \wedge \theta = 53° \Rightarrow$ P'(x';y') =

14. Si $P(1;\,1) \wedge \theta = 45° \Rightarrow$ P'(x';y') =

15. Si $P(-2;3) \wedge \theta = 16° \Rightarrow$ P'(x';y') =

team CALAPENSHKO


## PROBLEMAS RESUELTOS

**PROBLEMA 1** Determinar la ecuación de la curva representada por:

$$4x^2 + 4y^2 + 16x - 24y + 27 = 0$$

Si el origen es trasladado al punto O(-2; 3)

**Resolución:**

Según datos: $h = -2 \; ; \; k = 3$

Usando la ecuación (II):

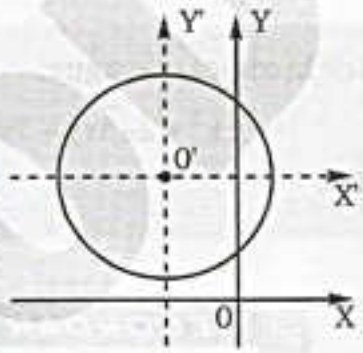
$$x = x' - 2$$
$$y = y' + 3$$

Reemplazando en la ecuación original:

$$4(x'-2)^2 + 4(y'+3)^2 + 16(x'-2) - 2y(y'+3) + 27 = 0$$

Desarrollando y reduciendo:

$$4x'^2 + 4y'^2 = 25 \text{ (Ecuación de la circunferencia)}$$




**PROBLEMA 2** Por una traslación de ejes, reducir la ecuación:

$$x^2y - 8x^2 + 8xy - 64x + 16y - 129 = 0$$

**Resolución:**

Agrupando términos se tiene:

$$(x^2 + 8x + 16)y - 8(x^2 + 8x) = 129$$
$$(x+4)^2y - 8(x^2 + 8x + 16) = 129 - 128$$
$$(x+4)^2y - 8(x+4)^2 = 1$$
$$(x+4)^2(y-8) = 1$$

Haciendo: $x + 4 = x' \;$ e $\; y - 8 = y' \;$ .....(*)

Obtenemos: $x'^2y' = 1$

Comparando (*) con la ecuación (I):

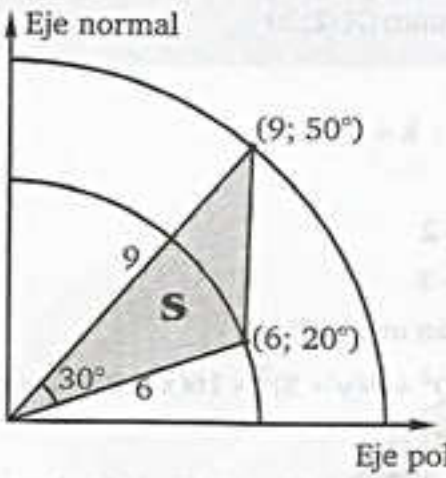
$$x' = x - h \quad e \quad y' = y - k$$

Tenemos: $h = -4 \quad \wedge \quad k = 8$

$\therefore$ **El origen debe de trasladarse al punto (-4; 8)**

**PROBLEMA 3:** Calcule el área (en $u^2$) de la región triangular cuyos vértices en coordenadas polares son: (9; 50°), (0; 0°) y (6; 20°)

**Resolución:** Graficamos




Delgráfico:

$$S = \frac{9 \times 6}{2} \times \operatorname{sen} 30°$$

$$S = 27 \times \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad S = 13{,}5$$

**PROBLEMA 4:** La ecuación de la cónica que sigue:

$$x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 8\sqrt{3}x - 8y + 32 = 0$$

corresponde a:

**ADMISIÓN UNI 2016-I**

**Resolución:**

**RECORDAR**

Sea: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Si $B^2 - 4AC = 0$ : Parábola
Si $B^2 - 4AC < 0$ : Elipse
Si $B^2 - 4AC > 0$ : Hipérbola

Según los datos: $B^2 - 4AC = (2\sqrt{3})^2 - 4(1)(3) = 0$

$\therefore$ Se trata de una parábola

**PROBLEMA 5** Determine la ecuación polar de la parábola:

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$

**ADMISIÓN UNI 2017-II**

team CALAPENSHKO



**Resolución:** Nos piden la ecuación polar de la parábola. $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$

Reemplazamos: $x = r\cos\theta \ \wedge \ y = r\,\text{sen}\,\theta \ \rightarrow \ r\,\text{sen}\,\theta = -\frac{1}{2}r^2\cos^2\theta + \frac{1}{2}$

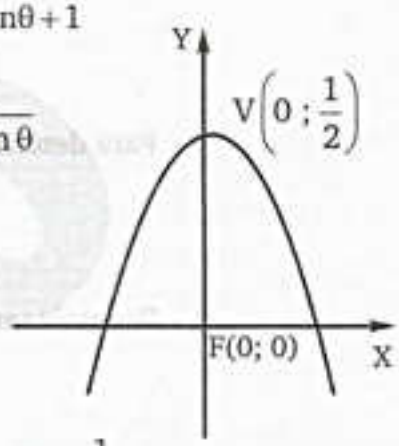
$$2r\,\text{sen}\,\theta = -r^2(1-\text{sen}^2\theta)+1 = -r^2 + r^2\,\text{sen}^2\theta + 1$$

$$r^2 = r^2\,\text{sen}^2\theta - 2r\,\text{sen}\,\theta + 1 = (r\,\text{sen}\,\theta - 1)^2$$

$$r = r\,\text{sen}\,\theta - 1 \ \vee \ r = -r\,\text{sen}\theta + 1$$

$$r = \frac{-1}{1-\text{sen}\,\theta} \ \vee \ r = \frac{1}{1+\text{sen}\,\theta}$$

Graficamos: $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$




$$x^2 = -2\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

$$\rightarrow \ V\left(0\,;\frac{1}{2}\right) \ \wedge \ 4P = -2 \ \rightarrow \ P = -\frac{1}{2}$$

Como el foco (F) está ubicado en el polo, la ecuación polar de la parábola es:

$$\therefore \ r = \frac{1}{1+\text{sen}\,\theta}$$

**PROBLEMA 6** La ecuación de una circunferencia en el sistema XY es:

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$$

pero en el sistema X'Y' es:

$$x'^2 + y'^2 + 6x' - 2y' + 6 = 0$$

Determine las coordenadas del nuevo origen.

**Resolución:** Usando las ecuaciones de traslación : $x = x' + h \ ; \ y = y' + k$

En la circunferencia del sistema XY, tenemos:

$$(x'+h)^2 + (y'+k)^2 - 4(x'+h) + 6(y'+k) + 9 = 0$$

Agrupando convenientemente:

$$x'^2 + y'^2 + (2h-4)x' + (2k+6)y' + (h^2 + k^2 - 4h + 6k + 9) = 0$$

Comparando con la ecuación del sistema X'Y' se deduce:

$$2h - 4 = 6 \quad \wedge \quad 2k + 6 = -2$$

$$h = 5 \quad \wedge \quad k = -4$$

∴ Las coordenadas del nuevo origen son (5; – 4)

**PROBLEMA 7** Calcule la excentricidad de la cónica:

$$r = \frac{4}{3 - 2\cos\theta}$$

**Resolución:** Tenemos la ecuación polar de la cónica:

$$r = \frac{4}{3 - 2\cos\theta}$$

$$3r - 2r\cos\theta = 4$$

Para determinar su ecuación polar, hacemos los cambios:

| $x = r\cos\theta$ | $y = r\,\text{sen}\,\theta$ | $x^2 + y^2 = r^2$ |
|---|---|---|

Reemplazamos: $3\sqrt{x^2 + y^2} - 2x = 4$

$$3\sqrt{x^2 + y^2} = 4 + 2x$$

Elevamos al cuadrado: $9(x^2 + y^2) = 16 + 16x + 4x^2$

$$5x^2 + 9y^2 - 16x = 16$$

$$5\left(x^2 - \frac{16}{5}x + \frac{64}{25}\right) + 9y^2 = 16 + \frac{64}{5}$$

$$5\left(x - \frac{8}{5}\right)^2 + 9y^2 = \frac{144}{5}$$

$$\mathscr{E}: \frac{\left(x - \frac{8}{5}\right)^2}{\frac{144}{25}} + \frac{y^2}{\frac{16}{5}} = 1$$

De donde determinamos que:

| $a = \frac{12}{5}$ | $b = \frac{4}{\sqrt{5}}$ | $c = \frac{8}{5}$ |
|---|---|---|

Así entonces la excentricidad (e) es:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{8}{5}}{\frac{12}{5}}$$

$$\therefore \; \mathbf{e = \frac{2}{3}}$$

team CALAPENSHKO



**PROBLEMA 8:** Dada la ecuación de la curva en coordenadas polares.

$$r = \frac{1}{1-2\operatorname{sen}\theta}$$

Calcule el centro de esta curva en coordenadas rectangulares.

**Resolución:** Tenemos la ecuación polar de una cónica:

$$r = \frac{1}{1-2\operatorname{sen}\theta}$$

$$r - 2r\operatorname{sen}\theta = 1$$

Para obtener su ecuación cartesiana hacemos cambios.

| $x = r\cos\theta$ | $y = r\operatorname{sen}\theta$ | $x^2 + y^2 = r^2$ |
|---|---|---|

Reemplazamos: $\sqrt{x^2+y^2} - 2y = 1$

$$\sqrt{x^2+y^2} = 1 + 2y$$

Elevamos al cuadrado: $x^2 + y^2 = 1 + 4y + 4y^2$

$$x^2 - 3y^2 - 4y = 1$$

$$x^2 - 3\left(y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}\right) = 1 - \frac{4}{3}$$

$$x^2 - 3\left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{1}{3}$$

$$H: \frac{\left(y + \frac{3}{2}\right)}{\frac{1}{9}} - \frac{x^2}{\frac{1}{3}} = 1$$

$\therefore$ Esta ecuación es la de una hipérbola cuyo centro es: $\left(0; -\frac{2}{3}\right)$

**PROBLEMA 9** Determine las coordenadas del punto P(x; y) en el sistema XY, si en el nuevo sistema X' Y' que se genera cuando los ejes XY giran un ángulo que mide 37°, sus coordenadas dadas son P'(25; 5)

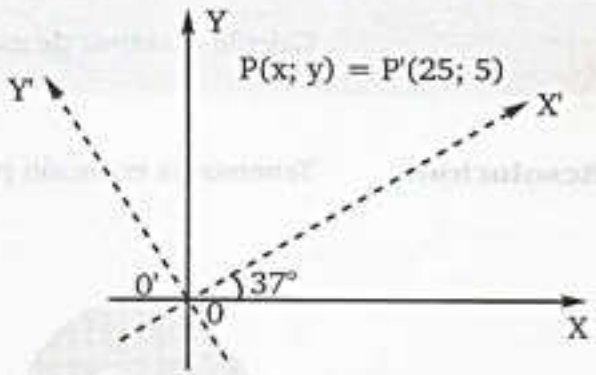
**Resolución:** Según los datos para el punto P' tenemos:

$$x' = 25\ ;\ y' = 5\ ;\ \alpha = 37°$$

Usando la ecuación (IV):

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha \\ y = x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 25\left(\frac{4}{5}\right) - 5\left(\frac{3}{5}\right) = 17 \\ y = 25\left(\frac{3}{5}\right) + 5\left(\frac{4}{5}\right) = 19 \end{cases}$$




∴ **El punto P en el sistema xy tiene por coordenadas P (17; 19)**

**PROBLEMA 10** Por medio de una rotación de los ejes coordenados, transformar la ecuación: $4x + 3y = 12$ en otra que no tenga el término en y.

**Resolución:** Usando la ecuación de rotación (IV) tenemos:

$$4(x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha) + 3(x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha) = 12$$

Agrupando tenemos:

$$(4\cos\alpha + 3\operatorname{sen}\alpha)x' + (3\cos\alpha - 4\operatorname{sen}\alpha)y' = 12 \quad .....(*)$$

Luego para eliminar el término y' hacemos:

$$3\cos\alpha - 4\operatorname{sen}\alpha = 0$$

Entonces: $\tan\alpha = \frac{3}{4}$

Así: $\alpha = 37°$

∴ **El sistema X'Y' se generado cuando XY ha rotado $\alpha = 37°$**

Reemplazando en (*):

$$\left[4\left(\frac{4}{5}\right) + 3\left(\frac{3}{5}\right)\right]x' = 12 \quad \Rightarrow \quad x' = \frac{12}{5}$$

**A todo el público en general:**

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

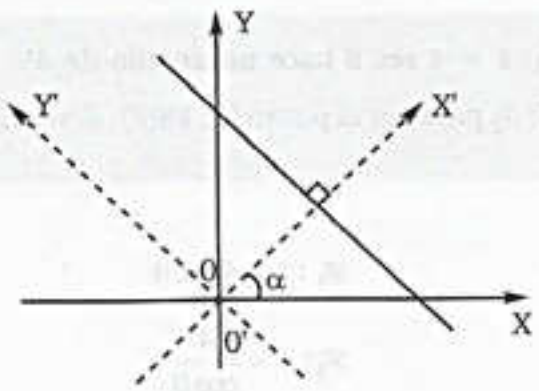
Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

**Este libro no debe ser prostituito monetariamente**, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

**28 de agosto del 2020**




**PROBLEMA 11** Encontrar la nueva representación de la ecuación:

$$x^2 - xy + y^2 - 6 = 0$$

cuando el sistema a rotado un ángulo que mide 45° en sentido antihorario.

**Resolución:** Usando la ecuación (IV):

$$x = x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha$$

$$y = x'\cos\alpha + y'\cos\alpha$$

Para $\alpha = 45°$ tenemos :

$$\begin{cases} x = x'\dfrac{\sqrt{2}}{2} - y'\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y = x'\dfrac{\sqrt{2}}{2} + y'\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad .....(*)$$

Usando (*) en la ecuación original:

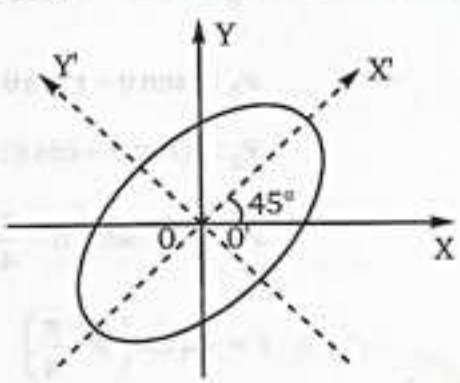
$$\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - 6 = 0$$

Efectuando y reduciendo:

$$x'^2 + 3y'^2 = 12$$

$$\frac{x'^2}{12} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

∴ **Esta condición representa a una elipse de lados $2\sqrt{3}$ y 2**



team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 12:** La recta $\mathscr{L}_1$: r = 4 sec θ hace un ángulo de 45° con la recta $\mathscr{L}_2$ (de pendiente positiva). Si $\mathscr{L}_2$ pasa por el punto (2; 180°), determine su ecuación.

**Resolución:** Tenemos :

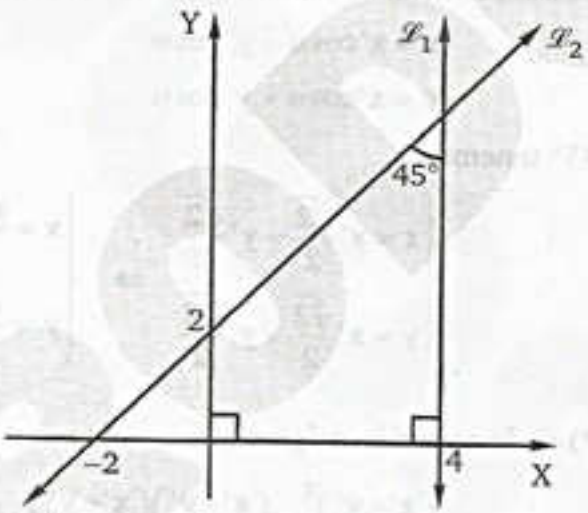
$$\mathscr{L}_1 : r = 4\sec\theta$$

$$\mathscr{L}_1 : r = \frac{4}{\cos\theta}$$

$$\mathscr{L}_1 : r\cos\theta = 4$$

$$\boxed{\mathscr{L}_1 : x = 4}$$

Graficamos $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ de acuerdo a la condición.




Del gráfico obtenemos la ecuación de la recta.

$$\boxed{\mathscr{L}_2 : y = x + 2}$$

Para determinar su ecuación polar hacemos los cambios de:

| $x = r\cos\theta$ | $y = r\,\text{sen}\,\theta$ |
|---|---|

Reemplazamos: $\mathscr{L}_2$: $r\,\text{sen}\,\theta = r\cos\theta + 2$

$$\mathscr{L}_2 : r\,\text{sen}\,\theta - r\cos\theta = 2$$

$$\mathscr{L}_2 : r(\text{sen}\,\theta - \cos\theta) = 2$$

$$\mathscr{L}_2 : r\sqrt{2}.\text{sen}\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 2$$

$$\therefore\ r = \sqrt{2}\csc\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 13** Grafique la siguiente ecuación:

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 8x - 4y - 5 = 0$$

**Resolución:** Identif icando : $A = 4\ ;\ B = -4\ ;\ C = 1$

$$B^2 - 4AC = (-4)^2 - 4(4)(1) = 0$$

Luego la ecuación representa una parábola o una forma degenerada.

Hallamos el valor del ángulo de rotación:

$$\cot 2\alpha = \frac{A - C}{B} = \frac{4-1}{-4} = -\frac{3}{4}$$

$$2\alpha \in \text{IIC} \Rightarrow \cos 2\alpha = -\frac{3}{5} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Así tenemos en la ecuación (IV):

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha \\ y = x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x'-2y'}{\sqrt{5}} \\ y = \dfrac{2x'+y'}{\sqrt{5}} \end{cases} \quad \text{.....(*)}$$

Reemplazando(*)enlaecuaciónoriginal:

$$4\left(\frac{x'-2y'}{\sqrt{5}}\right) - 4\left(\frac{x'-2y'}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2x'-y'}{\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{2x'-y'}{\sqrt{5}}\right)^2 + 8\left(\frac{x'-2y'}{\sqrt{5}}\right) - 4\left(\frac{2x'-y'}{\sqrt{5}}\right) - 5 = 0$$

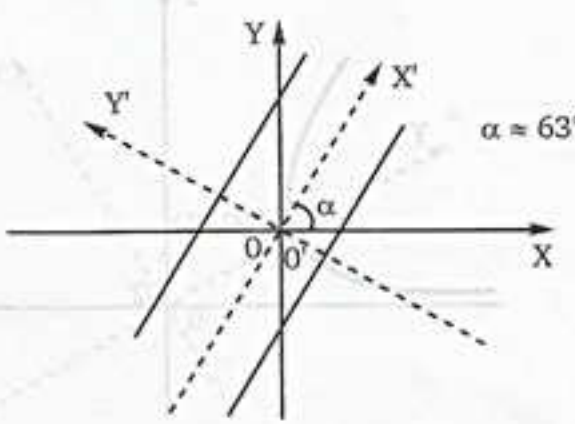
Operando y reduciendo:

$$\sqrt{5}\,y'^2 - 4y' - \sqrt{5} = 0$$

$$(y' - \sqrt{5})(\sqrt{5}\,y' + 1) = 0$$

$$y' = \sqrt{5} \ \vee \ y' = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

∴ **Dos rectas paralelas al eje X'**




$\alpha \approx 63° 30'$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 14** Grafique la siguiente cónica:

$$x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 8\sqrt{3}x - 8y + 32 = 0$$

**Resolución:** Identif icando : $A = 1\ ;\ B = 2\sqrt{3}\ ;\ C = 3$

$$B^2 - 4AC = (2\sqrt{3})^2 - 4(1)(3) \Rightarrow B^2 - 4AC = 0$$

Luego la ecuación representa una parábola o una forma degenerada.

Hallamos el valor del ángulo de rotación:

$$\cot 2\alpha = \frac{A - C}{B} = \frac{1-3}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$2\alpha = 120°$$

$$\therefore\ \alpha = 60°$$

Así tenemos en la ecuación (IV):

$$\begin{cases} x = x'\cos 60° - y'\operatorname{sen} 60° \\ y = x'\operatorname{sen} 60° + y'\cos 60° \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x' - \sqrt{3}y'}{2} \\ y = \dfrac{x'\sqrt{3} + y'}{2} \end{cases} \quad \text{.....(*)}$$

Reemplazando (*) en la ecuación original:

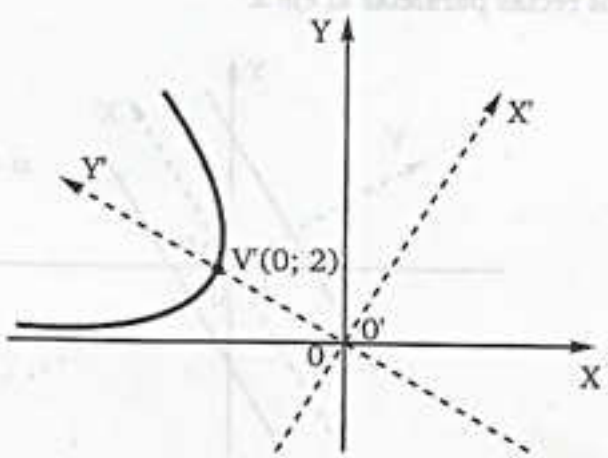
$$\left(\frac{x' - \sqrt{3}y'}{2}\right)^2 - 2\sqrt{3}\left(\frac{x' - \sqrt{3}y'}{2}\right)\left(\frac{x'\sqrt{3} + y'}{2}\right) + 3\left(\frac{x'\sqrt{3} + y'}{2}\right)^2 +$$

$$+ 8\sqrt{3}\left(\frac{x' - \sqrt{3}y'}{2}\right) - 8\left(\frac{x'\sqrt{3} + y'}{2}\right) + 32 = 0$$

Operando y reduciendo:

$$x'^2 - 4y' + 8 = 0$$

$$\mathbf{x'^2 = 4(y' - 2)} \text{ ..... Ecuación de una parábola}$$



team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 15** Reducir la ecuación:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 12\sqrt{2}x - 6 = 0$$

a su forma canónica más simple y construir su gráfica.

**Resolución:**

a) Clasificación de la canónica:

$$A = 1\ ;\ B = 2\ ;\ C = 1 \Rightarrow B^2 - 4AC = 2^2 - 4(1)(1) = 0$$

La curva es una parábola o una forma degenerada.

b) Valor del ángulo de rotación :

$$\cot 2\alpha = \frac{A - C}{B} \Rightarrow \cot 2\alpha = \frac{1-1}{2} = 0$$

$$2\alpha = 90° \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = 45°}$$

c) Ecuaciones de rotación :

$$\begin{aligned} x &= x'\cos 45° - y'\operatorname{sen} 45° \\ y &= x'\operatorname{sen} 45° + y'\cos 45° \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad .....(*)$$

Reemplazando(*) en la ecuación original:

$$\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2 + 12\sqrt{2}\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right) - 6 = 0$$

De donde obtenemos:

$$x'^2 + 6x' - 6y' - 3 = 0$$

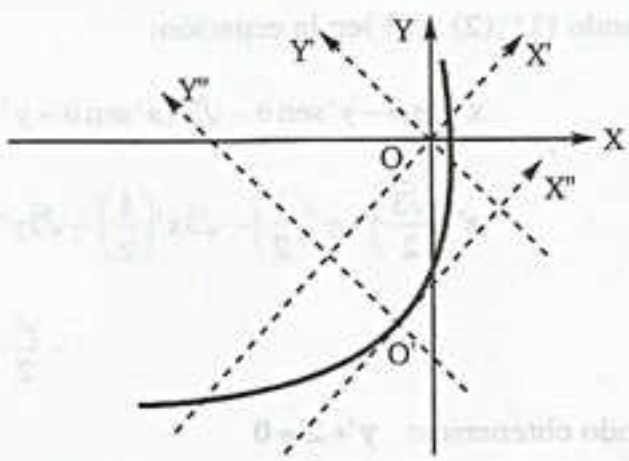
d) Completar cuadrados para trasladar:

$$(x'+3)^2 = 6(y'+2)$$

Haciendo : $x'+3 = x''$ , $y'+2 = y''$

Trasladamos los nuevos ejes al nuevo origen $O'(-3; -2)$

$$\boldsymbol{x''^2 = 6y''} \text{ .....Ecuación de una parábola}$$



**PROBLEMA 16** Determinar la ecuación de la cuerva representada por:

$$4x^2 + 4y^2 + 16x - 24y + 27 = 0$$

Si el origen es trasladado a O' (–2; 3)

**Resolución:** Según las ecuaciones de traslación se tiene:

$$x = x' - 2$$

$$y = y' + 3$$

$$\Rightarrow \quad E(x';y') : 4(x'-2)^2 + 4(y'+3)^2 + 16(x'-2) - 24(y'+3) + 27 = 0$$

$$4x'^2 - 16x' + \underline{16} + 4y'^2 + 24y' + \underline{36} + 16x' - 32 - 24y' - \underline{72} + \underline{27} = 0$$

$$4x'^2 + 4y'^2 = 25$$

De donde obtenemos la ecuación transformada: $\mathbf{x'^2 + y'^2 = \frac{25}{4}}$

**PROBLEMA 17** Determine la ecuación de la recta:

$$\mathcal{L} : x - \sqrt{3}y - 4 = 0$$

después de una rotación según un ángulo que mide 30°.

**Resolución:** La ecuación de rotación:

$$x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta \quad \text{.....(1)}$$

$$y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta \quad \text{.....(2)}$$

$$\theta = 30° \quad \text{.....(3)}$$

Reemplazando (1) ,(2) y (3 )en la ecuación:

$$x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta - \sqrt{3}\,(x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta) - 4 = 0$$

$$x'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - y'\left(\frac{1}{2}\right) - \sqrt{3}x'\left(\frac{1}{2}\right) - \sqrt{3}y'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 4 = 0$$

$$-\frac{y'}{2} - \frac{3y'}{2} - 4 = 0$$

Desarrollando obtenemos: $\mathbf{y' + 2 = 0}$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 18** La nueva ecuación de una curva es: $x'y' + 2 = 0$; después de una rotación según un ángulo que mide $\theta = 45°$. Hallar la ecuación original de la curva.

**Resolución:** Utilizando las ecuaciones de rotación:

$$x' = x\cos\theta + y\,\text{sen}\,\theta$$

$$y' = y\cos\theta - x\,\text{sen}\,\theta$$

Reemplazando en la ecuación el dato:

$$(x\cos\theta + y\,\text{sen}\,\theta)(y\cos\theta - x\,\text{sen}\,\theta) + 2 = 0$$

$$(x\cos 45° + y\,\text{sen}\,45°)(y\cos 45° - x\,\text{sen}\,45°) + 2 = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y).\frac{1}{\sqrt{2}}(y-x) + 2 = 0$$

$$\frac{y^2 - x^2}{2} + 2 = 0$$

$$y^2 - x^2 + 4 = 0$$

$$\therefore \quad \mathbf{x^2 - y^2 = 4}$$

**PROBLEMA 19** Por una rotación de ejes coordenados, transformar la ecuación:

$$\mathcal{L} = x - 2y - 3\sqrt{5} = 0$$

en otro que carezca del termino en "x"

**Resolución:** Recordar las ecuaciones de rotación:

$$x = x'\cos\theta - y'\,\text{sen}\,\theta \quad .....(1)$$

$$y = x'\,\text{sen}\,\theta + y'\cos\theta \quad .....(2)$$

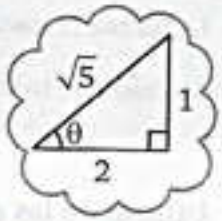
Ahora tenemos que reemplazar las ecuaciones (1) y (2) en la ecuación de la recta "$\mathcal{L}$":

$$x'\cos\theta - y'\,\text{sen}\,\theta - 2x'\,\text{sen}\,\theta - 2y'\cos\theta - 3\sqrt{5} = 0$$

Factorizando : $x'(\cos\theta - 2\,\text{sen}\,\theta) - y'(\text{sen}\,\theta + 2\cos\theta) - 3\sqrt{5} = 0$

De acuerdo al dato : $\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta = 0$

$$\tan\theta = \frac{1}{2} \rightarrow$$

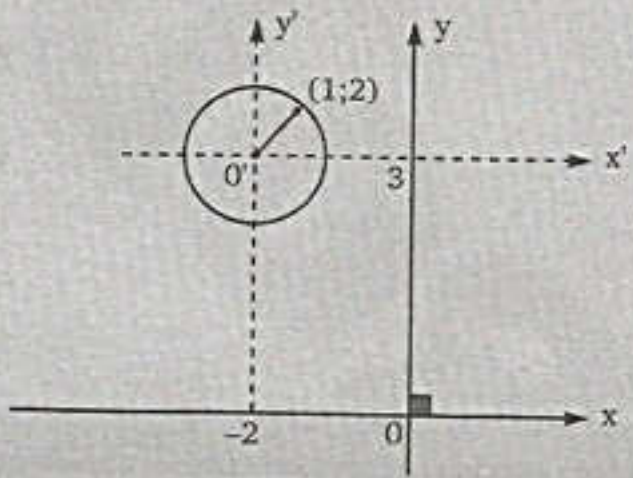



Entonces : $$-y'\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}}\right) = 3\sqrt{5}$$

$$-y'\left(\frac{5}{\sqrt{5}}\right) = 3\sqrt{5}$$

$$\therefore \quad \mathbf{y' + 3 = 0}$$

**PROBLEMA 20** En el gráfico mostrado, se pide hallar la ecuación de dicha circunferencia en el sistema XY, si se realiza una traslación de ejes.




**Resolución:** De la traslación se nota:

$$x = x' - 2 \qquad \text{.....(1)}$$

$$y = y' + 3 \qquad \text{.....(2)}$$

La ecuación de la circunferencia es:

$$C' = x'^2 + y'^2 = 5 \qquad \text{.....(3)}$$

Reemplazando (1) y (2) en (3):

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 5$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 5$$

Desarrollando y ordenando:

$$\mathbf{x^2 + y^2 + 4x - 6y + 8 = 0}$$

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 21** Dada la ecuación de la cónica: $r = \dfrac{8}{5 - 5\operatorname{sen}\theta}$

Determine la ecuación polar de su directriz.

**Resolución:** Tenemos la ecuación polar de la cónica:

$$r = \frac{8}{5 - 5\operatorname{sen}\theta}$$

$$5r - 5r\operatorname{sen}\theta = 8$$

Para obtener la ecuación cartesiana hacemos los cambios.

$$x = r\cos\theta \quad y = r\operatorname{sen}\theta \qquad x^2 + y^2 = r^2$$

Reemplazamos: $5\sqrt{x^2 + y^2} - 5y = 8$

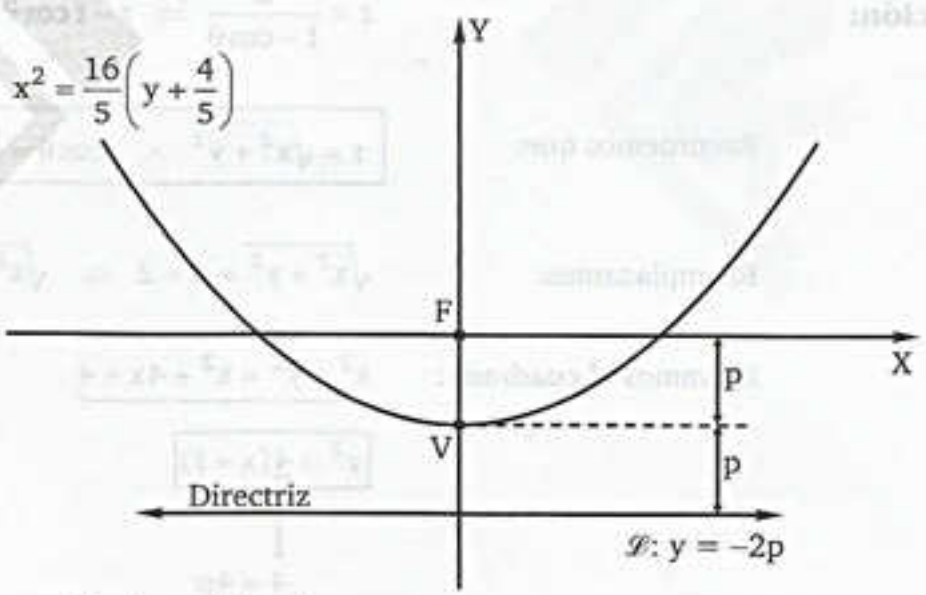
$$5\sqrt{x^2 + y^2} = 8 + 5y$$

Elevamos al cuadrado: $25x^2 + \cancel{25y^2} = 64 + 80y + \cancel{25y^2}$

$$25x^2 = 64 + 80y$$

$$P: x^2 = \frac{16}{5}\left(y + \frac{4}{5}\right)$$

Que nos representa la ecuación de una parábola de vértice en $\left(0; \dfrac{4}{5}\right)$ y parámetro (p) igual a $\dfrac{4}{5}$. Graficamos:




Así la ecuación de su directriz es:

$$\therefore \ \mathscr{D}: y = -\frac{8}{5}$$

**PROBLEMA 22** Halle la ecuación polar del lugar geométrico cuya ecuación rectangular es:

$$(x-2)^2+(y-2)^2=4$$

**Resolución:**

Tenemos : $(x-2)^2+(y-2)^2=4$

Para llevarlo a ecuación polar hacemos los cambios:

| $x=r\cos\theta$ | $y=r\operatorname{sen}\theta$ |
|---|---|

Reemplazamos: $(r\cos\theta-2)^2+(r\operatorname{sen}\theta-2)^2=4$

$$r^2\cos^2\theta-4r\cos\theta+4+r^2\operatorname{sen}^2\theta-4r\operatorname{sen}\theta+4=4$$

$$\Rightarrow r^2-4r\underbrace{(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)}_{\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}+4=0$$

Luego : $\therefore\ r^2-4\sqrt{2}r\operatorname{sen}\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+4=0$

**PROBLEMA 23** La ecuación polar de la parábola es: $r=\dfrac{2}{1-\cos\theta}$

halle la longitud del lado recto.

**Resolución:**

$$r=\frac{2}{1-\cos\theta}\Rightarrow r-r\cos\theta=2$$

Recordemos que: $\boxed{r=\sqrt{x^2+y^2}\ \wedge\ r\cos\theta=x}$

Reemplazamos: $\sqrt{x^2+y^2}=x=2\ \Rightarrow\ \sqrt{x^2+y^2}=x+2$

Elevamos al cuadrado: $\underbrace{x^2+y^2=x^2+4x+4}$

$$\boxed{y^2=\underline{4}(x+1)}$$

$$\downarrow$$

$$4=4p$$

Conocemos que longitud del lado recto: 4p

$\therefore$ Lado recto: 4

**A todo el público en general:**

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

**Este libro no debe ser prostituito monetariamente**, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

**28 de agosto del 2020**

team CALAPENSHKO


**PROBLEMA 24** Dada la ecuación rectangular del lugar geométrico $x^2 = 4y$, exprese la misma en forma polar.

**Resolución:** Ecuación rectangular de la Parábola:

$$x^2 = 4y$$

En coordenadas polares:

$$\text{Cambiamos: } \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{r^2\cos^2\theta = 4r\,\text{sen}\,\theta}$$

$$\therefore \quad \mathbf{r = 4\tan\theta\sec\theta}$$

**PROBLEMA 25** Determine la ecuación polar del lugar geométrico cuya ecuación cartesiana es:

$$x^2 - y^2 = 4$$

**Resolución:**

* Ecuación polar de la hipérbola: ?

* Ecuación cartesiana de la hipérbola: $x^2 - y^2 = 4$

Cambiamos: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

Reemplazamos: $r^2\cos^2\theta - r^2\,\text{sen}^2\theta = 4$

$$r^2(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) = 4$$

$$r^2\cos 2\theta = 4$$

$$\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{4}{r^2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{\tan^2\theta = \frac{r^2-4}{r^2+4}}$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS

**1.** Halle la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto A(0; 2) y es tangente en el origen a la recta:

$$\mathscr{L}: 2x + y = 0$$

cuánto éste es trasladado al nuevo origen $P_0(2; 1)$

A) $x'^2+y'^2=4$ B) $x'^2+y'^2=3$
C) $x'^2+y'^2=7$
D) $x'^2+y'^2=9$ E) $x'^2+y'^2=5$

**2.** Transforme la ecuación dada trasladando los ejes coordenados a un nuevo origen ubicado en (2; 3)

$$y^2-4x-6y+17=0$$

A) $y'^2=4x'$ B) $y'^2=2x'$ C) $y'^2=x'$
D) $x'^2=4y'$ E) $x'^2=2y'$

**3.** Halle la nueva ecuación de la circunferencia:

$$C: x^2+y^2+6x+4y=0$$

En el caso en que el nuevo origen sea el punto $P_0 = (-3;-2)$

A) $x'^2+y'^2=13$ B) $x'^2+y'^2=3$
C) $x'^2+y'^2=1$
D) $x'^2+y'^2=4$ E) $x'^2+y'^2=12$

**4.** Hallar la ecuación de la curva representada por:

$$4x^2+4y^2+16x-24y+27=0$$

si el origen es trasladado a O'(–2; 3)

A) $x'^2+y'^2=\frac{25}{4}$ B) $x'^2+y'^2=25$
C) $x'^2+y'^2=4$
D) $x'^2+y'^2=\frac{5}{4}$ E) $x'^2+y'^2=\frac{15}{4}$

**5.** ¿A qué punto debe trasladarse el origen para eliminar el término constante y el término lineal en "y" de la ecuación:

$$8y^2-6x-24y+15=0$$

A) $O'\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ B) $O'\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$
C) $O'\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$
D) $O'\left(-\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$ E) $O'\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$

**6.** Por una traslación de ejes, elimine los términos lineales de la ecuación:

$$xy + ax + by + c = 0$$

A) $x'y' = ab + c$ B) $x'y' = b + ac$
C) $x'y' = ab - c$
D) $x'y' = a - bc$ E) $x'y' = a + bc$

**7.** En un sistema que a rotado un ángulo que mide 45°, la ecuación de una cónica es:

$$(x'-y')(x'+y') = 1$$

Halle la ecuación en el sistema XY.

A) $xy=\frac{1}{2}$ B) $xy=-1$ C) $xy=4$
D) $xy=-2$ E) $xy=2$

**8.** El punto:

$$P\left(\frac{\sqrt{2}-3\sqrt{6}}{2};\frac{\sqrt{2}+3\sqrt{6}}{2}\right)$$

Ha sido obtenido después de haber rotado los ejes coordenados un ángulo que mide 15°. Hallar la coordenada original del punto "P".

A) $(2\sqrt{3}\ ;\ -3)$ B) $(4\sqrt{3}\ ;\ -6)$
C) $(-2\ ;\ \sqrt{3})$
D) $(-3\ ;\ 3\sqrt{3})$ E) $(-4\ ;\ 2\sqrt{3})$

team CALAPENSHKO



**9.** Halle las nuevas coordenadas del punto medio del segmento $\overline{AB}$ cuando los ejes coordenados rotan un ángulo de valor de 30°, si A(1; –3) y B(5; –5).

A) $(2\sqrt{3}\,;1)$
B) $(-1\,;1)$
C) $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-1;\frac{3}{2}-2\sqrt{3}\right)$
D) $(3\sqrt{3}-1;3+2\sqrt{3})$
E) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-2;-\frac{3}{2}-2\sqrt{3}\right)$

**10.** Hallar la ecuación de la recta:

$$\mathfrak{L}: x-\sqrt{3}y-4=0$$

Después de una rotación según un ángulo que mide 30°.

A) $y'-2=0$ B) $x'+2=0$ C) $x'-3=0$
D) $y'+2=0$ E) $x'+3=0$

**11.** Por rotación de los ejes coordenados, transformar la ecuación: $\mathfrak{L}: 2x-y=2$
En otra que carezca del término en x.

A) $y'-2\sqrt{5}=0$ B) $\sqrt{5}y'-2=0$
C) $y'+\sqrt{5}=0$
D) $\sqrt{5}y'+2=0$ E) $2y'-\sqrt{5}=0$

**12.** Si: $y'=2x'$ es la ecuación después de una rotación de un ángulo de valor 53°, hallar su ecuación en el sistema XY.

A) $y=2x$ B) $y=-2x$
C) $x^2+y^2=1$
D) $x^2+y^2=2$ E) $x+y=1$

**13.** La nueva ecuación de una curva es:

$$x'y'+2=0$$

Después de una rotación según un ángulo que mide $\theta=45°$, hallar la ecuación original de la curva.

A) $y^2-x^2=4$ B) $y^2-x^2=2$
C) $x^2-y^2=2$
D) $y^2-x^2=1$ E) $x^2-y^2=4$

**14.** Por una rotación de ejes coordenados, transformar la ecuación:

$$\mathfrak{L}: x-2y-3\sqrt{5}=0$$

en otra que carezca del término en x.

A) $y'+4=0$ B) $y'-5=0$ C) $y'+3=0$
D) $y'-6=0$ E) $y'+8=0$

**15.** Si al efectuar una rotación de ejes según un ángulo agudo que mide "θ", la pendiente de la recta:

$$\mathfrak{L}: 3x-y-4\sqrt{2}=0;\ \text{es}\ \frac{1}{2}$$

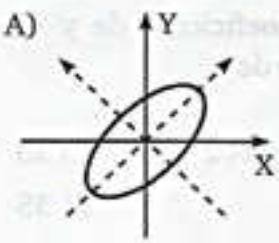
Hallar el ángulo de rotación de valor "θ".

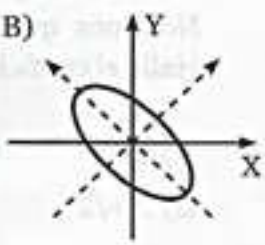
A) 45° B) 30° C) 90°
D) $\arctan\frac{2}{3}$ E) $\arctan\frac{1}{5}$

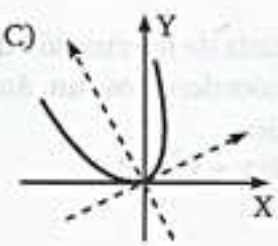
**16.** Hallar la ecuación de: $y=\sqrt{3}x+3$ después de haber girado los ejes un ángulo que mide 60°.

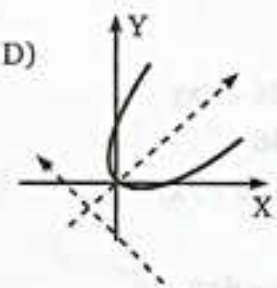
A) $y'=\frac{3x'}{2}$ B) $y'=\frac{3}{2}$ C) $y'=\frac{x'}{2}$
D) $y'=\frac{1}{2}$ E) $y'=x'$

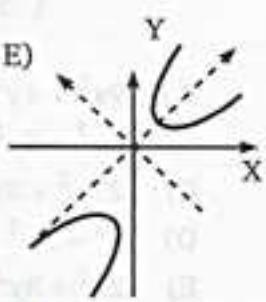
**17.** Grafique la cónica: $5x^2+4xy+2y^2=2$

A)



B)



C)



D)



E)


**18.** Hallar las nuevas coordenadas del punto (2; 2), cuando los ejes coordenados son girados primero un ángulo que mide 45° y después son trasladados al nuevo origen (–1; 1)

A) $(-2\sqrt{2}; \sqrt{2})$ B) $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$
C) $(2\sqrt{2}; -\sqrt{2})$
D) $(\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$ E) $(2\sqrt{2}; \sqrt{2})$

**19.** Por una rotación de un ángulo que mide 45° de los ejes coordenados, una cierta ecuación se transformó en:

$$4x'^2 - 9y'^2 = 36$$

Hállese la ecuación original.

A) $5x^2 - 26xy + 5y^2 + 72 = 0$
B) $5x^2 - 21xy + 5y^2 + 18 = 0$
C) $4x^2 - 3xy + 4y^2 - 5 = 0$
D) $5x^2 - 13xy + 2y^2 + 17 = 0$
D) $4x^2 + 3xy - 2y^2 + 13 = 0$

**20.** Mediante una rotación de coordenadas, al eliminar el término xy de la ecuación:

$$5x^2 - 2xy + 5y^2 + 15\sqrt{2}x - \sqrt{3} = 0$$

Notamos que el coeficiente de y' es –15. Halle el coeficiente de x'

A) 15 B) $15\sqrt{2}$ C) 30
D) $30\sqrt{2}$ E) 35

**21.** Hallar la transformada de la ecuación dada, al girar los ejes coordenados un ángulo cuyo valor θ, se indica:

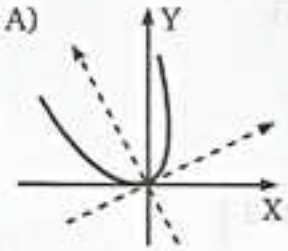
$$5x^2 + 3xy + y^2 = 4$$

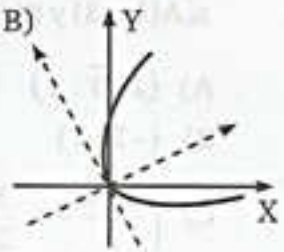
$$\theta = \arcsen\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

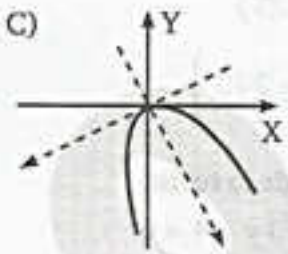
A) $9x^2 + 4y^2 = 36 + 3xy$
B) $4x^2 + 9y^2 = 36$
C) $27x^2 + 3y^2 = 20 + 7xy$
D) $x^2 + 3y^2 = 4$
E) $2x^2 + 3y^2 = 6 - 4xy$

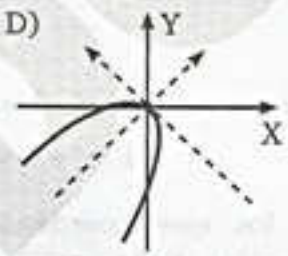
**22.** Grafique la cónica:

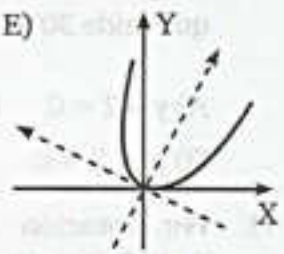
$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 40x - 30y = 0$$

A) 


B) 

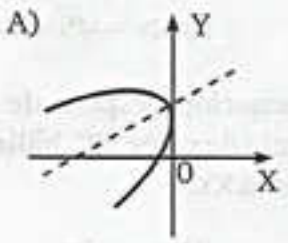

C) 

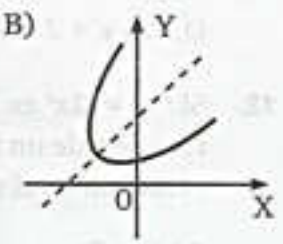

D) 

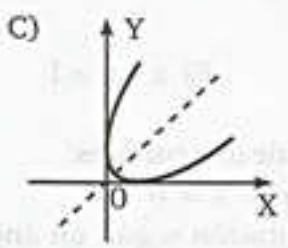

E) 

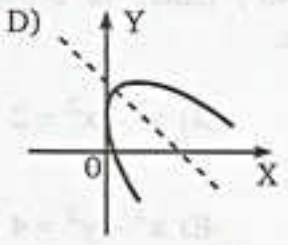

**23.** Determine el gráfico de:

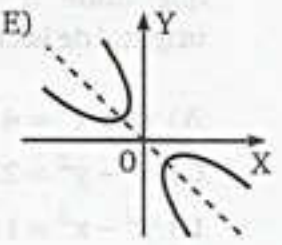
$$x^2 + 2xy + y^2 + 16\sqrt{2}y = 0$$

A) 


B) 


C) 


D) 


E) 


twitter.com/calapenshko

team CALAPENSHKO



**24.** La ecuación que se muestra es de una curva. Halle sec 4θ, siendo θ el valor del ángulo de rotación de los ejes coordenados, para que dicha curva se encuentre en posición estándar.

$$\begin{vmatrix} x & 3 & y \\ 2 & y & 2 \\ -2 & x & -1 \end{vmatrix} = 0$$

A) $\frac{17}{13}$ B) $\frac{17}{15}$ C) $\frac{17}{8}$

D) $-\frac{17}{15}$ E) $\frac{17}{10}$

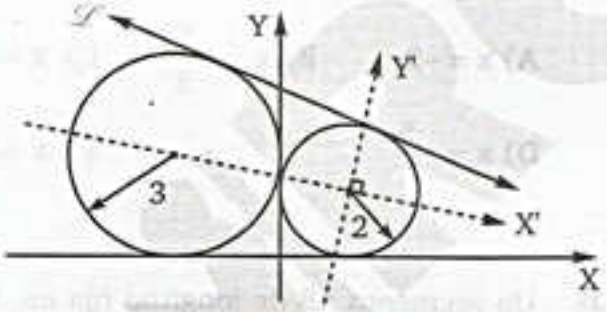
**25.** La siguiente curva:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$$

Representa a una:

A) Elipse
B) Parábola
C) Hipérbola
D) Dos rectas paralelas
E) Dos rectas perpendiculares

**26.** Del gráfico mostrado, halle la ecuación de la recta "$\mathcal{L}$" en el sistema x'y'.




A) $3y' + 2x' - \sqrt{13} = 0$
B) $y' + 5x' - 10\sqrt{26} = 0$
C) $y' + 5x' - 5\sqrt{26} = 0$
D) $x' + 5y' - 2\sqrt{26} = 0$
E) $2y' + 3x' - \sqrt{13} = 0$

**27.** La siguiente ecuación:

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 8x - 4y - 5 = 0$$

Identifica a:

A) Una parábola
B) Una elipse
C) Una hipérbola
D) Dos rectas coincidentes
E) Dos rectas paralelas

**28.** Halle el área encerrada por la recta

$$\mathcal{L}: x + y - 4 = 0$$

y los semiejes X'Y' en el nuevo sistema generado al rotar los ejes un ángulo de valor $\phi = 37°$ en sentido horario.

A) $\frac{100}{7}$ u$^2$ B) $\frac{150}{7}$ u$^2$ C) $\frac{135}{7}$ u$^2$

D) $\frac{200}{7}$ u$^2$ E) $\frac{215}{7}$ u$^2$

**29.** Por una rotación de los ejes coordenados, transformese la ecuación dada en otra que carezca del término x'y'

$$9x^2 + 3xy + 9y^2 = 5$$

A) $45x'^2 - 9y'^2 = 10$
B) $21x'^2 + 15y'^2 = 10$
C) $9x'^2 + 13y'^2 = 10$
D) $8x'^2 + 6y'^2 = 5$
E) $8x'^2 - 6y'^2 = 5$

**30.** Halle la excentricidad e y las coordenadas del centro de una hipérbola cuya ecuación está dada por:

$$7x^2 + 48xy - 7y^2 + 20x - 110y - 100 = 0$$

A) $e = \sqrt{3}$ ; C(−1; 2)
B) $e = 3/2$ ; C(−1; 2)
C) $e = \sqrt{5}$ ; C(2; 1)
D) $e = \sqrt{2}$ ; C(1; −2)
E) $e = \sqrt{3}$ ; C(−2; 1)

**31.** Se tienen los siguientes puntos en coordenadas polares: A (3; 32°) y B(6; 92°). Calcule la longitud de AB.

A) 3 B) 4 C) $3\sqrt{3}$

D) 5 E) 6

**32.** Si m es la longitud del lado recto (en u) y n es la excentricidad de la cónica:

$r = \frac{3}{2 - 3\cos\theta}$. Calcule : $\frac{m}{n}$.

A) 2 B) 3 C) $\frac{3}{2}$

D) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ E) $\frac{9}{2}$

**33.** Calcule la excentricidad de la curva:

$$r = 2\sec\theta - 3\csc\theta$$

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$

D) $\sqrt{3}$ E) $\frac{3}{2}$

**34.** Determine la excentricidad de:

$$r = \frac{144}{13 - 5\cos\theta}$$

A) $\frac{5}{13}$ B) $\frac{12}{5}$ C) $\frac{5}{12}$

D) $\frac{12}{13}$ E) $\frac{13}{12}$

**35.** Las siguientes afirmaciones:

I. $r = \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ es una cardioide.

II. $r = \text{sen}\,\theta$ es una circunferencia.

III. $r = \text{sen}\,2\theta$ es una rosa de 4 pétalos.

IV. $r = \text{sen}\,3\theta$ es una rosa de 3 pétalos.

V. $r = \text{sen}\,4\theta$ es una rosa de 8 pétalos.

Cuántas son incorrectas:

A) 0 B) 1 C) 2

D) 3 E) 4

**36.** Acerca de: $r = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, se tienen las siguientes afirmaciones:

I. No es función en $x > 0$.

II. Su máximo valor de 2.

III. Es simétrico respecto del eje de ordenadas.

IV. Su gráfico tiene la forma de un lazo.

Cuántas afirmaciones son verdaderas.

A) 0 B) 1 C) 2

D) 3 E) 4

**37.** Halle la ecuación rectangular de la cónica cuya ecuación polar es: $r^2 = \frac{4}{1 + 3\text{sen}^2\theta}$

A) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

B) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$

C) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

D) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$

E) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{9} = 1$

**38.** Si $r = \frac{\cdot 4}{2 - 3\cos\theta}$ es la ecuación de una cónica en coordenadas polares, determine la ecuación de una recta directriz en coordenadas cartesianas.

A) $x = -2$ B) $x = -\frac{5}{3}$ C) $x = -\frac{3}{2}$

D) $x = -\frac{5}{4}$ E) $x = -\frac{4}{3}$

**39.** Un segmento AB de longitud fija 6u, tiene sus extremos en los ejes cartesianos. Desde el origen de coordenadas (O), se traza la perpendicular OP al segmento AB. Determine coordenadas polares, el lugar geométrico descrito por el punto P.

A) $r = 3\,\text{sen}\,\theta$

B) $r = 3\cos\theta$.

C) $r = 6\,\text{sen}\,\theta$.

D) $r = 3\,\text{sen}\,2\theta$

E) $r = 3\,\text{sen}^2\theta$

team CALAPENSHKO


**40.** Determine la ecuación de la recta, en forma polar, que pasa por la cuerda común a las circunferencias:

$\mathscr{C}_1: x^2 + y^2 - 8x + 6 = 0$

$\mathscr{C}_2: x^2 + y^2 - 14x - 6y + 38 = 0$

A) $4\sqrt{2}\,r\,\text{sen}(\theta + 7°) = 15$

B) $4\sqrt{2}\,r\,\text{sen}(\theta - 82°) = 17$

C) $5\sqrt{2}\,r\,\text{sen}(\theta - 82°) = 16$

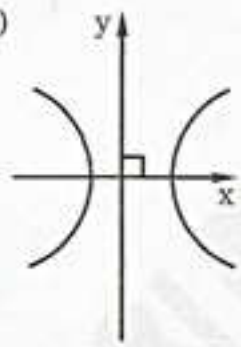
D) $5\sqrt{2}\,r\,\text{sen}(82° - \theta) = 16$

E) $3\sqrt{2}\,r\,\text{sen}(\theta + 45°) = 16$

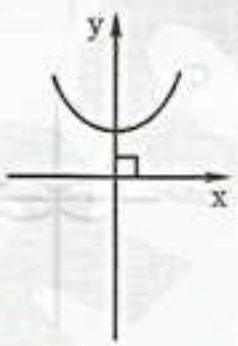
**41.** La gráfica que representa la ecuación polar:

$r^2\,\text{sen}\,2\theta = 2$ es:

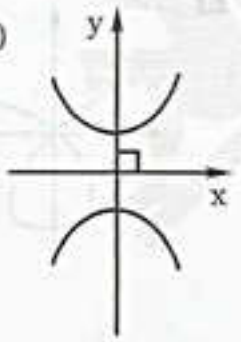
A)



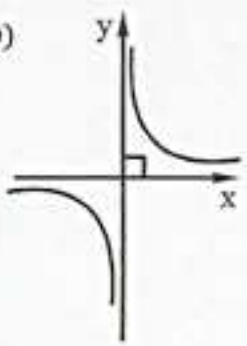

B)



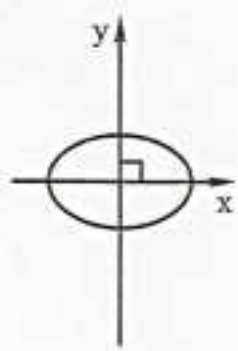

C)




D)




E)




**42.** La ecuación polar de una cónica es:

$$r = \frac{2}{1 - \cos\theta}$$

Entonces determine su ecuación cartesiana.

A) $y^2 = 4(x + 1)$ B) $y^2 = 2(x - 1)$

C) $y^2 = 4(x - 2)$

D) $y^2 = 2(x - 2)$ E) $y^2 = 4(x - 2)$

**43.** Determine la ecuación polar del lugar geométrico cuya ecuación rectangular es:

$$(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$$

A) $r^2 - 4r\cos\theta + 2 = 0$

B) $r^2 - 4r\,\text{sen}\,\theta + 2 = 0$

C) $r^2 - 4r\,\text{sen}\,\theta + 4 = 0$

D) $r^2 + 4\sqrt{2r}\,\text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 2 = 0$

E) $r^2 + 4\sqrt{2}\,r\,\text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 4 = 0$

**44.** Una línea curva C resulta de:

$r = 4\,\text{sen}\,\theta$, para $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Se puede afirmar (V) o negar (F) que:

I. $r = -4\,\text{sen}\,(\pi + \theta)$ describe el mismo lugar geométrico $\mathscr{C}$.

II. $r = 4\,\text{sen}\,(\pi + \theta)$ describe los puntos simétricos con respecto al polo de $\mathscr{C}$.

III. $r = 4\,\text{sen}\,(-\theta)$ describe los puntos simétricos con respecto al eje polar de $\mathscr{C}$.

A) VVV B) VVF C) VFV
D) VFF E) FVF

**45.** Calcule la suma de los ángulos que hacen la gráfica de $\left|\frac{x}{y}\right| + \left|\frac{y}{x}\right| = 4$ con el semieje positivo de las abscisas.

A) 90° B) 180° C) 270°
D) 360° E) 450°

**46.** Para la hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$, determine la ecuación de la recta asíntota de pendiente negativa, en coordenadas polares.

A) $\tan\theta = -\frac{3}{2}$ B) $\tan\theta = -\frac{2}{3}$

C) $\cot\theta = -\frac{3}{4}$

D) $\cot\theta = -\frac{4}{3}$ E) $r = \tan\theta$

**47.** Calcule el área de la región limitada por los ejes de coordenadas en el primer cuadrante con la curva: $r = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$

A) $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)u^2$ B) $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)u^2$

C) $\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\right)u^2$

D) $\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\right)u^2$ E) $\frac{\pi}{8}u^2$

**48.** Las asíntotas de: $2r = 3\sec\theta + 5\csc\theta$ son: $r = A\sec\theta$ y $r = B\csc\theta$ calcule $A + B$.

A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 10

**49.** Las directrices de la cónica $r^2 = 2\csc 2\theta$ forman los ángulos $\alpha$ y $\beta$ con las asíntotas de: $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$, calcule:

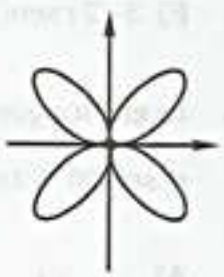
$$5\tan\alpha + 7\tan\beta$$

A) $-20$ B) $-24$ C) 28
D) 32 E) 36

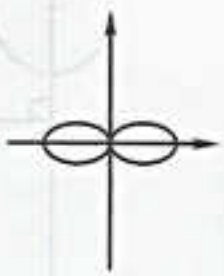
**50.** Identifique el gráfico descrito por la ecuación: $x^4 + y^4 + 6x^2y^2 = 8$

A)

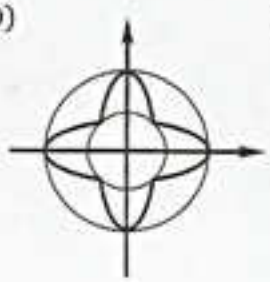
B)



C)



D)



E)

team CALAPENSHKO

## BIBLIOGRAFÍA


1. **ÁLGEBRA MODERNA Y TRIGONOMÉTRICA**
   Berman, Dolciani y Wooton / Publicaciones Cultural S.A. / México D.F. 1 970

2. **ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA**
   Bittinger M, Charles R, Dossey J, Keedy M, Smith S. / Editorial Adisson - Wesley Iberoamericano / E.E.U.U. 1 997

3. **ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA CON GEOMETRÍA ANALÍTICA**
   Cole y Swokowski / Grupo Editorial Iberoamericana / E.E.U.U. 1 993

4. **ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA CON GEOMETRÍA ANALÍTICA**
   Gechtman / Editorial LIMUSA / México D.F. 1 997

5. **TRIGONOMETRÍA ELEMENTAL**
   Hall H. S. – Knight S. R. / Editorial UTEHA / México 1 991

6. **PLANE AND ADVANCE TRIGONOMETRY**
   Hobson E. W. / Cambridge University Press / E.E.U.U. 1 957

7. **TRIGONOMETRY**
   Roland Larson, Robert Hostetler / D.C. Heath and Compañy / E.E.U.U. 1 993

8. **CÁLCULO Y GEOMETRÍA ANALÍTICA**
   Roland Larson, Robert Hostetler / Editorial Mc Graw – Hill / Vol. 2 / E.E.U.U. 1 995

9. **ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA CON GEOMETRÍA ANALÍTICA**
   Louis Leithold / Editorial Harla / México 1 994

10. **TRIGONOMETRÍA PLANA**
    Nathan Nil / Editorial Limusa / México 1 973

11. **TRIGONOMETRÍA**
    Antonio Paz / Editorial Minerva / E.E.U.U. 1 963

12. **ÁLGEBRA Y ANÁLISIS DE FUNCIONES ELEMENTALES**
    Potapov M. / Editorial MIR / Moscú 1 997

# CLAVES

## CAPITULO 1

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | D | 26 | B |
| 2 | B | 27 | C |
| 3 | B | 28 | A |
| 4 | D | 29 | A |
| 5 | D | 30 | B |
| 6 | D | 31 | D |
| 7 | B | 32 | E |
| 8 | B | 33 | C |
| 9 | D | 34 | B |
| 10 | C | 35 | B |
| 11 | D | 36 | D |
| 12 | C | 37 | E |
| 13 | B | 38 | C |
| 14 | C | 39 | A |
| 15 | A | 40 | C |
| 16 | D | 41 | B |
| 17 | A | 42 | D |
| 18 | C | 43 | D |
| 19 | E | 44 | B |
| 20 | B | 45 | C |
| 21 | B | 46 | A |
| 22 | A | 47 | B |
| 23 | B | 48 | C |
| 24 | D | 49 | D |
| 25 | B | 50 | E |

## CAPITULO 2

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | A | 26 | B |
| 2 | C | 27 | B |
| 3 | A | 28 | D |
| 4 | E | 29 | A |
| 5 | B | 30 | E |
| 6 | A | 31 | D |
| 7 | E | 32 | C |
| 8 | E | 33 | C |
| 9 | C | 34 | D |
| 10 | C | 35 | B |
| 11 | E | 36 | D |
| 12 | D | 37 | C |
| 13 | B | 38 | C |
| 14 | B | 39 | D |
| 15 | B | 40 | D |
| 16 | C | 41 | C |
| 17 | C | 42 | C |
| 18 | D | 43 | B |
| 19 | E | 44 | C |
| 20 | D | 45 | A |
| 21 | D | 46 | A |
| 22 | D | 47 | B |
| 23 | B | 48 | C |
| 24 | C | 49 | D |
| 25 | E | 50 | E |

## CAPITULO 3

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | C | 26 | B |
| 2 | D | 27 | A |
| 3 | A | 28 | A |
| 4 | E | 29 | C |
| 5 | E | 30 | A |
| 6 | B | 31 | D |
| 7 | B | 32 | C |
| 8 | E | 33 | A |
| 9 | E | 34 | A |
| 10 | B | 35 | D |
| 11 | C | 36 | E |
| 12 | D | 37 | A |
| 13 | B | 38 | A |
| 14 | B | 39 | A |
| 15 | A | 40 | C |
| 16 | C | 41 | D |
| 17 | A | 42 | B |
| 18 | C | 43 | D |
| 19 | C | 44 | E |
| 20 | C | 45 | B |
| 21 | E | 46 | A |
| 22 | B | 47 | B |
| 23 | C | 48 | C |
| 24 | A | 49 | D |
| 25 | C | 50 | E |

## CAPITULO 4

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | A | 26 | D |
| 2 | E | 27 | C |
| 3 | C | 28 | E |
| 4 | C | 29 | C |
| 5 | D | 30 | D |
| 6 | C | 31 | B |
| 7 | C | 32 | D |
| 8 | C | 33 | C |
| 9 | E | 34 | B |
| 10 | B | 35 | B |
| 11 | B | 36 | A |
| 12 | B | 37 | C |
| 13 | D | 38 | C |
| 14 | D | 39 | B |
| 15 | D | 40 | B |
| 16 | E | 41 | C |
| 17 | E | 42 | B |
| 18 | E | 43 | A |
| 19 | E | 44 | B |
| 20 | E | 45 | D |
| 21 | B | 46 | A |
| 22 | E | 47 | B |
| 23 | E | 48 | C |
| 24 | E | 49 | D |
| 25 | D | 50 | E |

## CAPITULO 5

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | B | 26 | A |
| 2 | B | 27 | E |
| 3 | D | 28 | A |
| 4 | C | 29 | E |
| 5 | A | 30 | C |
| 6 | B | 31 | C |
| 7 | E | 32 | E |
| 8 | A | 33 | E |
| 9 | D | 34 | C |
| 10 | D | 35 | B |
| 11 | B | 36 | C |
| 12 | D | 37 | C |
| 13 | E | 38 | B |
| 14 | B | 39 | C |
| 15 | D | 40 | A |
| 16 | E | 41 | D |
| 17 | C | 42 | C |
| 18 | B | 43 | D |
| 19 | B | 44 | E |
| 20 | D | 45 | E |
| 21 | A | 46 | A |
| 22 | A | 47 | B |
| 23 | B | 48 | C |
| 24 | E | 49 | D |
| 25 | D | 50 | E |

## CAPITULO 6

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | D | 26 | C |
| 2 | D | 27 | C |
| 3 | B | 28 | B |
| 4 | B | 29 | C |
| 5 | E | 30 | C |
| 6 | E | 31 | A |
| 7 | C | 32 | C |
| 8 | C | 33 | E |
| 9 | A | 34 | D |
| 10 | B | 35 | D |
| 11 | C | 36 | D |
| 12 | D | 37 | A |
| 13 | C | 38 | A |
| 14 | E | 39 | A |
| 15 | B | 40 | D |
| 16 | E | 41 | C |
| 17 | B | 42 | A |
| 18 | B | 43 | A |
| 19 | E | 44 | A |
| 20 | B | 45 | B |
| 21 | E | 46 | A |
| 22 | C | 47 | B |
| 23 | B | 48 | C |
| 24 | C | 49 | D |
| 25 | E | 50 | E |

## CAPITULO 7

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | B | 26 | A |
| 2 | B | 27 | B |
| 3 | B | 28 | D |
| 4 | B | 29 | E |
| 5 | D | 30 | B |
| 6 | B | 31 | B |
| 7 | C | 32 | A |
| 8 | C | 33 | B |
| 9 | A | 34 | D |
| 10 | E | 35 | A |
| 11 | D | 36 | D |
| 12 | B | 37 | E |
| 13 | C | 38 | C |
| 14 | D | 39 | D |
| 15 | A | 40 | B |
| 16 | D | 41 | C |
| 17 | C | 42 | D |
| 18 | E | 43 | B |
| 19 | C | 44 | B |
| 20 | E | 45 | A |
| 21 | E | 46 | A |
| 22 | E | 47 | B |
| 23 | B | 48 | C |
| 24 | A | 49 | D |
| 25 | C | 50 | E |

## CAPITULO 8

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | B | 26 | E |
| 2 | D | 27 | C |
| 3 | C | 28 | D |
| 4 | E | 29 | C |
| 5 | A | 30 | E |
| 6 | E | 31 | A |
| 7 | E | 32 | C |
| 8 | D | 33 | D |
| 9 | D | 34 | E |
| 10 | B | 35 | E |
| 11 | B | 36 | B |
| 12 | C | 37 | A |
| 13 | C | 38 | D |
| 14 | B | 39 | B |
| 15 | A | 40 | B |
| 16 | D | 41 | D |
| 17 | C | 42 | E |
| 18 | E | 43 | C |
| 19 | B | 44 | C |
| 20 | E | 45 | A |
| 21 | C | 46 | A |
| 22 | E | 47 | B |
| 23 | A | 48 | C |
| 24 | B | 49 | D |
| 25 | C | 50 | E |

**A todo el público en general:**

El Proyecto Modo Scan+100 2.0, nace de una idea del **Team Calapenshko**, el cual es difundir todo aquel texto inédito que no esté circulando en la red.

Nuestro Grupo Calapenshko hace el mejor esfuerzo para digitalizar este libro, y así usted estimado lector pueda obtener la mejor experiencia que toda persona desea al abrir un libro.

Este proyecto llega gracias a las **donaciones que se pudo obtener de 100 personas** comprometidas con el proyecto **MODO SCAN+100 2.0**.

**Este libro no debe ser prostituito monetariamente**, este libro no debe ser coleccionado, este libro debe ser destruido analíticamente, así que te invito a leerlo.

No pagues por este libro de **circulación gratuita**, búscalo en la red.

Atentamente, el **GRUPO CALAPENSHKO**

**28 de agosto del 2020**

## CAPITULO 9

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | D | 26 | D |
| 2 | C | 27 | C |
| 3 | B | 28 | D |
| 4 | D | 29 | C |
| 5 | B | 30 | B |
| 6 | C | 31 | C |
| 7 | C | 32 | D |
| 8 | C | 33 | D |
| 9 | D | 34 | C |
| 10 | C | 35 | B |
| 11 | D | 36 | B |
| 12 | C | 37 | B |
| 13 | B | 38 | E |
| 14 | C | 39 | A |
| 15 | A | 40 | A |
| 16 | B | 41 | A |
| 17 | D | 42 | C |
| 18 | D | 43 | E |
| 19 | C | 44 | E |
| 20 | D | 45 | C |
| 21 | C | 46 | A |
| 22 | C | 47 | B |
| 23 | A | 48 | C |
| 24 | C | 49 | D |
| 25 | B | 50 | E |

## CAPITULO 10

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | C | 26 | C |
| 2 | E | 27 | E |
| 3 | D | 28 | D |
| 4 | C | 29 | D |
| 5 | C | 30 | A |
| 6 | D | 31 | C |
| 7 | D | 32 | B |
| 8 | D | 33 | E |
| 9 | B | 34 | D |
| 10 | B | 35 | C |
| 11 | D | 36 | A |
| 12 | D | 37 | A |
| 13 | D | 38 | E |
| 14 | C | 39 | A |
| 15 | E | 40 | E |
| 16 | A | 41 | B |
| 17 | D | 42 | E |
| 18 | D | 43 | C |
| 19 | D | 44 | D |
| 20 | D | 45 | C |
| 21 | D | 46 | A |
| 22 | C | 47 | B |
| 23 | A | 48 | C |
| 24 | E | 49 | D |
| 25 | A | 50 | E |

## CAPITULO 11

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | D | 26 | C |
| 2 | D | 27 | A |
| 3 | B | 28 | E |
| 4 | B | 29 | C |
| 5 | B | 30 | E |
| 6 | B | 31 | C |
| 7 | E | 32 | C |
| 8 | B | 33 | C |
| 9 | D | 34 | D |
| 10 | E | 35 | E |
| 11 | E | 36 | D |
| 12 | D | 37 | E |
| 13 | A | 38 | C |
| 14 | D | 39 | B |
| 15 | C | 40 | C |
| 16 | A | 41 | D |
| 17 | E | 42 | C |
| 18 | B | 43 | C |
| 19 | B | 44 | D |
| 20 | C | 45 | A |
| 21 | C | 46 | A |
| 22 | A | 47 | B |
| 23 | D | 48 | C |
| 24 | A | 49 | D |
| 25 | C | 50 | E |

## CAPITULO 12

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | D | 26 | D |
| 2 | A | 27 | D |
| 3 | D | 28 | B |
| 4 | D | 29 | C |
| 5 | E | 30 | E |
| 6 | D | 31 | B |
| 7 | B | 32 | D |
| 8 | E | 33 | C |
| 9 | D | 34 | E |
| 10 | E | 35 | B |
| 11 | C | 36 | D |
| 12 | D | 37 | B |
| 13 | E | 38 | B |
| 14 | A | 39 | D |
| 15 | E | 40 | D |
| 16 | B | 41 | E |
| 17 | A | 42 | E |
| 18 | E | 43 | C |
| 19 | E | 44 | B |
| 20 | E | 45 | C |
| 21 | A | 46 | A |
| 22 | E | 47 | B |
| 23 | C | 48 | C |
| 24 | E | 49 | D |
| 25 | C | 50 | E |

## CAPITULO 13

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | B | 26 | C |
| 2 | B | 27 | E |
| 3 | B | 28 | E |
| 4 | A | 29 | C |
| 5 | A | 30 | C |
| 6 | D | 31 | A |
| 7 | A | 32 | C |
| 8 | B | 33 | B |
| 9 | E | 34 | D |
| 10 | E | 35 | B |
| 11 | E | 36 | A |
| 12 | C | 37 | C |
| 13 | C | 38 | C |
| 14 | D | 39 | D |
| 15 | B | 40 | D |
| 16 | C | 41 | B |
| 17 | B | 42 | D |
| 18 | C | 43 | D |
| 19 | B | 44 | B |
| 20 | B | 45 | C |
| 21 | C | 46 | A |
| 22 | C | 47 | B |
| 23 | E | 48 | C |
| 24 | D | 49 | D |
| 25 | B | 50 | E |

## CAPITULO 14

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | B | 26 | A |
| 2 | D | 27 | C |
| 3 | A | 28 | C |
| 4 | C | 29 | C |
| 5 | E | 30 | D |
| 6 | D | 31 | E |
| 7 | E | 32 | C |
| 8 | C | 33 | A |
| 9 | E | 34 | E |
| 10 | C | 35 | C |
| 11 | D | 36 | E |
| 12 | D | 37 | B |
| 13 | E | 38 | C |
| 14 | E | 39 | B |
| 15 | D | 40 | A |
| 16 | E | 41 | E |
| 17 | D | 42 | D |
| 18 | B | 43 | D |
| 19 | E | 44 | D |
| 20 | E | 45 | D |
| 21 | B | 46 | A |
| 22 | E | 47 | B |
| 23 | C | 48 | C |
| 24 | A | 49 | D |
| 25 | C | 50 | E |

## CAPITULO 15

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | C | 26 | A |
| 2 | A | 27 | C |
| 3 | C | 28 | D |
| 4 | B | 29 | C |
| 5 | A | 30 | D |
| 6 | D | 31 | A |
| 7 | A | 32 | B |
| 8 | C | 33 | A |
| 9 | C | 34 | E |
| 10 | B | 35 | D |
| 11 | B | 36 | B |
| 12 | C | 37 | C |
| 13 | E | 38 | A |
| 14 | B | 39 | A |
| 15 | A | 40 | A |
| 16 | B | 41 | D |
| 17 | C | 42 | C |
| 18 | A | 43 | E |
| 19 | E | 44 | A |
| 20 | C | 45 | D |
| 21 | B | 46 | A |
| 22 | C | 47 | B |
| 23 | A | 48 | C |
| 24 | B | 49 | D |
| 25 | B | 50 | E |

## CAPITULO 16

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | D | 26 | D |
| 2 | E | 27 | B |
| 3 | B | 28 | A |
| 4 | C | 29 | C |
| 5 | D | 30 | B |
| 6 | A | 31 | E |
| 7 | E | 32 | B |
| 8 | E | 33 | E |
| 9 | C | 34 | B |
| 10 | B | 35 | B |
| 11 | B | 36 | B |
| 12 | B | 37 | A |
| 13 | C | 38 | E |
| 14 | D | 39 | D |
| 15 | C | 40 | E |
| 16 | B | 41 | A |
| 17 | E | 42 | B |
| 18 | D | 43 | C |
| 19 | C | 44 | C |
| 20 | B | 45 | C |
| 21 | B | 46 | A |
| 22 | D | 47 | B |
| 23 | D | 48 | C |
| 24 | D | 49 | D |
| 25 | E | 50 | E |

## CAPITULO 17

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | E | 26 | A |
| 2 | D | 27 | E |
| 3 | C | 28 | A |
| 4 | E | 29 | B |
| 5 | D | 30 | E |
| 6 | D | 31 | A |
| 7 | C | 32 | A |
| 8 | D | 33 | A |
| 9 | E | 34 | B |
| 10 | B | 35 | E |
| 11 | D | 36 | A |
| 12 | A | 37 | C |
| 13 | A | 38 | D |
| 14 | D | 39 | E |
| 15 | D | 40 | E |
| 16 | C | 41 | C |
| 17 | E | 42 | A |
| 18 | B | 43 | E |
| 19 | E | 44 | B |
| 20 | B | 45 | B |
| 21 | A | 46 | A |
| 22 | C | 47 | B |
| 23 | C | 48 | C |
| 24 | D | 49 | D |
| 25 | C | 50 | E |

## CAPITULO 18

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | A | 26 | D |
| 2 | E | 27 | E |
| 3 | E | 28 | D |
| 4 | D | 29 | A |
| 5 | C | 30 | B |
| 6 | B | 31 | A |
| 7 | C | 32 | A |
| 8 | A | 33 | A |
| 9 | C | 34 | C |
| 10 | A | 35 | A |
| 11 | B | 36 | B |
| 12 | C | 37 | D |
| 13 | B | 38 | C |
| 14 | C | 39 | B |
| 15 | E | 40 | E |
| 16 | E | 41 | B |
| 17 | C | 42 | A |
| 18 | E | 43 | B |
| 19 | C | 44 | E |
| 20 | E | 45 | E |
| 21 | E | 46 | B |
| 22 | C | 47 | D |
| 23 | C | 48 | C |
| 24 | C | 49 | D |
| 25 | A | 50 | A |

## CAPITULO 19

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | B | 26 | B |
| 2 | B | 27 | D |
| 3 | C | 28 | E |
| 4 | A | 29 | E |
| 5 | E | 30 | B |
| 6 | C | 31 | C |
| 7 | B | 32 | E |
| 8 | D | 33 | B |
| 9 | C | 34 | D |
| 10 | A | 35 | A |
| 11 | E | 36 | E |
| 12 | D | 37 | B |
| 13 | D | 38 | A |
| 14 | B | 39 | C |
| 15 | E | 40 | C |
| 16 | B | 41 | E |
| 17 | D | 42 | C |
| 18 | C | 43 | A |
| 19 | A | 44 | A |
| 20 | C | 45 | C |
| 21 | B | 46 | A |
| 22 | E | 47 | B |
| 23 | A | 48 | C |
| 24 | B | 49 | D |
| 25 | C | 50 | E |

## CAPITULO 20

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | B | 26 | E |
| 2 | C | 27 | B |
| 3 | B | 28 | B |
| 4 | C | 29 | E |
| 5 | D | 30 | D |
| 6 | C | 31 | E |
| 7 | E | 32 | E |
| 8 | B | 33 | C |
| 9 | D | 34 | D |
| 10 | D | 35 | C |
| 11 | C | 36 | C |
| 12 | E | 37 | B |
| 13 | B | 38 | D |
| 14 | C | 39 | E |
| 15 | C | 40 | C |
| 16 | E | 41 | D |
| 17 | E | 42 | E |
| 18 | B | 43 | B |
| 19 | D | 44 | C |
| 20 | C | 45 | C |
| 21 | B | 46 | A |
| 22 | B | 47 | B |
| 23 | A | 48 | C |
| 24 | D | 49 | D |
| 25 | E | 50 | E |

## CAPITULO 21

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | D | 26 | D |
| 2 | C | 27 | D |
| 3 | C | 28 | B |
| 4 | C | 29 | D |
| 5 | E | 30 | A |
| 6 | A | 31 | D |
| 7 | C | 32 | B |
| 8 | B | 33 | D |
| 9 | B | 34 | B |
| 10 | D | 35 | C |
| 11 | A | 36 | A |
| 12 | A | 37 | E |
| 13 | A | 38 | C |
| 14 | B | 39 | B |
| 15 | D | 40 | A |
| 16 | D | 41 | D |
| 17 | E | 42 | B |
| 18 | A | 43 | A |
| 19 | B | 44 | B |
| 20 | C | 45 | A |
| 21 | C | 46 | A |
| 22 | B | 47 | B |
| 23 | B | 48 | C |
| 24 | C | 49 | C |
| 25 | B | 50 | E |

## CAPITULO 22

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | E | 26 | D |
| 2 | A | 27 | E |
| 3 | A | 28 | D |
| 4 | A | 29 | B |
| 5 | C | 30 | D |
| 6 | C | 31 | C |
| 7 | A | 32 | C |
| 8 | E | 33 | B |
| 9 | E | 34 | A |
| 10 | D | 35 | B |
| 11 | D | 36 | B |
| 12 | B | 37 | B |
| 13 | E | 38 | E |
| 14 | C | 39 | D |
| 15 | A | 40 | E |
| 16 | B | 41 | D |
| 17 | B | 42 | A |
| 18 | C | 43 | E |
| 19 | A | 44 | B |
| 20 | A | 45 | D |
| 21 | C | 46 | A |
| 22 | B | 47 | B |
| 23 | A | 48 | B |
| 24 | B | 49 | E |
| 25 | B | 50 | D |

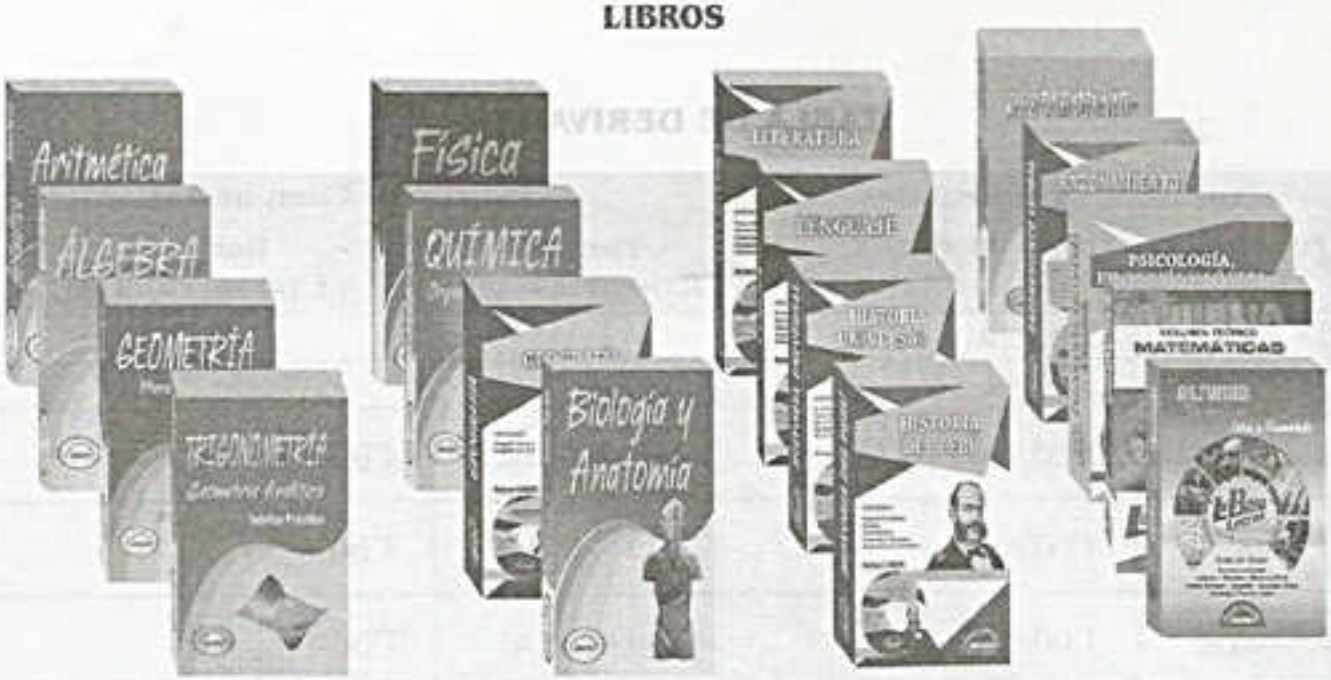
team CALAPENSHKO

# TABLA DE DERIVADAS

| Funciones Elementales | | Funciones Compuestas | |
|---|---|---|---|
| Función f(x) | Derivada f '(x) | Función f(x)con u = u(x) | Derivada f '(x) =f '(u).u'(x) |
| $f(x)=k$ | $f'(x)=0$ | | |
| $f(x)=x$ | $f'(x)=1$ | | |
| $f(x)=x^p \quad p\in\mathbb{R}$ | $f'(x)=px^{p-1}$ | $f(u)=u^p \quad p\in\mathbb{R}$ | $f'(u)=pu^{p-1}u'$ |
| $f(x)=\ln x$ | $f'(x)=\frac{1}{x}$ | $f(u)=\ln u$ | $f'(u)=\frac{u'}{u}$ |
| $f(x)=\log_a x$ | $f'(x)=\frac{1}{x\ln a}$ | $f(u)=\log_a u$ | $f'(u)=\frac{u'}{u\ln a}$ |
| $f(x)=e^x$ | $f'(x)=e^x$ | $f(u)=e^u$ | $f'(u)=e^u u'$ |
| $f(x)=a^x$ | $f'(x)=a^x\ln a$ | $f(u)=a^u$ | $f'(u)=a^u\ln a\,u'$ |
| $f(x)=g(x)^{h(x)}$ | $f'(x)=h(x)g(x)^{h(x)-1}g'(x)+g(x)^{h(x)}\ln g(x)h'(x)$ | | |
| $f(x)=\operatorname{sen} x$ | $f'(x)=\cos x$ | $f(u)=\operatorname{sen} u$ | $f'(u)=\cos u\,u'$ |
| $f(x)=\cos x$ | $f'(x)=-\operatorname{sen} x$ | $f(u)=\cos u$ | $f'(u)=-\operatorname{sen} u\,u'$ |
| $f(x)=\tan x$ | $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$ | $f(u)=\tan u$ | $f'(u)=\frac{u'}{\cos^2 u}=(1+\tan^2 u)u'$ |
| $f(x)=\operatorname{arcsen} x$ | $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $f(u)=\operatorname{arcsen} u$ | $f'(x)=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ |
| $f(x)=\arccos x$ | $f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $f(u)=\arccos x$ | $f'(u)=\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$ |
| $f(x)=\arctan x$ | $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ | $f(u)=\arctan u$ | $f'(u)=\frac{u'}{1+u^2}$ |
| $f(x)=\operatorname{sh} x$ | $f'(x)=\operatorname{ch} x$ | $f(u)=\operatorname{sh} u$ | $f'(u)=\operatorname{ch} u\,u'$ |
| $f(x)=\operatorname{ch} x$ | $f'(x)=\operatorname{sh} x$ | $f(u)=\operatorname{ch} u$ | $f'(u)=\operatorname{sh} u\,u'$ |
| $f(x)=\operatorname{th} x$ | $f'(x)=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}=1-\operatorname{th}^2 x$ | $f(u)=\operatorname{th} u$ | $f'(u)=\frac{u'}{\operatorname{ch}^2 u}=(1-\operatorname{th}^2 u)u'$ |
| $f(x)=\operatorname{argsh} x$ | $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ | $f(u)=\operatorname{argsh} u$ | $f'(u)=\frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$ |
| $f(x)=\operatorname{argch} x$ | $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $f(u)=\operatorname{argch} u$ | $f'(x)=\frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$ |
| $f(x)=\operatorname{argth} x$ | $f'(x)=\frac{1}{1-x^2}$ | $f(u)=\operatorname{argth} u$ | $f'(u)=\frac{u'}{1-u^2}$ |

team CALAPENSHKO

## LIBROS




## RESÚMENES TEÓRICOS

## TEMAS SELECTOS

team CALAPENSHKO

CALAPENSHKO

NUESTRAS PUBLICACIONES

## LIBROS

- ARITMÉTICA
- ÁLGEBRA
- GEOMETRÍA
- TRIGONOMETRÍA
- RAZONAMIENTO MATEMÁTICO
- FÍSICA
- QUÍMICA
- BIOLOGÍA Y ANATOMÍA
- GEOGRAFÍA
- LENGUAJE
- LITERATURA
- HISTORIA DEL PERÚ
- HISTORIA UNIVERSAL
- PSIC. FIL. Y LOG.
- RAZONAMIENTO VERBAL

- Formato: 16 x 21.5 cm
- 824 Páginas
- 22 Capítulos
- 550 Problemas Resueltos
- 1100 Problemas Propuestos

twitter.com/calapenshko

## Biblias

424-6350
992-796104

editorialrodo@gmail.com

/ Editorial RODO - Oficial